対称性をもつ極小PF部分多様体について

森本　真弘　(大阪市立大学 D3)*

1. 序論

リーマン多様体の極小部分多様体であって，特殊な対称性をもつものがある．$\bar{M}$ を有限次元リーマン多様体，M を $\bar{M}$ にはめ込まれた部分多様体とする．M が**鏡映** ([8]) であるとは，M が $\bar{M}$ の対合的等長変換の固定点集合の連結成分であることをいう．M が**弱鏡映** ([4]) であるとは，各点 $p \in M$ における各法ベクトル ξ に対し，$\bar{M}$ の等長変換 ν_ξ であって $\nu_\xi(p) = p$, $d\nu_\xi(\xi) = -\xi$, $\nu_\xi(M) = M$ を満たすものが存在することをいう．M が**オースティア** ([2]) であるとは，各法方向の主曲率が重複度込みで (-1) 倍不変であることをいう．M が**アリッド** ([16]) であるとは，各点 $p \in M$ における各法ベクトル $\xi \neq 0$ に対し，$\bar{M}$ の等長変換 φ_ξ であって $\varphi_\xi(p) = p$, $d\varphi_\xi(\xi) \neq \xi$, $\varphi_\xi(M) = M$ を満たすものが存在することをいう．定義から次の関係が従う：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \nearrow & \text{オースティア部分多様体} & \searrow & \\
\begin{array}{c}\text{鏡映}\\\text{部分多様体}\end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c}\text{弱鏡映}\\\text{部分多様体}\end{array} & & & & \begin{array}{c}\text{極小}\\\text{部分多様体}\end{array} \\
 & & & \searrow & \text{アリッド部分多様体} & \nearrow &
\end{array}
$$

本講演では，上記概念を**PF部分多様体** (Terng [17]) と呼ばれる無限次元部分多様体のクラスへ拡張し，得られた講演者の結果 ([9], [10]) を紹介する．

2. PF部分多様体と関連概念

V を可分ヒルベルト空間，M を V にはめ込まれたヒルベルト多様体であって余次元有限とする．M が **PF 部分多様体** ([17]) であるとは，終点写像 $Y : T^\perp M \to V$, $(p, \xi) \mapsto p + \xi$ が次を満たすことをいう：任意の $r > 0$ に対し，半径 r の法ディスク束 D_r への制限写像 $Y|_{D_r}$ が，固有写像かつフレドホルム写像 (各点で微分がフレドホルム作用素) である．

命題 1 ([17]). M を V の PF 部分多様体とする．

(ii) 各 $\xi \in T_p^\perp M$ に対し，形作用素 A_ξ は T_pM 上の自己共役コンパクト作用素である．

(ii) 各 $u \in V$ に対し，関数 $f_u : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \|p - u\|^2$ は Palais-Smale 条件 ([12], [15]) を満たす．

PF 部分多様体は，無限次元部分多様体論における基本的研究対象である．

PF 部分多様体の重要な例が，ゲージ変換群作用の軌道として与えられる．G を連結コンパクト・リー群とする．G のリー代数 $\mathfrak{g}$ に Ad 不変計量を固定し，対応する G の両側不変計量を定める．$V_{\mathfrak{g}} := H^0([0,1], \mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ に値をもつソボレフ H^0 道 (i.e. L^2 道) 全体

本稿は，研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2019」(2019 年 12 月 25 日〜12 月 26 日，東京理科大学神楽坂キャンパス) の講演録である．本研究は，特別研究員奨励費 (課題番号:18J14857, 学振 DC2)，及び大阪市立大学数学研究所 (文科省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・共創による新たな国際的研究・教育拠点」) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 53C40
キーワード：ヒルベルト空間の PF 部分多様体，極小部分多様体，対称性
* 〒558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学 大学院理学研究科 数物系専攻 (数学分野)
e-mail: `mmasahiro0408@gmail.com`
web: `https://sites.google.com/view/mmorimoto`

の成すヒルベルト空間を表す．$\mathcal{G} := H^1([0,1], G)$ で G に値をもつソボレフ H^1 道全体が成すヒルベルト・リー群を表す．$V_\mathfrak{g}$ への左 $\mathcal{G}$ 作用を，**左ゲージ変換**

$$g * u := gug^{-1} - g'g^{-1}, \qquad g \in \mathcal{G},\ u \in V_\mathfrak{g} \tag{1}$$

