これまでの研究成果

永田 義一

これまで私は多変数複素解析を研究してきた．具体的には

(1): 非有界等質領域の正則自己同型群の決定
(2): 正則自己同型群を用いた等質領域の特徴付け
(3): ココンパクトな離散部分群の (非) 存在定理
(4): 正則自己同型群の Lie 群構造の存在定理
(5): L^2 評価を用いた正則関数の拡張定理
(6): 多重ゼータ関数の解析

がある. 特に, 複素ユークリッド空間内の領域の正則自己同型群に関して成果を上げており，今後の研究計画にもかかわるので, その点について述べる．正則自己同型群とは, 複素多様体 M に対して, M の自己双正則写像全体の集合のことで $\mathrm{Aut}(M)$ と書く．これは複素多様体の正則変換で群として不変なもので, 複素幾何学で重要な概念の一つである．正則自己同型群は自然に位相群になる．また, 例えば, 有界領域の正則自己同型群は Lie 群になる．しかし, 一般には Lie 群ではなく, 正則自己同型群がいつ Lie 群構造をもつかは非自明な問題である．((4) の研究). 具体的に M が与えられたときに $\mathrm{Aut}(M)$ の構造を決定することは興味ある問題であり, 特に M が等質空間の時は非常に重要である．有界領域の場合は正則自己同型群の Lie 環と領域の対応を示す理論があるが, 非有界領域の場合にはそのような一般論は無い．何かしらの関連を見つけるため, 正則自己同型群の構造を非有界領域の場合も理解しようとしてきた ((1) の研究). 幾何学で理論の重要なモデルとなるのは等質空間とその商空間であり, 複素多様体の場合には正則自己同型群の研究は商空間の研究ともつながってくる ((3) の研究). 正則自己同型群が正則変換で不変であるとは, 複素多様体 M, N が与えられたとき, 複素多様体として $M \simeq N$ ならば位相群として $\mathrm{Aut}(M) \simeq \mathrm{Aut}(N)$ が成り立つことをいう．これはいつでも正しい．正則自己同型群による M の特徴付けとは, この逆をいうもので, 位相群として $\mathrm{Aut}(M) \simeq \mathrm{Aut}(N)$ ならば複素多様体として $M \simeq N$ が成り立つことをいう．これはいつでも成立するわけではない．しかし, 正則自己同型群が大きい等質空間ならば特徴付けは成立するだろうと考えられていた ((2) の研究). このことについては, 我々の論文で初めて反例をあげた.

研究成果

(2), (3) の結果について述べる．次の領域

$$D^{p,q} = \{(z_1, \ldots, z_{p+q}) \in \mathbb{C}^{p+q} : -|z_1|^2 \cdots - |z_q|^2 + |z_{q+1}|^2 + \cdots + |z_{p+q}|^2 > 0\}$$

を考える．ここで, p, q は正の整数．この領域は等質領域であることは簡単にわかる．上の問題意識とともにこのような領域を考えるきっかけとなったのが, 超曲面

$$S^{p,q} = \{(x_1, \ldots, x_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q} : -x_1^2 \cdots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2 = 1\}$$

の離散群の作用と商空間に関する研究である．Calabi-Markus, Wolf は $S^{p,q}$, $p > q$, に真性不連続に作用する等長変換群の離散部分群は有限群であることを示した．したがって商空間がコンパクト多様体になることはない．これは $p = 1$ のときの双曲空間 $S^{1,q}$ と対比すると決定的な違いである．このような現象が複素化した領域 $D^{p,q}$ ではどうなるかが研究の一つの動機であった．そのために, $\mathrm{Aut}(D^{p,q})$ の正則自己同型群を決定した．$p > 1$ の場合は $U(p, q) \times \mathbb{R}_{>0}$ である．そして, $D^{p,q}$, $p > q$, の商空間がコンパクトにならないことを示した．また, $U(p, q) \times \mathbb{R}_{>0}$ が作用する複素多様体を分類することで, $D^{p,q}$ が正則自己同型群によって特徴づけられる場合とそうでない場合の p, q を決定した．これまでは等質領域に対してはこの特徴付けが成立しない例は知られておらず, 初の反例になった.