これからの研究の方針

いくつかの記号についてはこれまでの研究の概要を参照のこと.

1. **de la Vallée Poussin 平均について**: 現在のところ, 評価

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f). \tag{A}$$

i が精密なものであるか否かは不明である. 証明の手法次第で T の次数をより下げられる可能性がある. さらに Erdős 型重みに付いた増大度の条件 $T(a_n) \leq c\,(n/a_n)^{2/3}$ も何らかの形で弱められる可能性も考慮したい.. また, これまでに de la Vallée Poussin 平均の微分の L^p 有界性を以下の形で示している: w は $\mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^4+)$ とする. $T^{(2j+1)/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ のとき $2 \leq p \leq \infty$ について

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j \|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{B}$$

$1 \leq p \leq 2$ について

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j a_n^{(2-p)/2p}\|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

が任意の $1 \leq j \leq k$ 及び $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ. de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性を証明する際に L^1 の双対定理と Riesz-Thorin の補間定理を用いたが, 微分の場合は T の非有界性のために L^1 ノルムの双対定理を利用できない.. 現在は (B) が $1 \leq p \leq 2$ の場合に成立するかは不明である. T の非有界性による評価の困難を解消する新たな方法を見付けることが解決の糸口となるだろう.

2. **Lagrange の補間多項式**: $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f について Lagrange の補間多項式 $L_n(f)(t)$ が重み w_ρ に関して f に収束する, 即ち

$$\lim_{n\to\infty} \|(L_n(f) - f)w_\rho\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{C}$$

が $1 < p < \infty$ で成立する条件を求める. L^2 ノルムの場合は既に示した. 一方で $1 < p < 2$ および $2 < p < \infty$ の場合の (C) の類似物が知られているが, 条件はきわめて煩雑で精密な評価ではなく, とくに p について連続であることが見えてこない. 解決の道筋として $1 < \lambda < \infty$ に対し (x, p) の 2 変数関数 $g_p(x)$ で $g_p(x) = 1$ $(1 < p \leq \lambda,\ x \in \mathbb{R})$, $\lim_{p\to\lambda+0} g_p(x) = 1$ 及び任意の $1 < p < \infty$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \|(L_n[F] - F)g_p w_\rho\|_{L_p(\mathbb{R})} = 0$$

を満たすものを求め, その $g_p(x)$ が存在する条件を示すことがひとつの方針である.

3. **Laguerre 型の重みついて**: 上記の研究の応用として $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ の場合についての研究がある.. これは Laguerre 多項式の理論とも関連の深い応用上重要な分野の一つである. 実際, 重み w_ρ は Laguerre の重み xe^{-x} のアナロジーである. まずは $\mathbb{R}^+$ 上に $\mathbb{R}$ における $\mathcal{F}(C^2+)$ に対応する重みのクラスを $\mathcal{F}(C^2+)$ の対称性から定義し, その重みについての直交多項式, MRS 数や関数 T に対応するものの性質を調べあげた上で そこから近似の理論に発展させることを最終目標とする.