これまでの研究成果

綾野孝則

楕円 sigma 関数の特徴は楕円曲線の定義方程式と直接結びついた代数的性質です。この性質から、代数的な計算が可能になり、楕円 sigma 関数の対数微分で定義される Weierstrass の $\wp$ 関数の間の明示的な関係式を導くことができます。F. Klein は、超楕円曲線に付随する多変数 sigma 関数を構成しました。H. Baker により、多変数 sigma 関数およびそれに付随する Abel 関数 (多変数の多重周期有理型関数) の理論は大きく発展しました。特に、種数が 2 と 3 の超楕円曲線に対して、sigma 関数の高階の対数微分で定義される Abel 関数が 2 階と 3 階の対数微分で定義される Abel 関数の多項式として具体的に表示されました。これらの微分多項式は KdV 方程式や KP 方程式を含む数理物理の基本的な方程式になっています。さらに近年になって、V. Buchstaber, V. Enolski, D. Leykin らの研究により sigma 関数の理論は急速に発展し、可積分系などへの多くの応用が見出されました。超楕円 sigma 関数は、超楕円曲線を含む非常に大きな代数曲線の族である (n, s) 曲線と呼ばれる平面曲線に拡張されました。本研究では、sigma 関数、Abel 関数の性質を明らかにし、それを可積分系、関数論、数論などの分野に応用することを目標に研究を行ってきました。以下のような結果を得ました。

1. 三浦晋示氏により構築された、任意の代数曲線に対する標準的な定義方程式を与える理論を用いて、(n, s) 曲線を含む telescopic 曲線と呼ばれる一般的な曲線の族まで sigma 関数を一般化しました (論文リスト 1-5)。さらに、Abel 関数論において有名な Jacobi の逆問題の公式を telescopic 曲線にまで一般化しました (論文リスト 1-4)。また、telescopic 曲線の sigma 関数の可積分系の tau 関数による表示を与え、sigma 関数の加法公式を導出しました (中屋敷氏との共同研究、論文リスト 1-6)。

2. 種数 3 の超楕円曲線の sigma 関数の零点の定める因子 (sigma 因子) 上の有理型関数体を具体的に構成しました。Abel-Jacobi 写像により記述される、種数 3 の超楕円曲線の 2 次の対称積上の有理関数と種数 3 の超楕円曲線の sigma 因子上の有理型関数の対応を具体的に記述し、Buchstaber, Mikhailov により導入された新しい力学系の解を構成しました (Buchstaber 氏との共同研究、論文リスト 1-3)。

3. 上述の力学系を用いて、KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した可積分方程式を導出し、その解を種数 3 の超楕円曲線の sigma 因子上の有理型関数で構成しました (Buchstaber 氏との共同研究、論文リスト 1-2)。この結果により、Buchstaber, Mikhailov の力学系と数理物理の基礎方程式との間の関係が明らかになりました。

4. 種数 2 の超楕円曲線上の正則微分形式の線積分 (超楕円積分) の逆問題の解を考察し、その級数展開の係数に関する漸化式を導出しました。また、種数 2 の超楕円曲線を楕円曲線に退化させたとき、種数 2 の超楕円積分の逆問題の解は楕円積分の逆問題の解 ($\wp$ 関数) と一致することを示しました (Buchstaber 氏との共同研究、論文リスト 1-1)。これにより、曲線の退化とそれに伴う sigma 関数や Abel 関数の退化に関する新たな関係が明らかになりました。