

今後の研究計画

高橋 良輔

本研究は [研究業績 8] の続きである. 研究 (3)*¹ で既に見たように, 少なくとも X が toric Fano の場合は, MA^{-1} -flow の極限挙動の情報から X の最適テスト配位を構成することができた. そこで, この結果を一般の Fano 多様体に対して拡張したいが, そのためには, フローに沿ってどのように特異点が形成されるかを調べるのが重要である. 本研究では, 比較的扱い易い場合として

- (A) 複素構造のジャンプから得られる最適テスト配位
 - (B) Calabi ansatz 上の回転対称性を持ったフローから得られる最適テスト配位
- についての研究を行う.

研究 (A) 複素構造のジャンプから得られる最適テスト配位

KE 計量を持たない Fano 多様体の中でも向井-梅村 3-fold*² のように, (多様体 X はそのまま) 別の複素構造 J_∞ に取り替えるだけで KE 計量を許容する, “マイルドな退化” によって最適テスト配位が実現される多様体がある. そこで, MA^{-1} -flow を複素構造の空間上で定義された同値なフローに置き換えることで, 複素構造側の収束性を調べるという方法が考えられる: 今, Kähler 形式 $\hat{\omega} \in \mathcal{H}_L$ を 1 つ固定し, \mathcal{H}_L に属する任意の計量を, Moser の定理を用いて $\hat{\omega}$ に引き戻す操作を考える. 特に, MA^{-1} -flow $\{\omega_t\}$ から決まる微分同相写像によって, X 上の複素構造は, $\hat{\omega}$ -compatible な X 上の複素構造の空間 \mathcal{J} 上のフロー $\{J_t\}$ に引き戻される. $\{\omega_t\}$ と $\{J_t\}$ は同値なフローであるが, それぞれ長所・短所がある. そこで, この長所・短所を上手く組み合わせることによって, フロー $\{J_t\}$ の収束を示し, それを基に最適テスト配位の構成を試みる.

研究 (A) の解決方策

flow	長所	短所
$\{\omega_t\}$	強放物型	\mathcal{H}_L の中に KE 計量が無ければ収束しない
$\{J_t\}$	\mathcal{H}_L の中に KE 計量が無くても収束する	弱放物型

Table 1 2つのフローの長所・短所

まず, それぞれのフローの長所・短所は Table 1 にある通り. $\{J_t\}$ はゲージ群 $\text{Symp}(X, \hat{\omega})$ の変換で不変であるから強放物型ではなく, 局所時間解の存在さえ一般論からは従わないが, MA^{-1} -flow $\{\omega_t\}$ は時間大域的に解けるので, $\{J_t\}$ も時間大域解を持つことが分かる. その一方で, \mathcal{H}_L の中に KE 計量が無ければ $\{\omega_t\}$ が収束することはあり得ないが, $\{J_t\}$ は, $\hat{\omega}$ を KE 計量とする何らかの複素構造 $J_\infty \in \mathcal{J}$ に収束する可能性がある (この場合, $J_t (t \in [0, \infty))$ は全て互いに X の微分同相で移り合うが, 時刻無限大でジャンプが起き, 非自明な複素構造 J_∞ が現れるという状況である). 直接計算により, $\{J_t\}$ は Calabi 型汎関数:

$$R(J) := \int_X (1 - e^{\rho(J)})^2 \hat{\omega}^n, \quad J \in \mathcal{J}$$

の勾配流であることが分かり, J_∞ は R の臨界点の 1 つになっている. ここで, 各 $J \in \mathcal{J}$ に対し, $\rho(J) \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ は, 関係式

$$\text{Ric}(\hat{\omega}) - \hat{\omega} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \rho(J), \quad \int_X e^{\rho(J)} \hat{\omega}^n = \int_X \hat{\omega}^n$$

によって一意に決まる関数である. 一般に, Banach 空間上の実解析的な汎関数の勾配流は, 臨界点の近傍では, Simon-Lojasiewicz 型の不等式 [Sim83] を適用することにより, コントロールが可能である. これを汎関数 R に用いることで, J_∞ に十分近い初期値 J_0 に対して, フロー $\{J_t\}$ の C^∞ -収束 $J_t \rightarrow J_\infty$ が証明できると考えられる.

研究 (B) Calabi ansatz 上の回転対称性を持ったフローから得られる最適テスト配位

[研究業績 8] より, (ソリトン解を許容する場合を除けば) MA^{-1} -flow に沿って特異点が形成される最も簡

*¹ 提出書類『これまでの研究成果のまとめ』を参照.

*² $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ を位数 60 の部分群で割った空間をコンパクト化して得られるような, KE でない Fano 多様体の例.

単な例は、3次元の Calabi ansatz $X := \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) \rightarrow \mathbb{P}^2$ であることが分かっている。適当な対称性を課すことにより、 MA^{-1} -flow/ソリトン解の方程式は、fiberwise な $U(1)$ -作用に対するモーメント写像を通してある 1次元閉区間上の関数に対する放物型時間発展方程式に帰着される。この具体的な関数表示を用いることで、極限空間の代数性、特異点集合の余次元、計量の特異性、そして、フローの幾何収束性を調べる。

研究 (B) の解決方策

MA^{-1} -flow のソリトン解の方程式に対応する閉区間上の ODE を考え、その解を f_∞ とする。このとき、 f_∞ の正値性は計量の正値性に対応している。今、 X はソリトン解を許容しないので、 f_∞ に対応する X 上の計量は正値性条件が破綻している。つまり、 f_∞ は正の部分と負の部分を持っており、これは、fiberwise モーメント写像を通して X のモーメント sublevel set への分解 $X = X_s \cup X_{u.s}$ を与える。 MA^{-1} -flow に沿って計量の体積が保存されることから、 $f_\infty \leq 0$ で定義される unstable なローカス $X_{u.s}$ が体積崩壊し、欠損した体積が $f_\infty > 0$ で定義される stable なローカス X_s 取り込まれ、この上でフローは局所 C^∞ -収束することが期待される (図 2 を参照)。このとき、 X_s 上には ($X_{u.s}$ が体積崩壊した痕跡として) 非自明な Lelong 数をもつ特異計量が入ると考えられる。関数 f_∞ に対応する X_s 上の特異計量がモーメント level の境界面に沿ってどれくらいの特異性を持つか (錐・カスプ等) を調べ、特異性の状況に応じて考えている Monge-Ampère 方程式に補正項を加えて評価を行う。例えば、錐特異性を持つ Monge-Ampère 方程式の解法は、Guenancia-Paun [GP16] による一般論があるので参考にしたい。

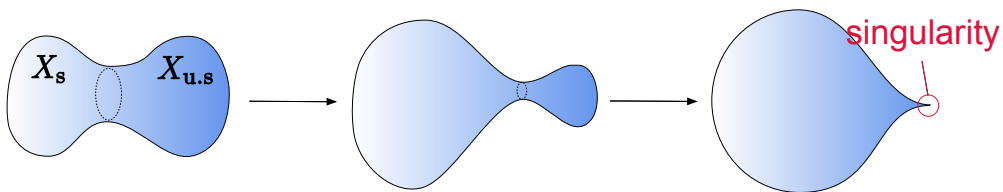


Fig.1 MA^{-1} -flow に沿った Calabi ansatz X の変形。

References

- [GP16] H. Guenancia and M. Paun, *Conic singularities metrics with prescribed Ricci curvature: general cone angles along normal crossing divisors*, J. Diff. Geom. **103** (2016), 15–57.
- [Sim83] L. Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems*, Ann. of Math. **118** (1983), no. 3, 525–571.