今後の研究計画

綾野孝則

本研究では、代数的性質を持つ sigma 関数に基づき、種数の高い代数曲線の Abel 関数論を構築することで、可積分系、関数論、数論などの分野に貢献することを目標に研究を行います。具体的には以下の課題を研究します。

課題 1．一般の超楕円曲線に対して、KdV 階層を変形した可積分方程式を導出します。

V. Buchstaber, V. Enolski、D. Leykin は、種数 g の超楕円曲線の g 次の対称積と Jacobi 多様体の間の Abel-Jacobi 写像を用いて、超楕円 sigma 関数の対数微分で定義される Abel 関数 ($\wp$ 関数の一般化) が KdV 階層を満たすことを示しました。私は、2019 年 4 月に出版された論文において、この手法を種数 3 の超楕円曲線の 2 次の対称積について考えることで、KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した可積分方程式を導出しました (Buchstaber 氏との共同研究)。今後は、この結果を一般の種数 g の超楕円曲線の $k(<g)$ 次の対称積に拡張します。種数 g の超楕円曲線の k 次の対称積の Abel-Jacobi 写像による像として得られる Jacobi 多様体の部分多様体を $W(g,k)$ とします。種数 g の超楕円曲線の k 次の対称積上の有理関数体と、$W(g,k)$ 上の有理型関数体が Abel-Jacobi 写像の引き戻しで同型になることを示し、その対応を種数 g の超楕円 sigma 関数で記述します 。この対応を用いて、$W(g,k)$ 上の基本的な有理型関数の間の関係式を代数的な計算から求めます。この結果を応用して、$W(g,k)$ 上の有理型関数で解が書ける、KdV 階層を変形した新しい可積分方程式を導出します。

課題 2．一般の超楕円積分の逆問題の解の級数展開と退化極限を求めます。

種数 g の超楕円曲線上の正則微分形式の線積分を種数 g の超楕円積分といいます。超楕円積分の値から積分路の端点の座標を表示する問題を超楕円積分の逆問題といいます。私は、2019 年 7 月に出版された論文において、種数 2 の超楕円積分の逆問題の解とその退化について考察しました (Buchstaber 氏との共同研究)。今後はこの結果を一般の超楕円曲線に拡張します。まず、一般の超楕円積分の逆問題の解を超楕円 sigma 関数を用いて記述します。そして逆問題の解の満たす微分方程式を導出し、解の級数展開の係数の漸化式を導きます。曲線のパラメータの連続的な変形により曲線を退化させたとき、逆問題の解の退化極限がどのような関数になるかを具体的に調べます。

課題 3．telescopic 曲線の sigma 関数の級数展開の Hurwitz 整性を示します。

telescopic 曲線の sigma 関数の原点における展開係数は曲線の定義方程式の係数の有理数係数の多項式になります。一方、大西良博氏は、(n,s) 曲線の sigma 関数の原点における展開係数が曲線の定義方程式の係数上 Hurwitz 整になるという、より精密な性質を示しています。これにより、sigma 関数の級数展開を複素数上だけでなく、p 進数や他の環上で考えることができるようになり、*p-adic sigma function* など数論に応用する際に基本的な道具になります。大西氏は (n,s) 曲線の sigma 関数の KP 階層の tau 関数による表示を用いて Hurwitz 整性を示しています。sigma 関数の tau 関数による表示は一般の telescopic 曲線に対して完成しているので、本研究ではその表示を用いて、telescopic 曲線の sigma 関数の原点における展開係数が曲線の定義方程式の係数上 Hurwitz 整になることを示します。