研究成果

(1) L^p-Lyapunov 不等式に関連する問題

L^p-Lyapunov 不等式は線形の楕円型方程式における可解性の必要条件である。この問題は Sobolev 埋め込みと非常に深く関連しており、線形の問題にも関わらず、非線形の問題と非常に強い関係性を持っている。Neumann 境界条件の問題において、現在まで臨界と呼ばれる部分が未解決のまま残っていたが、対応する Sobolev 埋め込みの最良定数に関する最小化関数の存在を証明することにより、部分的にではあるが解決することができた。関連する問題として、非線形 Neumann 型と呼ばれる境界条件に関する同様の問題も考察し、高橋太氏（大阪市立大学）との共同研究により、非線形 Neumann 境界条件型 L^p-Lyapunov 不等式も導出することに成功した。

(2) Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題

Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題に関して、Neumann 型と呼ばれる境界条件を課さない Sobolev 空間における問題を研究した。Sobolev 空間から重み付き Lebesgue 空間への埋め込みを考察するこの問題では、重み関数の特異点が領域の境界にあり、かつその点での平均曲率が正の場合に最小化関数は存在する、という結果のみが先行研究としてあった。特異点が領域の内部にある場合、または境界にあり、その平均曲率が非正の場合は未解決であった。この未解決の部分の問題を研究し、これらの問題に関しては、特異点の位置、平均曲率の他に、領域のスケールが最小化関数の存在・非存在に影響を与えていることを示した。具体的に、4 次元以上で、スケールに関するパラメータを導入し、そのパラメータがある閾値よりも小さいと最小化関数は存在し、超えると最小化関数は存在しない、という結果である。この最小化関数の存在・非存在の結果、特に非存在の結果は先行研究では見ることができなかった現象であり、原点の位置、平均曲率、加えて領域のスケールが最小化問題の達成可能性の本質であることを示した。この結果を踏まえて、関連する非線形楕円型方程式の可解性、解の性質に関する研究を、国立台湾大学の C.-H. Hsia 氏、G. Hwang 氏と共に行った。

(3) 変数指数型 Lebesgue 空間への Sobolev 埋め込みのコンパクト性に関する問題

Sobolev 埋め込みのコンパクト性の問題に関して、変数指数 Lebesgue 空間への埋め込みに関する研究を佐野めぐみ氏（広島大学）と行った。埋め込みの非コンパクト性の要因は有界列の “集中現象” の他に、全空間では “消失現象” と呼ばれるものも 1 つの要因となる。Lebesgue 空間における可積分指数を変数指数にし、その変数指数の挙動と埋め込みのコンパクト性との関係を調べると、臨界指数への漸近の仕方が $\log|x|$ を境に埋め込みのコンパクト性の成否が分かれるという結果を得た。この結果を用いて、無限遠方で線形の挙動をする非線形項を持つ楕円型方程式の可解性に関する結果も得た。

(4) Trudinger-Moser 不等式に関連する変分問題

直近の研究として、Trudinger-Moser 不等式に関する変分問題の研究を行った。近年、Trudinger-Moser 型汎関数は低階の摂動項を暗に含むということが明らかになり、変分問題に関して、この摂動項の影響により最大化関数が存在するということも明らかになった。しかしながら、実際に摂動項を取り除いた汎関数を考えた場合に最大化関数が非存在となるか否か、という研究は行われていなかった。この問題に関して、本研究により実際に最大化関数が非存在となる、つまり、摂動項が最大化関数の存在・非存在と本質的に関係がある、ということを示した。さらに、摂動項は Taylor 展開から導かれる項の他に、増大度に関連する項も影響がある、ということも明らかにした。