# これまでの研究成果のまとめ

高橋 良輔

## はじめに

私の専門は複素幾何学とその周辺である．特に**『与えられた多様体とコホモロジー/ホモロジー類からどのようにして標準的な幾何構造を取り出すか』**という問題に興味があり，主に幾何解析的な手法を用いて研究を行っている．より具体的には

- コンパクトな複素多様体 $X$ とそれ上の豊富直線束 $L$
- 向きづけられたコンパクト 4 次元シンプレクティック多様体 $M$，およびその 2 次元部分閉曲面 $\Sigma$

などが主な研究対象である．前者では，直線束 $L$ のチャーン類 $c_1(L)$ に属する Kähler 形式の空間 $\mathcal{H}_L$ から標準的な計量を取り出す問題を考える．ここで，標準計量とは主に定曲率条件を満たす計量のことを指しており，したがって，コンパクト Riemann 面の一意化定理の高次元への一般化とも思える．一方で，後者では多様体にシンプレクティック性を課し，これがいつケーラー構造に変形できるかを考える．ここで，考えているコホモロジー/ホモロジー類はシンプレクティック形式の定めるもの，あるいは，部分閉曲面が生成するサイクルを指している．前者との違いは，次元の制約が付くことで，反自己双対計量や超ケーラー構造等の特有の幾何構造が多様体に入ることである．これら 2 つの分野はそれぞれ異なるが，標準的な幾何構造の多くは，調和形式のようにエネルギーを最小化するという性質（変分原理）を満たしており，共通した手法を使って研究できるので，同時に研究をするメリットも大きい．特に，エネルギー汎関数の勾配流として得られる**幾何学的フロー**は，標準的な幾何構造を構成するための最も有効な手段の 1 つである．これは純粋に楕円/放物型方程式の解析を行うということだが，一方で，方程式の離散化/差分化を通して，**力学系**の観点から研究することもできる．さらに，$X$ が射影代数的であるので，代数幾何的視点から計量の存在と安定性の同値性を問うことができる（**GIT 安定性**）．このように，私の研究分野は幾何，解析，そして代数が互いに交差する非常に豊かな数学である．以下では，各テーマごとに研究内容の詳細を見ていく．

## 研究 (1) 幾何学的フローの研究（[研究業績 2, 7, 8, 9]）

直線束 $L$ が $X$ の反標準束 $-K_X$ に等しいとき，$X$ は **Fano 多様体**であるという．Fano 多様体 $X$ 上では定曲率条件として **Kähler-Einstein (KE) 条件** $\mathrm{Ric}(g)=g$ が最も自然な条件であり，KE 計量に向かって計量を時間発展させる方程式として，**Kähler-Ricci flow (KRF)** は特に有名である．KRF は現在に至るまで十分な研究が為されているが，$L$ が一般，あるいは $X$ が非コンパクトな場合はあまりよく知られていない．そこで，[研究業績 2] では，KRF を一般の偏極 $L$ に対して拡張する研究を行った．標準計量の存在問題を調べるための実験場として，適当な対称性を持った空間を調べることは基本的であり，**Calabi ansatz** と呼ばれる，定曲率空間上の射影空間束はその代表例である．Calabi ansatz 上では，直線束 $L$ 上の計量に回転不変性を課すことで，標準計量の方程式を ODE に帰着させることができる．結果として，Calabi ansatz $(X, L)$ がスカラー曲率一定 Kähler 計量を持つための必要十分条件を決定し，さらに，$L$ に関する適当な条件の下で，KRF の偏極一般化の指数関数的収束を証明した．次に，[研究業績 7] では，ある因子 $D(\subset X)$ に沿って錐特異性 (conical singularity) を保ちながら時間発展する KRF について考察した．これは，KRF の非コンパクト多様体 $X\backslash D$ への一般化とも思えるし，多様体と因子のペア $(X, D)$ を考察することは，代数幾何的に非常に重要である．結果として，時間大域解を（滑らかな）KRF の極限として構成することができた．そして，[研究業績 8] では，KRF とはまた別の幾何学的フローとして "**逆モンジュ・アンペールフロー**" ($MA^{-1}$-flow) を新たに導入し，その時間大域解の存在と収束性について調べた．$MA^{-1}$-flow を考えるモチベーションは，$X$ が KE 計量を許容しないとき，KRF とは全く異なった極限挙動を示すことにある（詳しくは後述の研究 (3) を参照）．

さて，部分多様体に対する基本的な問いの 1 つに，『カラビ・ヤウ曲面（Ricci 平坦な Kähler 曲面）$M$ 内のシンプレクティック曲面 $\Sigma$ が与えられたとき，正則曲線へイソトピー変形できるか？』という，Tian，Yau によって 1990 年代後半に提唱された有名な問題がある．カラビ・ヤウ曲面内の正則曲線は，物理学の超弦理論やミラー対称性の文脈で非常に重要な概念であり，多くの数学者・物理学者によって研究が為されてきた．[研究業績 9] では，この問題を $M$ の超ケーラー構造（とそれに付随するツイスター空間）の観点から見直した．我々は，任意の部分閉曲面 $\Sigma$ に対し，ツイスター空間の構造を用いて "**ツイスターエネルギー**" と呼ばれるエネルギーを新たに導

