今後の研究計画

今後も正標数における商特異点の研究を進めていきたいと考えている．特に次のような問題について考えたい．

1. いつ log terminal になるか

標数 0 においては全ての商特異点が log terminal になることが知られているが, 正標数においては商特異点は必ずしも log terminal にならない．商特異点が log terminal になるための条件を考えることは非常に重要な問題である．作用している群の位数が標数で割り切れないような場合には標数 0 のときと同様に log terminal となるが割り切れる場合には様々な病的な商特異点が現れる．一番単純な場合として標数 p の上で位数 p の巡回群が作用している場合が考えられるが, この場合は Yasuda(2018) で商特異点のがどのクラスになるかを判定できる不変量が与えられている．またこの結果の拡張として Tanno-Yasuda(2019) によって位数が p のべきである巡回群の場合について調べられており, 特に $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ の表現に対する商特異点のクラス分けがされている．これらは Yasuda 氏によって証明された野性的 McKay 対応を用いて商特異点の不変量を計算することで証明されており, この方法は非常に有用であることがうかがえる．次に調べたいのは $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ をいくつか直積した形の群の表現に対する商特異点のクラス分けであるが, これまでの計算で野性的 McKay 対応を用いた不変量の計算は生成元が増えると難しくなることが予想され, より簡明に計算する方法を見つけていくことが商特異点のクラスを考えるにあたって重要なステップであると考える．現在, 安田氏とともに p 群の表現に対して $\boldsymbol{v}$ 関数を計算するアルゴリズムについて研究中であるが, その後にはどのような情報で $\boldsymbol{v}$ 関数が計算されるかということや, より簡明な公式を与えたいと考えている．

2. いつクレパント特異点解消をもつか

標数 0 では 3 次元以下のゴレンシュタイン商特異点は常にクレパント特異点解消を持つことが知られているがそれより高次元の場合についてはまだわかっていない．よっていつクレパント特異点解消を持つかという問題は正標数はもちろん標数 0 でも興味のある問題である．

標数 0 で 3 次元以下の場合の結果は初めは特殊線形群の有限部分群の分類に従って Roan, Ito, Markushevich らが個別に具体的にクレパント特異点解消を構成することにより証明されている．正標数で 3 次元の場合については Yasuda 氏の巡回群に対する商特異点のクラス分けの結果から標数 3 の場合のみが問題となることがわかっている．私はある有限部分群の系列に対してクレパント特異点解消が存在することを示しており, また考えるべき有限部分群は標数が 3 で割り切れるが 9 では割り切れないようなもののみであることを示しているので, まずはこの場合を調べつくすことを目標としたい．

また後に Matsumura や Bridgeland-King-Reid(2001) によって G-Hilb というモジュライを使ってクレパント特異点解消が与えられており, 正標数においてもこのような統一的なクレパント特異点解消を与えることができるかということについても検証したい．

3. 種々の McKay 対応の一般化

標数 0 においてクレパント特異点解消をもつような商特異点については Batyrev の定理 (1999) にあるような Hodge 数に関する McKay 対応や Bridgeland-King-Reid にあるような圏論的な McKay 対応が成り立つことが知られている．正標数においては Batyrev の定理に関しては私が反例を構成しており, また圏論的な McKay 対応についてもそのままの形では成り立たないことが知られている．一方で Denef-Loeser(2002) において標数 0 で示された motivic 積分に関する McKay 対応は Yasuda(2019) において正標数に拡張されており, Batyrev の定理や圏論的な McKay 対応も何らかの形で一般化されるかという問題にも取り組みたい．