で定義する．H を $G \times G$ の閉部分群とする．$\mathcal{G}$ のリー部分群 $P(G,H)$ を

$$P(G,H) := \{g \in \mathcal{G} \mid (g(0), g(1)) \in H\}$$

で定義する．部分群 $P(G,H)$ の $V_\mathfrak{g}$ 上の誘導作用を **$P(G,H)$ 作用** ([18]) と呼ぶ．$P(G,H)$ 作用の各軌道は，$V_\mathfrak{g}$ の PF 部分多様体となる ([18])．

より一般に，PF 部分多様体は**平行移動写像** ([6]) を用いて構成できる．まず写像 $E : V_\mathfrak{g} \to \mathcal{G}$ を常微分方程式

$$\begin{cases} E_u^{-1} E_u' = u \\ E_u(0) = e \end{cases}$$

の一意解として定義する．平行移動写像 $\Phi : V_\mathfrak{g} \to G$ は，

$$\Phi(u) := E_u(1), \quad u \in V_\mathfrak{g}$$

で定義される．

命題 2 ([19])**.**
(i) $\Phi : V_\mathfrak{g} \to G$ はリーマン沈め込み写像である．
(ii) 部分群 $P(G, \{e\} \times \{e\})$ は $V_\mathfrak{g}$ の各ファイバーに自由かつ推移的に作用する．
(iii) $\Phi : V_\mathfrak{g} \to G$ は主 $P(G, \{e\} \times \{e\})$ 束である．
(iv) $\Phi : V_\mathfrak{g} \to G$ の任意の 2 つのファイバーは $V_\mathfrak{g}$ の等長変換で合同である．

次の命題により，PF 部分多様体が平行移動写像を通して多数得られる．

命題 3 ([19])**.** G の閉部分多様体 N に対し，逆像 $\Phi^{-1}(N)$ は $V_\mathfrak{g}$ の PF 部分多様体である．

平行移動写像 Φ により，$P(G,H)$ 作用を次のように理解できる．リー群準同型写像 $\Psi : \mathcal{G} \to G \times G$ を $\Psi(g) = (g(0), g(1))$ で定義する．G 上の左 H 作用を

$$(b_1, b_2) \cdot a := b_1 a b_2^{-1}, \quad a \in G,\ (b_1, b_2) \in H \tag{2}$$

で定義する．このとき，任意の $g \in P(G,H)$, 任意の $u \in V_\mathfrak{g}$ に対して

$$\Phi(g * u) = \Psi(g) \cdot \Phi(u)$$

が成り立つ ([18])．つまり，次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & \supset & P(G,H) & \curvearrowright & V_\mathfrak{g} & \supset & P(G,H) * u \\ \Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\ G \times G & \supset & H & \curvearrowright & G & \supset & H \cdot \Phi(u) \end{array}$$

更に，次が成り立つ．

$$P(G,H) * u = \Phi^{-1}(H \cdot \Phi(u))$$

つまり，$P(G,H)$ 作用の各軌道は，H 作用の各軌道の平行移動写像 Φ による逆像である．

G の閉部分群 K を考えることで，平行移動写像 Φ を次のように一般化できる．G/K で法等質計量を備えたコンパクト・リーマン等質空間を表す．自然な射影 $\pi: G \to G/K$ はリーマン沈め込み写像である．G/K **上の平行移動写像**とは，合成写像 $\Phi_K := \pi \circ \Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G \to G/K$ で定義される G/K 上のリーマン沈め込み写像である．特に $K = \{e\}$ のとき $\Phi = \Phi_K$ である．命題 2，命題 3 と同様の事実が，Φ_K に対しても成り立つ．

一般に，G/K の閉部分多様体 N と，逆像として得られる PF 部分多様体 $\Phi_K^{-1}(N)$ との幾何学的関係を調べることは重要な問題である ([19], [6], [3])．

