

これまでの研究成果のまとめ

滝岡 英雄

Kanenobu 結び目のブレイド指数の研究 すべての結び目は閉ブレイドで表せ、そのブレイドの紐の最小本数をその結び目のブレイド指数と呼ぶ。ブレイド指数は Khovanov-Rozansky ホモロジーの情報を使って評価するのだが、すべての n に対して、Khovanov-Rozansky ホモロジーが一致する Kanenobu 結び目の無限列 $k(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対しては、そのブレイド指数を n に関してある一定の値でしか評価できない。本研究では、 $\Gamma_{2/q}$ 多項式を応用し、Kanenobu 結び目 $k(n)$ のブレイド指数の下からの評価が n に関して増大するという精密な評価を与えた。

ミュータント結び目と $\Gamma_{p/q}$ 多項式の研究 ミュータント結び目の組を区別することは非常に難しい。例えば、 $\nabla_{p/q}, V_{p/q}, P, F, P_{2/q}, F_{2/q}$ 多項式では区別できない。しかし、 $P_{3/q}$ 多項式で区別できるミュータント結び目の組が存在する。 $P_{3/q}$ 多項式に含まれる $\Gamma_{3/q}$ 多項式にもミュータント結び目の組を区別できる可能性があるのだが、 $\Gamma_{3/q}$ 多項式ではどんなミュータント結び目の組も区別できないことを示した。

Kanenobu 結び目のアーク指数の研究 すべての結び目は各ページと適切に埋め込まれた 1 つの単純弧で交わる本の中に埋め込み、そのページの最小枚数をその結び目のアーク指数と呼ぶ。アーク指数を下から評価する強力な不等式として Kauffman 多項式の次数の幅による Morton-Beltrami 不等式が知られているが、すべての n に対して、Kauffman 多項式の次数の幅が一致する Kanenobu 結び目の無限列 $k(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対しては、そのアーク指数を n に関してある一定の値でしか評価できない。本研究では、 $\Gamma_{2/q}$ 多項式を応用するために一般のケーブル結び目に対して、そのアーク指数のより良い評価を与えるアルゴリズムを構成し、Kanenobu 結び目 $k(n)$ のアーク指数の下からの評価が n に関して増大するという精密な評価を与えた。(Hwa Jeong Lee 氏 (KAIST, 韓国) との共同研究)

結び目のクラスプ数と Γ 多項式の研究 すべての結び目は特異点集合の連結成分が有限個のクラスプ弧からなる特異円板 (クラスプ円板) を張る。そのクラスプ円板のクラスプ弧の最小数をその結び目のクラスプ数と呼ぶ。クラスプ数に関する研究はいくつか知られているが、それらのほとんどが Alexander-Conway 多項式に由来する。本研究では、クラスプ数が高々 2 の結び目の Γ 多項式の特徴付けに成功した。

自明な $\Gamma_{2/1}$ 多項式をもつ結び目の研究 p を 2 以上の整数とする。自明な結び目 \bigcirc に対して、 $\nabla_{p/1}(\bigcirc) = V_{p/1}(\bigcirc) = \Gamma_{p/1}(\bigcirc) = Q_{p/1}(\bigcirc) = P_{p/1}(\bigcirc) = F_{p/1}(\bigcirc) = 1$ である。問題は非自明な結び目に対して多項式不変量の $(p, 1)$ ケーブル化が 1 になるかである。 $\nabla_{p/1}$ 多項式が 1 になる非自明な結び目はよく知られており他の場合は未解決である。本研究では、 $\Gamma_{2/1}$ 多項式が 1 になる非自明な結び目の無限列を構成した。

10 交点までの結び目の $\Gamma_{2/1}$ 多項式の研究 Γ 多項式は多項式時間で計算できることが知られており、そのケーブル化も多項式時間で計算できる。多項式時間で計算できる不変量で 10 交点までの結び目を完全分類できるかは重要な問題である。本研究では、 Γ 多項式の $(2, 1)$ ケーブル化で完全分類できることを示した。

絡み目の自己平滑化数の研究 有向絡み目の図式の自己交差点で平滑化を何回か行くと自己交差点のない図式になる。この最小回数をその図式の自己平滑化数という。有向絡み目の図式全体のなかでの最小数をその有向絡み目の自己平滑化数という。本研究では、すべての有向絡み目の自己平滑化数を完全に決定した。

Abe-Tange リボン結び目の分類の研究 Abe-Tange リボン結び目は 4 次元円板内の外部が同一であるスライス 2 次元円板の境界となる結び目の無限列であり、特にリボン結び目であることが知られている。4 次元円板内の外部が同一であるので、分類することは困難であるが、 Γ 多項式により完全分類できることを示した。

結び目の $\Gamma_{p/q}$ 多項式から得られる Vassiliev 不変量の研究 $\Gamma_{p/q}$ 多項式からどのような Vassiliev 不変量が得られるかを次数の低い順に計算した。特に、次数が 4 までのすべての Vassiliev 不変量は $\Gamma_{p/q}$ 多項式から得られることを示した。

結び目の $2n$ 移動と Γ 多項式の研究 自然数 n に対して、結び目の $2n$ 移動とは、結び目の $2n$ 半ひねりをなくす局所変形またはその逆の局所変形である。1979 年に中西康剛氏により結び目の 4 移動は結び目解消操作であると予想されたが未解決問題である。本研究では、任意の自然数 $k(\geq 2)$ に対して、結び目の $4k$ 移動は結び目解消操作ではないことを Γ 多項式を用いて証明した。さらに、 $\Gamma(K; -1) = 9 \pmod{16}$ をみたす結び目 K は 1 回の 4 移動で自明な結び目に変形できないことを示した。特に、4 移動に関しては、4 移動距離の研究 (金信泰造氏との共同研究) に発展している。