

# これまでの研究成果

綾野孝則

楕円関数は19世紀の数学の主要な研究対象であり、これまでに具体的で美しい理論が構築されています。それ故、様々な分野で活用され、数学や科学の発展に大きく貢献してきました。一方、科学技術の発達により、一般の代数曲線に付随するアーベル関数(楕円関数を多変数に拡張した関数)を様々な分野で活用する動きも出てきています。例えば、暗号の分野では、楕円曲線暗号を一般化した超楕円曲線暗号にアーベル関数の理論が応用されています。また、関数論においては、複素上半平面から多角形への等角写像(Schwarz-Christoffel写像)の理論にアーベル関数の理論が応用されています。このように、一般の代数曲線に対して、楕円関数論のように具体的に計算のできるアーベル関数の理論を整備することは、多くの分野で切望されています。

アーベル関数論で重要な役割を果たすのがシグマ関数です。Weierstrassによって定義され、詳しく調べられた楕円シグマ関数は、F. Klein等によって、超楕円曲線に付随する多変数のシグマ関数に拡張されました。さらに100年程前にH. F. Bakerによって、超楕円曲線のシグマ関数の理論は大きく発展しました。近年になって、V. Buchstaber、V. Enolski、D. Leykinらの画期的な研究により急速に発展し、平面telescopic曲線と呼ばれる曲線にまでシグマ関数は拡張されました。本研究では、一般のtelescopic曲線にまでシグマ関数を一般化しました(論文リスト6)。また、アーベル関数論において有名なヤコビの逆問題の公式をtelescopic曲線にまで一般化しました(論文リスト5)。

楕円曲線上の有理関数体は代数的な対象であり、体の構造や生成元を具体的に求めることができます。それをアーベル・ヤコビ写像で移すことで、解析的な対象である楕円関数体の構造や生成元を求めることができます。Bakerは、この手法を拡張し、超楕円曲線のアーベル関数体の構造や生成元を具体的に決定しました。アーベル関数はヤコビ多様体上の有理型関数と思えます。Bakerにより、超楕円曲線のヤコビ多様体の定義方程式が決定されました。ヤコビ多様体の点でシグマ関数が0になるもの全体をシグマ因子といいます。本研究では、種数3の超楕円曲線に対して、シグマ因子上の有理型関数からなる体の構造と生成元を決定しました(論文リスト4)。これにより、種数3の超楕円曲線のシグマ因子の定義方程式が決定できました。その応用として、シグマ因子上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出しました(論文リスト3)。これは、KdV方程式を2つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています。

種数2の超楕円積分の逆関数の級数展開の係数に関する漸化式を導出しました。曲線のパラメータの連続的な変形で種数2の曲線を楕円曲線に退化させたとき、その逆関数はWeierstrassの $\wp$ 関数に収束することを示しました(論文リスト2)。これにより、曲線の退化とそれに伴うアーベル関数の退化に関する新たな関係が明らかになりました。

$f(x)$ を5次の多項式、 $V$ を $y^2 = f(x)$ で定義される種数2の曲線、 $\sigma(u)$ を $V$ に付随するシグマ関数とします。アーベル・ヤコビ写像を通して、 $V$ 上の有理関数 $y$ は、 $\sigma$ を用いて構成される $\mathbb{C}^2$ 上のある有理型関数 $F, G$ と同一視できます。このことから、 $\mathbb{C}^2$ 上で $F - G = \sigma H$ となるような有理型関数 $H$ が存在します。本研究では、 $H$ を $\sigma$ とその偏微分を用いて具体的に書き下しました(論文リスト2)。多変数複素関数論において、多変数の有理型関数を2つの有理型関数の積に分解するという問題は、重要な問題です。本研究では、アーベル関数の理論を用いて、この問題に対する非自明な例を与えました。