3. PF 部分多様体の極小性と対称性

一般に，PF 部分多様体の形作用素はトレースクラスに属さないため，平均曲率が自然に定義されない．現在のところ，平均曲率の定義が 3 通りあり，対応して極小 PF 部分多様体の定義が 3 通りある．

定義 ([6], [3], [7])．M を PF 部分多様体とする．法ベクトル $\xi \in T^\perp M$ に対し，ξ 方向の形作用素を A_ξ で表し，その固有値を $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots < 0 < \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ と表す．

(i) A_ξ が **ζ-正則化可能** ([6]) であるとは，任意の $s > 1$ に対して $\sum_k \lambda_k^s + \sum_k |\mu_k|^s < \infty$ かつ

$$\mathrm{tr}_\zeta A_\xi := \lim_{s \searrow 1} \left(\sum_k \lambda_k^s - \sum_k |\mu_k|^s \right)$$

が存在することをいう．このとき $\mathrm{tr}_\zeta A_\xi$ を ξ 方向の **ζ-正則化平均曲率**という．任意の $\xi \in T^\perp M$ に対して $\mathrm{tr}_\zeta A_\xi$ が ζ 正則化可能であるとき，M は **ζ-正則化可能**であるという．M が ζ-正則化可能かつ任意の $\xi \in T^\perp M$ に対して $\mathrm{tr}_\zeta A_\xi = 0$ が成り立つとき，M は **ζ-極小**であるという．

(ii) A_ξ が**正則化可能** ([3]) であるとは，$\mathrm{tr}\, A_\xi^2 < \infty$ かつ

$$\mathrm{tr}_r A_\xi := \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k)$$

が収束することをいう．このとき $\mathrm{tr}\, A_\xi$ を ξ 方向の**正則化平均曲率**という．任意の $\xi \in T^\perp M$ に対して A_ξ が正則化可能であるとき，M は**正則化可能**であるという．M が正則化可能かつ任意の $\xi \in T^\perp M$ に対して $\mathrm{tr}_r A_\xi = 0$ が成り立つとき，M は **r-極小**であるという．

(iii) 形作用素 A_ξ の相異なる固有値を $\{\kappa_k\}_{k=1}^\infty$ を

$$|\kappa_k| > |\kappa_{k+1}| \quad \text{または} \quad \kappa_k = -\kappa_{k+1} \geq 0$$

を満たすように順序付けする．各 κ_k に対しその重複度を m_k で表す．級数

$$\mathrm{tr}_f A_\xi := \sum_{k=1}^{\infty} m_k \kappa_k$$

が収束するとき，これを ξ 方向の**形式的平均曲率**と呼ぶ．各 $\xi \in T^\perp M$ に対して $\mathrm{tr}_f A_\xi = 0$ が成り立つとき M は**形式的極小** (**f-極小**) ([7]) であるという．

平行移動写像を通して得られるPF部分多様体に対しては，上の(i)，(ii)が同値であることが従う([6], [3])．

冒頭で述べた鏡映，弱鏡映，オースティア，アリッド部分多様体の概念は，PF部分多様体に対しても同様に定義することができる：

定義. Mを可分ヒルベルト空間VのPF部分多様体とする．Mが**鏡映**であるとは，MがVの対合的等長変換の固定点集合の連結成分であることをいう．Mが**弱鏡映** ([4])であるとは，各点$p \in M$の各法ベクトルξに対し，Vの等長変換ν_ξであって$\nu_\xi(p) = p$, $d\nu_\xi(\xi) = -\xi$, $\nu_\xi(M) = M$を満たすものが存在することをいう．Mが**オースティア** ([2])であるとは，各法方向の主曲率が重複度込みで(-1)倍不変であることをいう．Mが**アリッド** ([16])であるとは，各点$p \in M$の各法ベクトル$\xi \neq 0$に対し，Vの等長変換φ_ξであって$\varphi_\xi(p) = p$, $d\varphi_\xi(\xi) \neq \xi$, $\varphi_\xi(M) = M$を満たすものが存在することをいう．

定義から次の関係が従う：

$$\begin{array}{ccccc} \text{鏡映PF} & & \text{弱鏡映PF} & \nearrow & \text{オースティアPF部分多様体} \\ \text{部分多様体} & \Rightarrow & \text{部分多様体} & \searrow & \text{アリッドPF部分多様体} \end{array}$$

