(2) これまでの研究成果のまとめ 真瀬 真樹子

申請者は $\mathbb{C}^3$ の超曲面孤立特異点と関連した $K3$ 曲面族の間の多面体の双対性と Picard 格子の双対性について研究を行ってきた.

Arnold により見出された, ユニモダル特異点の間の奇妙な双対性は, Pinkham により $K3$ 曲面の格子の双対性としての解釈が与えられた. Ebeling と高橋により可逆多項式の間に拡張された, 特異点の間の奇妙な双対性は当研究の一つの動機である.

この研究では, バイモダル特異点の間の奇妙な双対性を考察している. これらの特異点は, 可逆な重み付き同次多項式で定義され, 更に, その多項式の射影化は, 米村により分類された, 単純 $K3$ 特異点を定める重み系を持つ, 重み付き射影空間の反標準切断であることがわかっている. これらをふまえ, 射影化がまた可逆であるならば, $K3$ 曲面族は多面体の双対性を持つことと, その一部は更に Picard 格子に関する双対性も有することがわかってきた.

投稿中である次の 3 つの論文は, Wolfgang Ebeling 教授からの問に対して回答を与えるものである.

(a) **Polytope duality for families of $K3$ surfaces associated to Q_{16} and S_{16}.**

この論文では, 特異点の定義式の射影化が可逆でないために今まで除外されていたバイモダル特異点 Q_{16} と S_{16} について研究している.

特異点 Q_{16} または S_{16} の定義多項式を f とする. Ebeling と Ploog の研究により, 零点集合 $(f=0)$ は自分自身と奇妙な双対性であり, その射影化 F としては可逆な多項式を取ることができない. 今までの, 真瀬と植田, 真瀬の研究で扱ってきたような, 可逆な射影化を持つバイモダル特異点の奇妙な双対性のペアに対する問題をこれらのペアに対して問うことはできない. しかし, 多項式 F が重み a を持つ重み付き射影空間 $\mathbb{P}_a$ の反標準因子であったときに, F の Newton 多面体を $\mathbb{P}_a$ を定める多面体の部分多面体として捉えることができる. ここで, F の Newton 多面体を Δ_F, $\mathbb{P}_a$ を定める多面体を Δ_a と記す. 本研究では, Δ_a の反射的部分多面体 Δ であり, Δ_F を部分多面体として含み, 更に, 極多面体 Δ^* が多面体 Δ に同型であるような多面体 Δ の存在の有無を考察した.

研究の結果, いずれのペアに対しても, 以上の条件を持つ多面体は存在しないことが明らかになった.

(b) **Polytope duality for families of $K3$ surfaces and coupling.**

Ebeling により定義されたカップリングの概念は, 魔方陣を用いた重み系の間の双対性である. 加えて, カップリングである重み系に対して, $\mathbb{C}^3$ の特異点を定義する重み付き同次多項式が, 奇妙な双対性を持つものが存在する. そのような同次多項式は, 単純 $K3$ 特異点を定める重み系を持つ重み付き射影空間の反標準因子として射影化される.

このようにして構成される奇妙な双対性のペアである $\mathbb{C}^3$ の特異点の定義方程式を f, f' とする. 重みを a, b とする重み付き射影空間 $\mathbb{P}_a, \mathbb{P}_b$ の反標準切断として可逆な多項式 F, F' を f, f' それぞれの射影化とする. このとき, 本研究では, 多面体の間の包含関係 $\Delta_F \subset \Delta \subset \Delta_a$, $\Delta_{F'} \subset \Delta' \subset \Delta_b$ と, 極多面体に関する関係 $\Delta^* \simeq \Delta$ をみたす反射的多面体 Δ, Δ' のペアが存在するかどうかを考察した.

これにより, ほとんど全ての奇妙な双対性のペアに対して, 上の条件をみたす多面体のペアが存在することがわかった.

(c) **Lattice duality for coupling pairs admitting polytope duality with $L_0(\Delta)=0$.**

研究論文 (b) で得られた多面体の双対性のペアのうち, トーリック寄与 $L_0(\Delta)$ が自明であるものを考える. このような場合には, 得られた多面体 Δ から定まる囲繞空間は高々, 単体的特異点のみを持ち, 構成される $K3$ 曲面族の Picard 格子は, 囲繞空間の Picard 群の単なる制限となる. この研究では, これらの多面体の双対性は格子の双対性に拡張されることを予想した.

研究結果, 考えている全てのペアについて予想が正しいことが結論付けられ, 更に, 族の Picard 格子を具体的に書き下すこともできた.