これからの研究計画 (作成者：齋藤 洋介)

既に述べたように, 楕円 Ruijsenaars 系に楕円モジュラスの何らかの意味での差分変形が現れると予想されるが, これについては未だにわかっていない. この点について理解するために次のようなことを計画している. $|q|<1$ なる複素数 q に対し, q-無限積 $(x;q)_\infty$ $(x\in\mathbb{C})$ とテータ関数 $\Theta_q(x)$ $(x\in\mathbb{C}^\times)$ を次で定める.

$$(x;q)_\infty:=\prod_{n\geq 0}(1-xq^n),\quad \Theta_q(x):=(q;q)_\infty(x;q)_\infty(qx^{-1};q)_\infty.$$

$D_z:=z\partial_z$ とおくとき, $\Theta_q(x)$ は熱方程式 $({D_x}^2-D_x)\Theta_q(x)=2D_q\Theta_q(x)$ を満たす. これは, テータ関数 $\Theta_q(x)$ の楕円モジュラス q がどのように無限小変形されるのかを表す方程式であると理解できる. また, $|q|<1$, $|p|<1$ なる複素数 q, p に対し, 2 重無限積 $(x;q,p)_\infty$ $(x\in\mathbb{C})$, 楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(x)$ $(x\in\mathbb{C}^\times)$ を

$$(x;q,p)_\infty:=\prod_{m,n\geq 0}(1-xq^mp^n),\quad \Gamma_{q,p}(x):=\frac{(qpx^{-1};q,p)_\infty}{(x;q,p)_\infty}$$

と定める. 楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(x)$ は次の差分方程式を満たす.

$$\Gamma_{q,p}(qx)=\frac{\Theta_p(x)}{(p;p)_\infty}\Gamma_{q,p}(x),\quad \Gamma_{q,p}(px)=\frac{\Theta_q(x)}{(q;q)_\infty}\Gamma_{q,p}(x).$$

楕円 Ruijsenaars 系には楕円ガンマ関数によって書かれた関数が頻繁に現れる. ここでは簡単のため, $t\in\mathbb{C}^\times$ を複素数とし $f(x):=\dfrac{\Gamma_{q,p}(tx)}{\Gamma_{q,p}(x)}$ $(x\in\mathbb{C}^\times)$ という関数について見ることにする. これは q-差分方程式 $f(qx)=\dfrac{\Theta_p(tx)}{\Theta_p(x)}f(x)$ を満たし, また明らかに $f(x)\xrightarrow[t\to q]{}\dfrac{\Theta_p(x)}{(p;p)_\infty}$ である. 以上より, $f(x)$ の満たす上の q-差分方程式というのは, テータ関数の満たす熱方程式が t-変形されたものであるとみなすのが可能である. これによれば, $f(x)$ の満たす q-差分方程式の右辺を $t=q$ の周りで展開することで, 楕円 Ruijsenaars 系に現れるべき楕円モジュラスの差分変形を特定できる可能性がある.