これまでの研究

橋爪惠

３次元空間内に埋め込まれた１次元閉多様体(円周またはいくつかの円周の和)を**絡み目**と呼ぶ．特に 1 成分からなる絡み目を**結び目**と呼ぶ．結び目・絡み目の研究においては，それらを平面（や更に一般に曲面）に射影した図形（球面上に射影したものは**球面曲線**）や射影図の交差点の上下の情報も持つ**ダイアグラム**と呼ばれる図形を通して研究することが，基本的な手法である．球面曲線やダイアグラムが与えられた時，それを局所変形する操作は結び目・絡み目の構造を研究する手法の一つである．

問題：任意の結び目のダイアグラムに対し，局所変形を用いて移り合う同値関係の同値類を特徴付けよ．

この問題に対し，伊藤(東京大)−瀧村(学習院中等科)[IT], 伊藤−瀧村−谷山(早稲田大)[ITT]は**球面曲線のライデマイスター移動**と呼ばれる局所変形に関してこの問題にコードダイアグラムという球面曲線から考えられるある種の写像の幾何学表現を用いて同値類のいくつかの特徴付けを与えた．

2014 年, 岸本健吾(大阪工大)らによって**領域交差交換**と呼ばれるダイアグラムの局所変形が導入された. 清水理佳氏(群馬高専)[S]は領域交差交換が結び目のダイアグラムの任意の交差の集合を交差交換すると示した．そして，領域交差交換を基にしたスウィッチングシステムが河内（大阪市立大）−岸本−清水によって提案された(特許:2015 大阪市立大). これを基にしたゲーム「Region Select」が考案されている．また，領域交差交換の亜種として**領域凍結交差交換**と呼ばれる局所変形が井上−清水(共に愛知教育大)[IS]によって考案された．領域交差交換が任意の結び目ダイアグラムに対しては任意の交差での交差交換を実現することに対して，ある種の結び目のダイアグラムのある種の交差に関してはそこだけを交差交換することができない[IS]という違いがある．

ケルト文化のシンボルとして古くから伝わる模様で，Celtic Knot と呼ばれる模様がある．Fisher-Mellor[FM]はこの模様を数学的に扱えるように *Celtic Knot Design* として定義した．

上記の背景に対して次のような問題を考え，解決した．
問題 1: 複体：任意の球面曲線に対して，何回かの R−Ⅰ同値関係とする同値類を 0−単体とし，1 回の weak R−Ⅲで移り合うとき 0−単体間に 1−単体を対応させる．
この複体の構造が分からない．
問題 2:問題１の複体の辺に対する拡張を考えその形を考える．
問題 3:二つの球面曲線が RI, RIII で移り合う，必要十分条件
問題 4:Region Select において，最も難しい問題はどのようなものか.
問題 5: 絡み目のダイアグラムにおける領域交差交換と領域凍結交差交換の振る舞いの違いの相対的な理解.
問題 6:結び目ダイアグラムに対しては領域交差交換で任意の交差交換を実現することが示されている[S]が，絡み目のダイアグラムに対してはそうでないことが知られている．この違いに関して体系的な理解がなされていない.
問題 7: Fisher-Mellor が定義した Celtic Knot Design の一般的な定義を見いだす. その Celtic Knot Design を調べる．

問題 1 に対する解決 (2017 年):問題１の複体を 7 交点以下の球面曲線に対して構成・決定した[FHIKM].
問題 2 に対する解決 (2018 年)：新たな変形を２つ与えることで，幾何学的な解決を与えた[HI]
問題 3 に対する解決 (2018 年)：複体の２頂点の距離を結び目の不変量を用いて評価した.
問題 4 に対する解決 (2017 年):難易度にある定義を与え，これに基づく Region Select の最も難しい問題をダイアグラムからえられる性質のみで示した[H4].
問題 6 に対する解決 (2016 年): Cheng-Gao によって隣接行列と呼ばれる概念が領域交差交換の研究に持ち込まれた. 申請者はこれを基に領域交差交換から誘導される線形写像を定義[H1]し，更に領域凍結交差交換から誘導される線形写像も考え，線形代数の言葉で領域交差交換，領域凍結交差交換の違いを表した[H3].
問題 5 に対する解決 (2015 年)：ダイアグラム D に対してその射影図(球面曲線)を G と書き，これを 4 価の平面グラフとみなす．G と同じ射影図を持つ全ダイアグラムの集合 $K(G)$を考える. このとき D の領域 R の境界上の交差に対応する G の頂点の集合を$\{c_1,\ldots,c_m\}$とする．領域交差交換は交差の上下の情報を変えるがその射影を変えない．このことに注意すると$K(G)$の任意の元D'に対してD'での R に対応する領域での領域交差交換で情報がかえられる交差はちょうど$\{c_1,\ldots,c_m\}$に対応する. <u>この観点で見ると，領域交差交換というのは G を 4 価のグラフと見なして G の面集合の冪集合から G の頂点集合の冪集合への写像（ϕ と書くことにする）と考えられる</u>. ところで G の面集合の冪集合(G の頂点集合の冪集合)は G の各面（各頂点）を基底とする $\mathbb{Z}_2$線形空間と見なすことができるが上記の写像 ϕ はこの線形空間の間の線形写像になっていることが解る（[H1]）.
問題 7 に対する解決 (2019 年)：一般の曲面を多角形で分割して得られる図形から誘導されるより一般的な Celtic Knot Design を再定義し，特に正方形，六角形から誘導される Celtic Knot Design についての成分数についての結果を得た.
結果 1:線形写像 ϕ の核の基底のきれいな表示を見いだした[H1].
結果 2: ϕ の像の幾何的に意味のある生成系を見つけた[H2].
結果 3:この ϕ の余核の表示について考察した．特に，与えられた射影図から誘導されるグラフを定義し，そこからこの線形写像の余核の代表元を与える方法を見いだした[H2]．これによって同じ射影図を持つダイアグラム全体のなす集合に領域交差交換によって移り合うという同値関係を与えたときこの同値類の代表元を与えることができる.

[FHIKM]Y. Funakoshi, M. Hashizume, N. Ito, T. Kobayashi, H. Murai, A distance on the equivalence classes of spherical curves generated by deformations of type Ⅰ, J. Knot Theory Ramifications, Vol.27, No. 12,1850066, 2018.
[H1]M. Hashizume, On the homomorphism induced by region crossing change, JP. Jour. of Geom. and Top. Vol 14, Num 1, 2013, p29-37
[H2]M. Hashizume, On the image and cokernel of homomorphism induced by region crossing change, JP. Jour. of Geom. and Top. Vol 18, Num 2, 2015, p133-162
[H3] On region freeze crossing change on link diagram, preprint
[H4]On a game “Region Select” induced from region crossing change, 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications
[HI]M. Hashizume, N. Ito, New deformations on spherical curves and ¥"{O}sulund conjecture, preprint.
[IS]A.Inoue, R.Shimuzu, A subspeace region crossing change, region freeze crossing change, JKTR. **25**, 1650075 (2016)
[IT] N. Ito and Y. Takimura, On a nontrivial knot projection under (1, 3) homotopy, Toplogy Appl. 210 (2016), 22--28.
[ITT] N. Ito, Y. Takimura, and K. Taniyama, Strong and weak (1, 3) homotopies on knot projections, Osaka J. Math. 52 (2015), 617--646.
[S] A. Shimizu, Region crossing change is unknotting operation, Jour. of the Math. Soc. of Japan **66**(3) (2014) 693-708.