今後の研究計画

高橋 良輔

Fano 多様体上の Inverse Monge-Ampère flow（MA^{-1}-flow，新しい放物型フロー）と満渕ソリトン（そのソリトン解）を，幾何解析/幾何学的不変式論 (Geometric Invariant Theory，略して GIT) 的視点から研究することにより，K-安定でない Fano 多様体を扱う新しい枠組みを構築する．
研究 A：フローに沿った多様体の幾何収束性を調べる．具体的には，極限空間の特異点集合の次元や代数性などである．
研究 B：満渕ソリトンが存在するための GIT 的な必要十分条件を与える．また応用として，ソリトン解と Calabi の端的 Kähler 計量の存在条件が，適当な障害の消滅の下で同値であることを証明する．

研究 A

MA^{-1}-flow に沿った多様体の幾何収束性や，極限空間の特異点集合の次元および代数性を調べる．Kähler-Ricci flow (KRF) に沿った幾何収束性の解明は，Perelman の局所非崩壊定理に依拠していた．ところが，MA^{-1}-flow では一般に局所非崩壊定理は成り立たず，**正則不変量による障害** “m_X” が存在することが分かっている．理想としては，一般的（特に，m_X が消えていない）状況で flow の極限挙動を解明することが望ましいが，いきなりこれを考えることは困難である．そこで，次のように Fano 多様体 (X, J)（J は複素構造）に弱い安定性条件，もしくは対称性を仮定して証明を行う：
(A-1) 微分同相群による軌道 $\mathrm{Diff}(X) \cdot J$ の C^∞-閉包が KE 構造 J_∞ を含む場合（隣接条件）．特に，この隣接条件は m_X の消滅を導く．MA^{-1}-flow に沿って時刻無限大で複素構造がジャンプして (X, J_∞) に幾何収束することを示す．
(A-2) $X = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(2)) \to \mathbb{P}^2$ の場合．ただし，$\mathcal{O}$ は $\mathbb{P}^2$ 上の自明直線束を表す．X は m_X が消えないような K-安定でない複素 3 次元 toric Fano 多様体で，定曲率空間 $\mathbb{P}^2$ 上の射影直線束としての構造を持つ．このとき，適当な初期条件のもとで flow が体積崩壊するような X の部分集合 X_{sing} を特定し，その外では局所 C^∞-収束していることを示す．

研究 (A-1), (A-2) により，m_X が消えている場合とそうでない場合の両方の具体例が得られ，一般的な場合を考察する際の重要な足がかりとなるはずである．

研究 A の研究方法

flow	放物型	収束に必要な条件
$\{\omega_t\}$	○	K-安定性
$\{J_t\}$	×	隣接条件

Table 1　それぞれの長所と短所

まず (A-1) について．Donaldson の GIT 描写 [Don15] および Moser の定理を使うと，$c_1(X)$ に属する Kähler 計量の空間は，軌道 $\mathrm{Diff}(X) \cdot J$ と同一視できることが分かる．この対応によって，MA^{-1}-flow $\{\omega_t\}$ は複素構造のモジュライ空間上の flow $\{J_t\}$ に写る．flow $\{J_t\}$ の長所は隣接条件（K-安定よりも弱い条件）で収束が期待できる点であり，その短所はシンプレクティック群の作用で不変（特に，放物型でない）点である．一方で，$\{\omega_t\}$ は全く逆の長所/短所を持っている．そこで，$\{\omega_t\}$ と $\{J_t\}$ が互いに同値なフローであることを使うことにより，短所の克服，または，長所を組み合わせることができると考えている．

次に (A-2) について．X の対称性を上手く活用することがポイントである．具体的には，定空間 $\mathbb{P}^2$ 上の Fubini-Study 計量の引き戻しとファイバー方向の回転不変計量の和として書ける Kähler 計量だけを考察する．この対称性条件は MA^{-1}-flow に沿って保存されることが分かるので，回転作用のモーメント写像を通して，1 次元閉区間上の関数 f_t $(t \in [0, \infty))$ に対する時間発展方程式に帰着できる．X は KE 計量を持たないので，flow の固定点（=KE 計量）に対応する ODE 解 f_∞ は計量の正値性条件を満たさないか，閉区間の境界で特異性が現れると考えられる．そこで，f_∞ に対応する特異計量の Lelong 数を調べることで，計量の特異性（錐・カスプなど）を測り，flow に沿った極限操作で欠損する体積がどのくらいかを調べる．以上の考察をもとに特異性が発生する X の部分集合 X_{sing} を特定する．一方で，MA^{-1}-flow の方程式はポテンシャルの Hessian の関数として見ると凹関数になっているので，Evans-Krylov 理論により X_{sing} の外では局所的な $C^{2,\alpha}$-評価（およびその高階微分に対する放物型評価）

が構成できると考えらえる.

