これまでの研究成果

私はこれまで非線形楕円型方程式に対して爆発解析と呼ばれる手法を用いて解の定性的性質に関する研究を行ってきた。主に以下の 2 つの問題に取り組んできた。

1. 非斉次係数関数をもつ非線形楕円型方程式の解の先験的評価について

私は、非斉次係数関数をもつある半線形楕円型方程式の解の定性的性質に関する研究を行った。私が対象とした方程式は熱の伝導や細胞粘菌の運動などの非線形現象の平衡状態を表す方程式であり、これまで多くの研究が行われてきた。特に問題となるのが方程式の解の存在性であり、このことは解の先験的評価が成立するか否かに帰着される。ここで解の先験的評価とは、方程式を満たす解が存在するならば、その解が満たすべき不等式のことである。Gidas-Spruck 氏らの先行研究では、非線形項の係数関数が真に正の場合に、解の先験的評価が導出されているが、係数関数の零点が存在する場合には特殊な状況でしか考えられていない。そこで私は係数関数が零点を含む場合の解の先験的評価の研究を行った。

本研究の問題は係数関数の零点近傍での挙動に起因する。なぜならば係数関数が真に正の場合では方程式の持つある特有の構造を駆使して先験的評価が得られているのに対して、零点を含む場合ではその零点近傍での係数関数の挙動により既存の方法が適用できないためである。そこで私は方程式のスケール不変性を応用することでこの困難を克服した。私は、零点近傍での係数関数の挙動に依存するような変換を新たに導入することで、本研究の目的である解の先験的評価に成功した。

また解の先験的評価以外にも、本研究を通して得られた新たな結果として、リューヴィル型の定理が挙げられる。この定理は、ある楕円型方程式の全空間解の性質を述べたもので、先験的評価の証明においても重要な役割を果たした。実際、先ほど述べた新たな変換を対象とする方程式に適用することで、元の方程式は全空間の問題へと帰着されリューヴィル型の定理の適用範囲となる。この定理は全空解の空間的対称性を証明する際に有力な動的平面法と呼ばれる方法を駆使して導出できた。

2. 確率測度をもつ平均場方程式の爆発解のに対する漸近挙動について

私は、確率測度を伴う平均場方程式の解の性質に関する研究を行った。平均場方程式は数学的には指数型の非線形項を持つ空間 2 次元の半線形楕円型方程式のことで、木星の表面上に見られる大赤斑に代表される乱流現象の数理モデルとしての役割を担っている。実際、平均場方程式は 2 次元の渦度場方程式の定常状態と密接な関係がある方程式で、オンサーガーによって確立された平衡統計力学的方法を用いて導出されている。私は特に澤田・鈴木氏らによって導出された平均場方程式を対象として研究を行った。澤田・鈴木モデルと先行研究である Caglioti-Lions-Marchioro-Pulvirenti モデルとの違いは導出過程における渦度の強度分布に関する仮定にある。この違いは方程式の非線形項に現れ、澤田・鈴木モデルでは確率測度を含む非線形項となる。

一般に、平均場方程式は変分構造を持つことが知られており、多くの研究が行われてきた。変分構造とは方程式に対応するエネルギー汎関数が存在して、汎関数の臨界点が方程式の解に対応するという構造である。また汎関数の臨界点を考察する上で重要となるのが最小化達成関数 (ミニマイザー) の性質である。本論文ではこの澤田・鈴木モデルの平均場方程式に対応するエネルギー汎関数のミニマイザーに焦点をあて、その性質を研究した。特に私はミニマイザーの族を考え、それらが非一様有界な挙動をする際の漸近挙動を研究した。この非一様有界な挙動は concentration と呼ばれ、ある意味での臨界状況では解 (ミニマイザー) が存在しない状況を表している。このような非一様有界な解の族のことを爆発解と呼ぶ。爆発解に対して方程式の持つスケール不変性を利用した爆発解析という手法とポテンシャル論を組み合わせることで、非一様有界な解の漸近挙動の導出に成功した。