これまでの研究成果のまとめ

吉脇　理雄

多元環の表現論

多元環の表現論とはその環の加群のなす圏の構造を調べる事である．応募者はこれまで導来圏とその間の同値関手，さらには導来同値の下での不変量について主に研究してきた．これらは多元環の表現論において重要な道具である．例えば Grothendieck 群や大域次元の有限性など多元環の重要な情報が導来同値の下で不変となっている．近年，これらはリー理論，非可換代数幾何などにおいて重要な役割を果たすことが分かってきている．

表現論において最も重要なホモロジー不変量は大域次元である．大域次元は様々な値をとり得るため，したがって，加群圏のより精密な性質を反映しているといえる．Auslander は有限表現性などの表現論的な性質を大域次元などのホモロジー代数的な量で制御しようとする考えを基に，表現次元を実験的に提唱した．表現次元の概念自体は扱い易いものではなかったが，多元環の表現論に多くの興味深い問題を提供し，また近年のクラスター傾理論の一つの源流ともなった重要な概念である．表現次元に関連して近年導入された重要な概念に，三角圏の次元がある（Rouquier）．特に多元環の導来次元 (=導来圏の次元) や安定次元 (=安定導来圏の次元) は大域次元や表現次元と密接な関係があり（Rouquier），表現論的に興味深い．

したがって，導来次元や安定次元でもって多元環の表現論的な性質を制御できないかと考え，まずは低安定次元の自己入射多元環の表現論的性質を調べることとした．安定次元 0 であることと有限表現型であることは同値であることを示し [2]，さらに，その応用として Chen-Ye-Zhang の結果を改良し，導来次元が 0 の多元環と安定次元が 0 の自己入射多元環の間には密接な関係があることを示した（[4], [3]）.

続いて，自己入射多元環の一般化である，Iwanaga-Gorenstein (=IG) 多元環とその導来次元に着目することとなった．しかしながら，与えられた三角圏に対してその次元の正確な値を求めることは今だ一般に難しい問題である．そこで，応募者は相原，荒谷，伊山，高橋と共同で，部分圏から見た相対的な三角圏の次元というものを導入した [5]．我々の方法は Rouquier の意味での導来次元におけるすでに知られている結果を回復するだけではなく，様々な可換，非可換ネーター環へと応用が可能である．

一つの帰結として，ネーター環 Λ 上の入射次元 $d \geq 1$ の余傾加群 T に対して，Λ の（T から作られる）$\mathcal{X}_T$ から見た相対的な導来次元は d に一致することがわかった ([8])．この結果は正準加群を持つ可換ネーター Cohen-Macaulay(=CM) 局所環 R に適用でき，R の CM 加群圏 CM(R) から見た相対的な導来次元は R の Krull 次元に一致することがわかる．

その他にも，浅芝，木村，中島との共同研究で，反復多元環から得られる自己入射多元環の導来同値分類に関連する結果を得た (投稿中 [9])．

位相的データ解析（パーシステントホモロジー）

位相的データ解析の主な道具の一つにパーシステントホモロジーがある．それはデータにおける位相的特徴の持続性を研究するものである．解析対象であるパーシステンス図は A 型クイバー上の直既約分解そのものである．この考え方を多重パラメータデータに適用したいという要望はあるものの，それには無限表現型の多元環上の直既約分解が必要であり，一般的に取り扱いが難しい．したがって，その困難さを解消するための研究をしている．

まず，浅芝，中島との共同研究で Auslander-Reiten 理論を用いた加群の分解論を構築した ([6, 7])．この結果を用いて，多次元パーシステンス加群における「区間」表現への分解可能性を議論し，ある有限性のもとで分解可能性を決定する手法を提案した（浅芝，Buchet，Escolar，中島との共同研究 [10]）．さらに，「区間」表現分解近似を提案し，一般パーシステンス図を提示した (浅芝，Escolar，中島との共同研究 [11])．

一方，通常のパーシステント図はホモロジーの基礎体に依存している．それを判定するアルゴリズムを大林と共同で示した [12].