

## 今後の研究計画

今後の具体的な研究テーマを3つ挙げます。

[1] 1つの大きな柱はラグランジュ平均曲率流の研究です。この研究の最も大きな目標は、ラグランジュ部分多様体に安定性の概念を代数的に定義し、手術付きラグランジュ平均曲率流という概念も厳密に定義し、「初期条件として取ったラグランジュ部分多様体が安定ならば手術付きラグランジュ平均曲率流は時間大域解を持ち、極限として特殊ラグランジュ部分多様体に収束する」ということを証明することです。この目標は漠然としているので、実際に研究をする上では、足がかりになる具体的な問題を考えるのが良いと思っています。現在、安定性の概念は深谷圏を使って定義するのが有効と思われています。深谷圏はフレアーホモロジーを使って定義されるわけですが、フレアーホモロジーはラグランジュ部分多様体を境界条件とする正則曲線のモジュライ空間を使って定義されます。従って、この研究の第一歩として以下の問題(1)(2)を考えています。(1)「ラグランジュ部分多様体が平均曲率流に沿って動くときに、そのラグランジュ部分多様体を境界条件とする概正則曲線のモジュライ空間はどう動くか?」(2)「ラグランジュ平均曲率流が特異点を形成する瞬間にそのモジュライ空間の形はどう変化するか?」。

[2] 2つ目の研究は、非線形放物型偏微分方程式の研究です。これは東京工業大学の高橋仁氏との共同研究です。高橋氏は解析サイドから非線形放物型偏微分方程式の研究を行っています。現在は、ある特定の非線形放物型方程式の特異解の存在問題や、特異集合の近傍での特異解の漸近挙動の研究をしています。高橋氏が解析的なテクニックを提供し、私が幾何学的なテクニックを提供することで、研究が進んでいます。現時点では、PDEが定義されているドメインはユークリッド空間から余次元が高い部分多様体を除いた部分です。しかし、将来的にはドメインをリーマン多様体やより特異な空間にしたいと考えています。また、我々の得られた解析的な結果を深化させ「特異山辺フロー」の幾何解析へ応用することも今後の目標です。

[3] 3つ目の研究は、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続(dHYM)の研究です。変形エルミート・ヤン・ミルズ接続(deformed Hermitian Yang–Mills connection)通称「dHYM」は数学サイドとしては2000年にLeung–Yau–Zaslowによって提唱された概念です。彼らは限定的な状況下で、特殊ラグランジュ部分多様体と変形エルミート・ヤン・ミルズ接続は双対トーラス束の間のミラー対応で移りあうことを証明しました。特殊ラグランジュ部分多様体はHarvey–Lawsonの定義以来活発に研究されており、その対応物である変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の研究もここ数年の間に急激かつ活発に研究されるようになりました。2017年にJacob–Yauがエルミート接続に対して「線束平均曲率流」という概念を定義しました。そして「ある条件のもとでは、エルミート接続を線束平均曲率流で変形すると、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続に収束する」ということを証明しました。これはラグランジュ平均曲率流を使って特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法のミラー対応によるカウンターパートとすることができます。「ある条件」というのは強い条件で、それを外した一般のエルミート接続を線束平均曲率流で変形すると何が起きるかは分かっていません。そこで、現在考えている問題の1つ目は以下です。「一般のエルミート接続を線束平均曲率流で変形すると、解の爆発は起きるか?起きる場合は、爆発のオーダーはどれぐらいか?」また、仮に長時間解が存在した場合でも、極限は特異なdHYM計量になる可能性があります。この場合、特異集合の余次元の評価ができると議論が先に進めることができます。このような結果を出すときに重要となるのが、dHYM計量に対する単調量の導出です。例えばHYMの場合は、Tianによる特異集合の余次元の評価の結果があります。そこで「dHYM計量にもTianがHYMに対して導出したような単調量があるか?」が2つ目の問題です。