これからの研究の方針

いくつかの記号についてはこれまでの研究の概要を参照のこと.

1. **Lagrange の補間多項式と Laguerre 型の重みついて**: $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f について Lagrange の補間多項式 $L_n(f)(t)$ が重み w_ρ に関して f に収束する, 即ち

$$\lim_{n\to\infty} \|(L_n(f)-f)w_\rho\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{C}$$

が $1<p<\infty$ で成立する条件を求める. これまで $p=2$ および $1<p<2$ 場合に成立する条件を既に示すことが出来た一方で, $2<p<\infty$ の場合, (C) に準ずる結果を得ることは出来たが, それは条件はきわめて煩雑で精密な評価ではない. さらに $p=2, 1<p<2$ は全く別の証明の道筋を与えており, p について連続であることが見えてこない. これの解決のひとつの道筋として $1<\lambda<\infty$ に対し (t,p) の 2 変数関数 $g_p(t)$ で $g_p(t)=1$ $(1<p\le\lambda,\ x\in\mathbb{R})$, $\lim_{p\to\lambda+0} g_p(t)=1$ 及び任意の $1<p<\infty$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \|(L_n[F]-F)g_p w_\rho\|_{L_p(\mathbb{R})} = 0$$

を満たすものを求め, その $g_p(t)$ が存在する条件を示すことがひとつの方針である. さらに応用として半空間 $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$ の場合についての研究がある. これは Laguerre 多項式の理論とも関連の深い応用上重要な分野の一つである. 実際, 重み w_ρ は Laguerre の重み xe^{-x} のアナロジーであり, $\mathbb{R}$ の場合に w だけでなく $w_\rho(t)$ を扱った理由である. まずは $\mathbb{R}^+$ 上に $\mathbb{R}$ における $\mathcal{F}(C^2+)$ に対応する重みのクラスを対称性を基に定義する. その重みのひとつを $W_\rho(x) := x^\rho \exp(-R(x)),\ x\ge 0$ とする. $x=t^2$ とおくことで $\mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}$ の理論に帰着される. この状況での直交多項式, Lagrange の補間多項式, MRS 数などの $\mathbb{R}^+$ と $\mathbb{R}$ の間の関係を見出すことが Laguerre 型への応用のための鍵である.

2. **de la Vallée Poussin 平均について**: 現在のところ, 評価

$$\|(f-v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w;f). \tag{A}$$

i が精密なものであるか否かは不明である. 証明の手法次第で T の次数をより下げられる可能性がある. さらに Erdős 型重みに付いた増大度の条件 $T(a_n)\le c\,(n/a_n)^{2/3}$ も何らかの形で弱められる可能性も考慮したい.. また, これまでに de la Vallée Poussin 平均の微分の L^p 有界性を以下の形で示している: w は $\mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^4+)$ とする. $T^{(2j+1)/4}fw\in L^p(\mathbb{R})$ のとき $2\le p\le\infty$ について

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j \|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{B}$$

$1\le p\le 2$ について

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j a_n^{(2-p)/2p}\|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

が任意の $1\le j\le k$ 及び $n\in\mathbb{N}$ について成り立つ. de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性を証明する際に L^1 の双対定理と Riesz-Thorin の補間定理を用いたが, 微分の場合は T の非有界性のために L^1 ノルムの双対定理を利用できない.. 現在は (B) が $1\le p\le 2$ の場合に成立するかは不明である. T の非有界性による評価の困難を解消する新たな方法を見付けることが解決の糸口となるだろう.