一般に，オースティアPF部分多様体やアリッドPF部分多様体がζ-極小，r-極小，f-極小であるかは明らかでない．けれども，平行移動写像を通して得られるPF部分多様体に対して，オースティアPF部分多様体とアリッドPF部分多様体が共にζ-極小かつr-極小であることが従う．

G/Kをコンパクト法等質空間，$\Phi_K : V_\mathfrak{g} \to G/K$を平行移動写像とする．$G/K$の閉部分多様体$N$と，逆像として得られるPF部分多様体$\Phi_K^{-1}(N)$の幾何学的関係の一つとして，次の結果が知られている：

命題 4 ([6], [3]). Nが極小ならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$はζ-極小かつr-極小である．

しかし，Nの対称性と$\Phi_K^{-1}(N)$の対称性がどのように関係するかは明らかでない．具体的には，次の4つの問題がある：

問題.
(i) Nが鏡映ならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は鏡映か？
(ii) Nが弱鏡映ならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は弱鏡映か？
(iii) Nがオースティアならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$はオースティアか？
(iv) Nがアリッドならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$はアリッドか？

これら4つの問題について，研究した結果を次節で述べる．

4. 主結果

まず4.1節，4.2節において，基本的結果を述べる．その上で，4.3節～4.6節において，上記4つの問題に関する研究結果を述べる．最後に4.7節において，等質極小部分多様体に関する有限次元・無限次元の比較結果を述べる．

以下，特に断りの無い限り，連結コンパクト・リー群Gには両側不変計量を固定する．

4.1. 全測地性について

次の定理より，平行移動写像の逆像として得られるPF部分多様体は，殆どの場合に全測地的でないことが分かる．

定理 1 ([9]). Gを連結コンパクト・リー群，Nを単位元$e \in G$を通るGの閉部分多様体とする．次は同値：

(i) $\Phi^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$の全測地的PF部分多様体である．

(ii) NはGの閉部分群であって，$T_e^{\perp}N$は$\mathfrak{g}$の中心に含まれる．

系. Gを連結コンパクト半単純リー群とする．このときGの任意の閉部分多様体Nに対して，逆像$\Phi^{-1}(N)$は全測地的でない．特に，平行移動写像$\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$の各ファイバーは全測地的でない．

系. G/Kをコンパクト法等質空間とする．Gが半単純と仮定する．このときG/Kの任意の閉部分多様体Nに対して，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は全測地的でない．特に，平行移動写像$\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \to G/K$の各ファイバーは全測地的でない．

4.2. 平行移動写像の内在的対称性

定義 ([9]). ヒルベルト空間$V_{\mathfrak{g}} := H^0([0,1],\mathfrak{g})$上の線形直交変換$\mathfrak{r}$を

$$\mathfrak{r}(u)(t) := -u(1-t), \qquad u \in V_{\mathfrak{g}}$$

で定義する．これを$V_{\mathfrak{g}}$の**標準鏡映**と呼ぶ.

Gを連結コンパクト・リー群，$\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$を平行移動写像とし，$\mathfrak{i}$で$G$上の等長変換$G \to G,\, a \mapsto a^{-1}$を表す．定義から，次の図式は可換となる：

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\mathfrak{r}} & V_{\mathfrak{g}} \\ {\scriptstyle \Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ G & \xrightarrow{\mathfrak{i}} & G \end{array}$$

標準鏡映を用いて，次が証明される：

定理 2 ([9]). Gを連結コンパクト・リー群，Hを$G \times G$の閉部分群で条件$\mathfrak{i}(H \cdot e) = H \cdot e$を満たすとする．逆像$\Phi^{-1}(H \cdot e) = P(G,H) * \hat{0}$は$V_{\mathfrak{g}}$の弱鏡映PF部分多様体である．

特にGの閉部分群Kに対し$H := \{e\} \times K$を考えることで，次を得る：

系. G/Kをコンパクト法等質空間とする．平行移動写像$\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \to G/K$の各ファイバーは，$V_{\mathfrak{g}}$の弱鏡映PF部分多様体である．

