これからの研究計画

ネリ型平均場方程式の爆発解の性質ついて

私は今後、C. Neri によって導出された平均場方程式を研究対象とする。澤田・鈴木型モデルは渦度分布が決定論的に支配された乱流モデルであるのに対して、ネリ型モデルでは渦度分布が確率的に支配された乱流モデルである。ネリ型方程式は変分構造やスケール不変構造を備えており、澤田・鈴木型モデルと同様に爆発解析を用いた研究は自然であるが、爆発解析を用いた先行研究はあまり見られない。そこで今後の研究では爆発解析を定式化し、応用として爆発解の性質を研究する。特に私は爆発解の漸近非退化性についての研究を考えている。ここで爆発解の漸近非退化性とは爆発解周りでの線形化固有値問題を考えた時の線形化問題の解が自明なものに限るという性質である。具体的には、次の (a), (b) を今後の研究の目的とする.

今後の研究目的

(a) ネリ型平均場方程式の爆発解が示す漸近挙動の導出
(b) ネリ型平均場方程式の爆発解の漸近非退化漸近性の導出

(a) ネリ型平均場方程式の爆発解の爆発点近傍での挙動を示す評価式を導出する。評価式導出にあたっては、爆発解に対するスケーリングを行い、質量等式を成立させる必要がある。質量等式はスケーリング極限の前後のある関係式である。 質量等式の成立のためには、スケール極限方程式の全域解の分類やその可積分性を検討しなければならない。ネリ型方程式のスケーリングの方法は Marchis-Ricciardi' 17 で議論されており、Chen-Li' 91 タイプの全域解に帰着されることが予想される。このとき、さらにスケール極限後の全質量は 8π という値になり、この値はネリ型方程式の非線形項をラドン測度とみなした時の汎弱極限である爆発点に集中するデルタ測度の質量と一致することもわかっている。これらの関係から質量等式を厳密に導出することが期待できる。従って、先述した Marchis-Ricciardi' 17 で展開された議論を参考にし、本研究での質量等式の証明を明らかにする。質量等式が得られれば、従来の方法で爆発解の挙動を示す評価式を得ることができる。しかし、本研究では澤田・鈴木型で得た評価式よりもよりシャープな結果を期待する。よりシャープな漸近挙動の評価式を得るためには、スケール変換後の質量の 8π への収束の精密性が必要である。指数型楕円型方程式の極限質量への収束の精密性を扱った C. S. Lin' 07 の原著論文を参考にし、本研究での精密性の議論を明らかにする。

(b) ネリ型平均場方程式の爆発解の漸近挙動の応用として、爆発解の漸近非退化性を証明する。この性質はネリ型方程式の爆発解周りでの線形化固有値問題を考えた時の線形化問題の解が自明なものに限るということを述べている。

楕円型方程式の解の漸近非退化性に関する研究は Gladial-Grossi' 04 で行われている。そこではゲルファント問題とよばれる指数型の非線形項を持つ方程式を扱っている。証明方法は背理法で、正規化された非自明な線形化固有値問題の解が存在すると仮定して矛盾を導く。この非自明な線形化問題の解に対してスケール極限を取ると、その全域解は陽に書き表すことができる。実際、この解は 3 つの関数の線形結合で表現される (c.f. Baraket-Pacard' 98)。結果的には、爆発挙動の評価式等を応用することで、線形結合の係数がすべて 0 になることがわかり、矛盾が得られる。この一連の議論をネリ型方程式の爆発解の漸近非退化性の問題に適用できないか検討していきたいと考えている。また近年、平均場方程式の漸近非退化性の研究として、Bartolucci-Jevnikar-Lee-Yang' 18 が知られている。当文献では確率測度を有する方程式を扱っているわけではないが、今後の研究において非常に有用になるものと思われる。