

今後の研究計画 (2020年4月～)

2020年2月29日
古谷賢朗

楕円型作用素の大域的な研究は多様体論と解析学に多くの深い知見をもたらした。今後の研究では、楕円型を含み主に劣楕円型作用素の大域的現象の研究を行う予定である。Laplace-Beltrami 作用素や Dirac 作用素がそれぞれ多様体の幾何構造に自然に付随する 2 階楕円型作用素、1 階楕円型作用素であるのに対して、ここでは多様体の sub-Riemann 構造とそれに付随する 2 階劣楕円型微分作用素が研究の中心である。この幾何構造 (= sub-Riemann 構造) は接束に bracket generating な部分束の存在を意味し、その対極の構造である葉層構造については古くから研究されている。一方その性質からして制御理論に関連する研究は多くあるが、多様体論と密接に関連した幾何学的解析学的な研究がこれまで未開拓であることも研究するに意義があると考えている。接触多様体やベキ零 Lie 群はその構造を持つ多様体の代表例であり、Riemannian submersion の全空間はその両方の構造を持つ場合がしばしばあり研究対象は豊富である。又葉層構造の場合は、横断的楕円型作用素の概念は定義出来るが、解析的側面から見ると構造を直接反映した微分作用素は存在しない。しかしながら、sub-Riemann 多様体上には構造の性質を反映した 2 階劣楕円型微分作用素 (= sub-Laplacian) が内在し、Riemann の場合の Laplacian との対比においても研究するに値する十分な意味を持つ。更にこの作用素は Hörmander による sub-elliptic estimate (劣楕円型性) を満たすので、スペクトルの基本構造は楕円型と同じであるが、特性多様体が存在することより従来の K-理論の枠組みでは扱えない。このことは新たな現象の可能性や研究の困難さもあり得るが、古典的によく知られた多様体が非自明なこの構造を持つかの研究も含め、解析的には Laplacian の持つ性質の類似の研究 (例えば、Weyl law の証明や熱核構成等) を行うことにより、その困難さの中に楕円型作用素には見られない性質の更なる探究を行う。その間外国からも共同研究者を数名日本に招聘、又は自身が訪問滞在 (ドイツ、ノルウェ、デンマーク) し従来からの共同研究を更に進める予定である。

より具体的には今後数年間は以下の研究を予定している:

(a) ベキ零 Lie 群は良い (= equi-regular) sub-Riemann 構造を持つ多様体の典型例である。その中で Clifford 代数に付随するベキ零 Lie 環 (= pseudo H-type Lie 環) の基本的な性質の研究を行ってきた。更にそれらを踏まえ、先ず integral lattice の分類を完成する。又この compact nilmanifolds の Laplacian、sub-Laplacian の spectral zeta 関数両者の比較を通じて zeta-determinant の具体的に決定や、関数等式の存在の可能性を調べる。sub-Laplacian の spectral zeta 関数の留数は Riemann zeta 関数の整数点の値が関連するが、inverse spectral problem の視点からの研究も行う。

(b) 古典的に重要な役割を果し、特に Fourier 積分作用素の理論の発展にも大きく寄与した Weyl law を sub-Laplacian の場合に一般的に取り扱うのは困難であることは、Laplacian の場合の証明の中に見出せる。そこで一般のベキ零多様体に対しては具体的な Data を元に漸近式を得ることを目指すが、先ず前項 (a) の多様体 pseudo H-type nilmanifold に対してどの様なものになるか検証してみる。これに関する先駆的業績はこの時点では、R. S. Strichartz, *Spectral Asymptotics on Compact Heisenberg Manifolds* J. Geom. Anal. (2016) 26, 2450–2458 だけである。

(c) A. Weinstein の Eigenvalue Theorem の sub-Laplacian version が成り立つはずであると予想しているが完全な証明を得るとともに、Maslov 量子化条件を満たす様々な Lagrangian submanifold の構成を行う。より具体的には、sub-Laplacian の陪特性流が完全積分可能でないときを主に扱い、トーラス以外のいろいろな Lagrangian submanifold を見つけることを目標にする。そのために submersion、fiber bundle、principal bundle のもとの Lagrangian submanifold の functorial property を論じ、Lagrangian submanifold の新しい構成を行う。

(d) 余接束、或いはそれから zero section を除いたところの Calabi-Yau 構造の構成と、幾何学的量子化作用素の構成。この問題は前項の問題と密接に関係するが、Maslov 量子化条件の中で、陪特性流不変測度の存在を保障してくれる性質でもあり多様体は限定されているが、具体的な構成には少し工夫が要求されているので、それを解決する。

(e) 高次 Grushin 作用素の熱核の研究。Engel 群は 4 次元 3 step のベキ零 Lie 群であるが、この場合でさえ 3 step なので具体的なスペクトルは決定出来ないが、complex Hamilton-Jacobi 法による作用関数 (Jacobi の楕円関数で表される) は 2 変数の場合は以前に得ている。この結果を踏まえ楕円関数の様々な性質をもとに何らかの形での熱核の表示を目指す。

(f) Lie 群は不変 sub-Riemann 構造を持っているが、特に compact 対称空間がいつも sub-Riemann 構造を持つかは不明である。本研究では対称空間に対して Lie 環構造を通じて構成可能な sub-Riemann 構造の存在を個別に調べ、出来れば分類も試みる。