入し，結果として，十分小さいツイスターエネルギーを持つ曲面 $\Sigma$ は，平均曲率流に沿ってある正則曲線にイソトピー変形可能であることを示した．この結果は，正則曲線が平均曲率流に沿った変形で安定であること，そして，正則曲線を全く含まない $M$ に対しては，（ツイスターエネルギーが十分小さい $\Sigma$ をフローの初期値として取ることができないため）ツイスターエネルギーにギャップが生じることを表している（ツイスターエネルギーの間隙定理）．

## 研究 (2) 力学系の研究（[研究業績 1, 4, 5, 10]）

幾何学的量子化[*1]とは，Kähler 計量の空間 $\mathcal{H}_L$ を，$L$ の十分大きい冪 $L^k$ による $X$ の射影埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(L^k))^*$ を通して，$\mathbb{P}(H^0(L^k))^*$ 上の Fubini-Study 計量のなす空間 $\mathcal{H}_k$ で近似することである：

$$\mathcal{H}_L = \overline{\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{H}_k}.$$

上式は Bouche-Catlin-Tian-Zeldich によって証明された．また，閉包は $X$ 上の $C^\infty$-位相に関するものである．量子化によって，$\mathcal{H}_L$ 上の偏微分方程式の解は，$\mathcal{H}_k$ 上の代数的方程式の $k \to \infty$ としたときのある種の極限として捉えられる．幾何学的量子化は射影代数多様体に固有の力学系であり，Bergman 核の漸近展開とも密接に関係していることから，複素解析学の専門家の間でも活発に研究されている．

まず，[研究業績 1] では，KE 計量の量子化を構成した．また，放物型のアナロジーとして，KRF の幾何学的量子化の構成を [研究業績 5] で行った．これらの証明のアイデアは，変分原理を上手く活用することである．すなわち，KE 計量/KRF は $\mathcal{H}_L$ 上のエネルギー汎関数の臨界点/勾配流として特徴付けられるので，まずエネルギー汎関数を各 $\mathcal{H}_k$ 上に量子化し，その凸性や変分公式を調べる．特にエネルギー汎関数のヘッシアンは Berezin-Toepliz 作用素の漸近展開と深く関係しており，[研究業績 4] で幾つかの性質について調べた．一方で，[研究業績 10] では，Ricci 曲率作用素を用いた力学系を新たに導入し，coupled Kähler-Einstein 計量[*2]の構成を行った．

## 研究 (3) GIT 的安定性の研究（[研究業績 3, 6, 8]）

標準計量が存在するとき，計量の空間 $\mathcal{H}$ は "良い形" をしており，幾何学的フローの振る舞いは $\mathcal{H}$ の幾何学を特徴付ける．対して，GIT (Geometric Invariant Theory) 的安定性の研究では，境界 $\partial\mathcal{H}$ の構造を，より代数幾何的な手法を用いて記述することで，『$\partial\mathcal{H}$ 上の幾何学と $\mathcal{H}$ の幾何学に対応があるか』を調べる．より具体的には，"**テスト配位**" と呼ばれる，与えられた偏極多様体 $(X, L)$ のスキームへの退化の言葉を用いて GIT 安定性を定式化し，計量の存在条件との同値性を調べ，安定性を計算する手法を開発することが目標である．実際，[研究業績 6] では，[研究業績 1] で構成した量子化 KE 計量に対応する GIT 安定性を定式化し，Chow 安定性[*3]との関係について調べた．一方で，[研究業績 3] では，KE 計量のベクトル場付き一般化計量に対応する GIT 安定性を，射影埋め込みを通して外在的データ（斉次多項式など）を使って計算する手法を確立した．

一方で，『KE 計量を許容しない Fano 多様体をどのように研究するか』という問題についてはあまり多くのことは知られていない．この場合，Fano 多様体 $X$ を不安定化するテスト配位が少なくとも 1 つ存在するが，その中で最も悪く退化するという意味で最適なものを構成することには意味がある．[研究業績 8] では，$X$ がトーリックの場合に，$MA^{-1}$-flow の極限挙動を調べることにより境界 $\partial\mathcal{H}$ 上のあるエネルギー最小化問題の解として最適テスト配位の構成に成功し，特異ファイバーの具体的な代数構造まで解明した．特に最適テスト配位は $X$ から標準的に決まるので，その意味で標準計量の一般化とも思える．私の知る限りでは，このような現象は KRF からは得られず，したがって，$MA^{-1}$-flow と KRF の明確な差別化を与えている．

---

[*1] 近似パラメータ $1/k$ とは，量子力学で言うところの "プランク定数" に相当するもので，幾何学的量子化というネーミングもそこから来ている．

[*2] KE 計量の多体問題へのある種の一般化．近年，盛んに研究されている標準計量の 1 つである．

[*3] GIT 安定性の一種．