(2) **これまでの研究成果のまとめと今後の研究計画**

【これまでの研究成果】

調和写像論，及び可積分系理論を用いた特殊ラグランジュ部分多様体の考察を主として研究を行っている．特殊ラグランジュ部分多様体はカラビ-ヤウ多様体の実部分多様体であり，かつキャリブレーションとよばれる微分形式を用いて定義される対象である．また，特殊ラグランジュ部分多様体はカラビ-ヤウ多様体の極小部分多様体であるということも知られている．

特殊ラグランジュ部分多様体と可積分系との関わりは，カラビ-ヤウ多様体を３次元複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^3$ とする場合にみることができる (D. Joyce, *Special Lagrangian 3-folds and integrable systems*, 2008).

$\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ錐 (原点に特異点をもち得る錐状の特殊ラグランジュ部分多様体) は，リーマン面から２次元複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ へ極小ラグランジュはめ込みを導出する．反対に，リーマン面 S から $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ への極小ラグランジュはめ込み $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ が与えられたとき，対応して $\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ錐 (はめ込まれた部分多様体として) が構成される．

申請者は，特殊ラグランジュ錐を構成する一方法として，調和写像の構成理論 (一般化されたワイエルシュトラス型表現公式) (J. Dorfmeister, F. pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, 1998) を用いて，リーマン面 S から調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ を構成し，それが極小ラグランジュはめ込みになる条件を明らかにした．以下，S をリーマン面とする．上述の調和写像の構成理論では，初期値となるあるクラスの S 上行列値１形式対して，S から対称空間への調和写像が構成される．前研究では，同構成法を通して得られる調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ が，さらに極小ラグランジュはめ込みとなるような初期値 (S 上行列値１形式) の形を定めた．これは同時に，$\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ錐を構成する条件を与えたことを意味する．

他方，調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ と，可積分系の一つである戸田格子方程式系の解は，互いに対応関係をもつ (J. Bolton, F. Pedit and L. M. Woodward, *Minimal surfaces and the affine Toda field model*, 1995)．調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ がさらに極小ラグランジュである場合には，対応する戸田格子方程式系の解はティツェイカ方程式の解へ簡約化されることが知られており，加えてその解が S の複素座標 z の偏角に依らない場合にはパンルヴェ Ⅲ 型方程式の解へと簡約化される．この点に着目し，前研究に於いては一般化されたワイエルシュトラス型表現公式を通して，偏角不変なティツェイカ方程式の解に対応する $\mathbb{C}$ 上行列値１形式の例を与え，パンルヴェ Ⅲ 型方程式の解 $w : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ をある程度明示的に得た．

また，上述の結果の類推として，酒井高司氏 (首都大学東京) と橋本要氏 (大阪市立大学) により得られた，$\mathbb{C}^{n+1}$ の超曲面として表されるカラビ-ヤウ多様体 (K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, 2012) についても同様の結果が成り立つかを考察している．