研究 B

研究 B では満渕ソリトンが存在するための GIT 的な必要十分条件を決定する.既に先行研究 [His19] によって,満渕ソリトンの存在は "一様相対 D-安定性"(GIT 安定性の一種)と同値であるという結果が得られている.しかし,この一様相対 D-安定という仮定をチェックすることは現実的に不可能に近いので,より判定が容易な条件に帰着したい.そこで,**チェックの対象を特殊退化(特異ファイバーが高々 $\mathbb{Q}$-Fano であるようなもの)に限定しても,同様の結果が成り立つことを示す.** 特に,Calabi の端的計量が存在すると特殊退化に対する相対 D-安定性が従うことが知られているので,満渕ソリトンの存在が得られる.

研究 B の研究方法

KE 計量を構成するための手法の 1 つとして,Aubin-Yau による連続法が知られている.そこで,この方法を次のようにして満渕ソリトンへと一般化する:

$$\mathrm{Ric}(\omega_t) - (1-t)\hat{\omega} - t\omega_t = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1-\theta_t), \quad t \in [0,1]. \tag{0.1}$$

ここで,$\hat{\omega} \in c_1(X)$ は任意に固定した計量,θ_t はソリトンベクトル場の ω_t に関する Hamiltonian である.$t=0$ のとき,(0.2) の解 ω_0 は重み $(1-\theta_t)$ 付きの Calabi-Yau 方程式であり,ただ 1 つの解を持つ([BN14]).一方で,$t=1$ のとき,解 ω_1 は満渕ソリトンの方程式を満たす.したがって,連続法 (0.2) が $t=1$ まで解けることを示せばよいのだが,そのためには連続法が解ける最大時間を $T>0$ としたとき,$t \nearrow T$ で多様体 (X,ω_t) の GH 極限が高々 $\mathbb{Q}$-Fano になっていることを言えばよい(このとき,特殊退化に対する相対 D-安定性の仮定を使って,$T=1$ まで解けることが分かる).まず,GH 極限の非崩壊性については,(0.2) から Bakry-Emery Ricci テンソル $\mathrm{Ric}(\omega_t) - \sqrt{1-}\partial\bar{\partial}\log(1-\theta_t)$ の下からの評価が従うので,(Bakry-Emery 版)体積比較定理および Myer's の定理から直径評価と非崩壊性が従う.よって,Gromov のコンパクト性定理からある compact length space (Z,d) へ GH 収束する部分列が取れる.次に,Z の regular set の openness およびそれ上の微分構造の構成に関しては,共形変形した計量 $\tilde{g}_t := (1-\theta_t)^{1/n-1}g_t$ に対して Anderson の結果が適用できると考えられる(ここで,g_t は ω_t に対応する Riemann 計量).実際,$\mathrm{Ric}(\tilde{g}_t)$ と Bakry-Emery Ricci テンソルの差は θ_t, $\nabla\theta_t$, $\Delta_t\theta_t$ の関数として書くことができるが,これら 3 つの量については,(0.2) に log の凹性および最大値原理を適用することで一様評価が構成できる.特に,$\mathrm{Ric}(\tilde{g}_t)$ には下からの一様評価があることが分かる.KE の場合は ϵ-正則性の手法を使って Ricci テンソルの(局所的な)上からの評価を導けることが知られている([Szé16]).そこで,[Szé16] の共形版アナロジーが $\mathrm{Ric}(\tilde{g}_t)$ に対して成り立つかどうかを考察する.θ_t に関する一様評価から $\tilde{g}_t$ と g_t は一様に共形同値となるので,これを使って $(X,\tilde{g}_t)$ の GH 極限と (X,g_t) の GH 極限 Z が一致することを示す.Z の代数性や特異点集合の余次元の評価についても,この Bakry-Emery 幾何と共形変形のアイデアが使えるかどうかを検討する.

References

[BN14] R. J. Berman and D. W. Nyström: *Complex optimal transport and pluripotential theory of Kähler-Ricci solitons*, `arXiv:1401.8264`.

[Don15] S. K. Donaldson: *The Ding functional, Berndtsson convexity and moment maps.* `arXiv:1503.05173v1`.

[His19] T. Hisamoto: *Mabuchi's soliton metric and relative D-stability.* `arXiv:1905.05948`.

[Szé16] G. Székelyhidi: *The partial C^0-estimate alog the continuity method.* J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), 537–560.