今後の研究計画

佐藤 敬志

(1) 擬鏡映群

複素ベクトル空間上の自己同型写像で余次元 1 の超平面を固定する非自明なものは擬鏡映と呼ばれる。実ベクトル空間ではそのような自己同型の位数は 2 だが、擬鏡映は位数が 2 とは限らない。擬鏡映で生成される有限群を擬鏡映群という。擬鏡映群は Weyl 群の自然な一般化であり、旗多様体の場合のような幾何と組合せ論の関連があって然るべきと考える。ゆえに一番の目標としてこの関連を明らかにしたい。

擬鏡映群は 60 年以上前に Shephard-Todd により分類されたが、その組合せ論についてはほぼ何も知られていないのが現状である。特に適切な長さ関数や Bruhat 順序のような半順序構造が不明である。また対応する旗多様体の類似物は適当な completion のもとで得られているが、Bruhat 分解のような組合せ論的構造は不明である。これを解決するために、Weyl 群と旗多様体のコホモロジー環およびセル複体の構造との関係性のノウハウを活かせると考えている。具体的には擬鏡映群から得られる "同変コホモロジー環" の GKM 理論的な記述から貼り付け写像を逆算して、擬鏡映群の組合せ論を反映した空間をセル複体のようなものとして作ることができるのではないかと考えている。

(2)Regular semisimple Hessenberg 多様体

Regular semisimple Hessenberg 多様体は対応する Lie 群の極大トーラス T の作用で閉じていて、T-作用での固定点における接空間は lower ideal に入っていないルートに応じて削られているものである。また、regular semisimple Hessenberg 多様体にはセル分割ではなく paving が与えられていて、各セルは必ずしもより低次元のセルに張り付いていなくて良い。これについて、やはり同変コホモロジー環の GKM 理論的記述があるが、明示的なものではない。また、旗多様体の場合のテクニックが使えない事情もあり、paving における各セルに対応するコホモロジー類の記述は知られていない。Regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の lower ideal の言葉で明示的に記述すること及び paving における各セルに対応するコホモロジー類の記述を与えたい。そのコホモロジー環の記述は、例えば Hessenberg 版の Schubert calculus などへの応用をもつ点で重要であろう。

また、A 型の regular semisimple Hessenberg 多様体には、その Hessenberg twin と呼ばれる多様体がある。これらは $U(n)$ の極大トーラス T について左右どちらからの積を考えるかにより生まれる多様体であり、その同変コホモロジーは同型である。この Hessenberg twin のコホモロジー環には、通常考えるものと別の対称群の作用があり、次数を忘れると正則表現になっている。どの次数にどの既約表現が何度現れるかという問題は旗多様体の場合に解決されており、各 Young 盤に定まる組合せ論的な数により答えることができる。特にこれは Young 盤における箱のペアの数として得ることができ、これを A 型の Weyl 群のルートの数え上げとみなすことで自然に regular semisimple Hessenberg 多様体の Hessenberg twin の場合に拡張できるのではないかと考えており、実際に次元の低い場合には成り立つことを確認した。