今後の研究計画

綾野孝則

今後もこれまでの研究に引き続き、具体的で使いやすいアーベル関数の理論を整備することを目標として、研究を進めます。具体的には、以下の課題に取り組みます。

1. 種数 2 の超楕円積分の逆関数とその退化に関する理論を整備する。

$\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ を相異なる複素数、V を $y^2 = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_5)$ で定義される種数 2 の超楕円曲線、α を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ と異なる複素数とします。

$$u = \int_{(\alpha_1,0)}^{(x,y)} -\frac{x-\alpha}{2y} dx$$

とします。x, y は u の関数と見なせます。$y(u)$ は $x(u)$ と $x'(u)$ を用いて表示できるので、この関係式を V の定義方程式に代入すると、$x(u)$ の満たす常微分方程式が得られます。本研究では、この常微分方程式を用いて、$x(u)$ の $u=0$ の周りでの級数展開の係数 (一般化 Bernoulli-Hurwitz 数) に関する漸化式を導出します。また、$\alpha_4, \alpha_5 \to \alpha$ として得られる特異曲線は、$y^2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ で定義される楕円曲線 E と双有理同値になります。本研究では、$\alpha_4, \alpha_5 \to \alpha$ における $x(u)$ の極限と、楕円曲線 E に付随する Weierstrass の $\wp$ 関数との関係を明らかにします。また、$\alpha_4, \alpha_5 \to \alpha$ における $x(u)$ の収束が一様収束になるかどうか調べます。

2. $\mathbb{C}^2$ 上の有理型関数が正則関数と有理型関数の積に分解される非自明な例を与える。

$f(x)$ を x の 5 次の多項式、V を $y^2 = f(x)$ で定義される種数 2 の超楕円曲線、$\sigma(u) = \sigma(u_1, u_3)$ を V に付随するシグマ関数とします。σ は $\mathbb{C}^2$ 上の正則関数です。σ_1, σ_3 をそれぞれ σ の u_1, u_3 に関する偏導関数とします。$\wp_{i,j}(u)$ を $-\log\sigma(u)$ を u_i と u_j で偏微分して得られるアーベル関数とします。$W = \{u \in \mathbb{C}^2 \mid \sigma(u) = 0\}$ とします。アーベル・ヤコビ写像を通して、アーベル関数 $g(u) = \wp_{1,1}(2u)/2$ と $h(u) = -\sigma_3(u)/\sigma_1(u)$ は V 上の有理関数 x と同一視できます。このことから、g と h は W 上で一致します。よって、$\mathbb{C}^2$ 上で $g - h = \sigma k$ を満たす有理型関数 k が存在します。本研究では、k を σ とその偏微分を用いて具体的に表示します。

3. 種数 2 のアーベル関数と楕円関数との関係を明らかにする。

$f(x)$ を重根を持たない 3 次多項式で $f(0) \neq 0$ を満たすもの、V を $y^2 = f(x^2)$ で定義される種数 2 の超楕円曲線、E_1 を $y^2 = f(x)$ で定義される楕円曲線、E_2 を $y^2 = x^3 f(1/x)$ で定義される楕円曲線、$\mathrm{Jac}(V), \mathrm{Jac}(E_1), \mathrm{Jac}(E_2)$ を、それぞれ V, E_1, E_2 のヤコビ多様体とします。射 $\varphi_1 : V \to E_1,\ \varphi_2 : V \to E_2$ が具体的に構成できます。この射から、正則写像

$$\psi_1 : \mathrm{Jac}(V) \to \mathrm{Jac}(E_1), \quad \psi_2 : \mathrm{Jac}(V) \to \mathrm{Jac}(E_2)$$

が誘導されます。本研究では、ψ_k がどのような写像であるかを具体的に記述します。E_k に付随する Weierstrass の $\wp$ 関数を ψ_k で引き戻すことで、V に付随するアーベル関数 f_k が得られます。本研究では、f_k を V の基本的なアーベル関数 $\wp_{i,j}$(Weierstrass の $\wp$ 関数の一般化) を用いて具体的に記述します。これにより、Weierstrass の $\wp$ 関数と種数 2 のアーベル関数 $\wp_{i,j}$ との明示的な関係が明らかになります。また、$\wp$ が満たす加法公式を ψ_k で引き戻すことで、アーベル関数 f_k が満たす加法公式を導出します。