系. Gを連結コンパクト・リー群とする．平行移動写像$\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$の各ファイバーは，$V_{\mathfrak{g}}$の弱鏡映PF部分多様体である．

4.3. 鏡映性について

ヒルベルト空間の平坦性から，PF部分多様体Mが鏡映であることは，Mが全測地的であることと同値である．従って定理1の系から，NがG/Kの鏡映部分多様体であっても，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は鏡映PF部分多様体とはならないことが分かる．

4.4. 弱鏡映性について

適切な仮定のもとで,「Nが弱鏡映ならば$\Phi_K^{-1}(N)$も弱鏡映」が成り立つ：

定理 3 ([9]). Gを連結コンパクト半単純リー群とし，$\mathfrak{g}$のKilling形式から定まる両側不変計量を定める．KをGの対称部分群とし，対(G,K)は効果的と仮定する．NがG/Kの弱鏡映部分多様体ならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$の弱鏡映PF部分多様体である．

系. G/K を既約なコンパクト型対称空間とする．N が G/K の弱鏡映部分多様体ならば，逆像 $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_\mathfrak{g}$ の弱鏡映 PF 部分多様体である．

例 1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．$n-1$ 次元標準球面の直積 $N := S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)$ は，半径 $\sqrt{2}$ の $2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の弱鏡映部分多様体となる ([4])．$p \in N$ を固定し，$S^{2n-1}(\sqrt{2}) = SO(2n)/SO(2n)_p$，$N = (SO(n) \times SO(n)) \cdot p$ と見做す．定理 3 を適応することで，弱鏡映 PF 部分多様体 $P(SO(2n), SO(n) \times SO(n) \times SO(2n)_p) * \hat{0}$ が得られる．

例 2. 井川-酒井-田崎 [4] は s 表現の軌道であって標準球面の弱鏡映部分多様体となるものを分類した．彼らの結果に定理 3 を適応することで，弱鏡映 PF 部分多様体の例が次のように得られる：(U, L) を（既約な）コンパクト・リーマン対称対とする．L が連結と仮定する．$\mathfrak{u} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$ で標準分解を表す．$\mathrm{Ad} : L \to SO(\mathfrak{p})$ でイソトロピー表現を表す．$x \in \mathfrak{p}$ を通る軌道 $\mathrm{Ad}(L) \cdot x$ が球面 $S(\|x\|)$ の弱鏡映部分多様体ならば，軌道 $P(SO(\mathfrak{p}), \mathrm{Ad}(L) \times SO(\mathfrak{p})_x) * \hat{0}$ は $V_{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}$ の弱鏡映 PF 部分多様体である．

例 3. 榎吉 [1] は，グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\,\mathbb{O}) \cong SO(7)/SO(3) \times SO(4)$ 上の例外型リー群 G_2 作用が，唯一つの弱鏡映主軌道を持つことを示した．定理 3 を適応することで，$V_{\mathfrak{o}(7)}$ の弱鏡映 PF 部分多様体 $P(SO(7), G_2 \times (SO(3) \times SO(4))) * \hat{0}$ が得られる．

$\bar{M}$ を有限次元リーマン多様体，M を $\bar{M}$ にはめ込まれた部分多様体とする．$\mathfrak{G}$ を等長変換群 $I(\bar{M})$ の部分群とする．M の各法ベクトル ξ に対して，ξ に関する鏡映 ν_ξ であって $\mathfrak{G}$ に属するものが存在するとき，M を $\bar{M}$ の $\mathfrak{G}$-弱鏡映部分多様体と呼ぶことにする．特に $\mathfrak{G} = I(\bar{M})$ のとき，$\mathfrak{G}$-弱鏡映部分多様体は通常の弱鏡映部分多様体に他ならない．ヒルベルト空間の PF 部分多様体に対しても同様の概念が定義できる．

定理 4 ([9])**.** (i) G を連結コンパクト・リー群，N を G の閉部分多様体とする．次は同値：

(a) N は G の $(G \times G)$-弱鏡映部分多様体，
(b) $\Phi^{-1}(N)$ は $V_\mathfrak{g}$ の $\mathcal{G}$-弱鏡映 PF 部分多様体．

(ii) G/K をコンパクト法等質空間，N を G/K の閉部分多様体とする．次は同値：

(a) N は G/K の G-弱鏡映部分多様体，
(b) $\pi^{-1}(N)$ は G/K の $(G \times K)$-弱鏡映部分多様体，
(c) $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_\mathfrak{g}$ の $P(G, G \times K)$-弱鏡映 PF 部分多様体．

例 4. K_1, K_2 を G の連結対称部分群とする．大野 [11] は可換 Hermann 作用 $K_2 \curvearrowright G/K_1$, $K_2 \times K_1 \curvearrowright G$ の軌道が弱鏡映部分多様体となる十分条件を与えた．軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot a$ がその条件を満たすとする．定理 4 より，$u \in \Phi^{-1}(a)$ を通る軌道 $P(G, K_2 \times K_1) * u$ は $V_\mathfrak{g}$ の弱鏡映 PF 部分多様体である．

例 5. σ を G の有限位数自己同型，G^σ をその固定点集合，$G(\sigma) := \{(a, \sigma(a)) \mid a \in G\}$ とする．木村-間下 [5] は Cartan 埋め込み $G/G^\sigma \to G$, $aG^\sigma \mapsto a\sigma(a)^{-1}$ の像が G の弱鏡映部分多様体となる例を与えた．そのような弱鏡映部分多様体に対し定理 4 を適応することで，$V_\mathfrak{g}$ の弱鏡映 PF 部分多様体 $P(G, G(\sigma)) * \hat{0}$ が得られる．

4.5. オースティア性について

一般に，部分多様体 N と逆像 $\Phi_K^{-1}(N)$ との主曲率関係 ([7]) が複雑であるため，オースティア性を判断することが難しい．G/K が球面であれば，次が従う．

定理 5 ([10]). 半径$r>0$のn次元球面$S^n(r)$にはめ込まれた部分多様体Nを考える．$(G,K):=(SO(n+1),SO(n))$，$S^n(r)=G/K$とおく．このとき次は同値である：
(i) Nは$S^n(r)$のオースティア部分多様体,
(ii) $\pi^{-1}(N)$はGのオースティア部分多様体,
(iii) $\Phi_K^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$のオースティアPF部分多様体.

例 6. 井川-酒井-田崎 [4] はs表現の軌道であって標準球面のオースティア部分多様体となるものを分類した．彼らの結果に定理5を適応することで，上の例2と同様にして，$V_{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}$のオースティアPF部分多様体が$P(G,H)$軌道として多数得られる.

4.6. アリッド性について

弱鏡映の場合と同様に,「Nがアリッドならば$\Phi_K^{-1}(N)$もアリッド」が成り立つ：

定理 6 ([10]). Gを連結コンパクト半単純リー群とし$\mathfrak{g}$のKilling形式から定まる両側不変計量を定める．KをGの対称部分群とし，対(G,K)は効果的と仮定する．NがG/Kのアリッド部分多様体ならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$のアリッドPF部分多様体である.

系. G/Kを既約なコンパクト型対称空間とする．NがG/Kのアリッド部分多様体ならば，逆像$\Phi_K^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$のアリッドPF部分多様体である.

例 7. $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 3}$とする．$\bar{M}:=S^{mn-1}(\sqrt{m})\subset\mathbb{R}^{mn}$とおく．$M$を$n-1$次元標準球面$S^{n-1}(1)$の$m$個直積$S^{n-1}(1)\times\cdots\times S^{n-1}(1)$で定義する．このとき$M$は$\bar{M}$のアリッド部分多様体であってオースティア部分多様体ではない(従って弱鏡映部分多様体ではない) ([16])．$(G,K):=(SO(mn),SO(mn-1))$，$M=G/K$とおく．定理5, 及び定理6より，$\Phi_K^{-1}(M)$は$V_{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}$のアリッドPF部分多様体であってオースティアPF部分多様体ではない(従って弱鏡映PF部分多様体ではない).

$\bar{M}$を有限次元リーマン多様体，Mを$\bar{M}$にはめ込まれた部分多様体とする．$\mathfrak{G}$を等長変換群$I(\bar{M})$の部分群とする．Mの各法ベクトルξに対して，ξに関する等長変換φ_ξであって$\mathfrak{G}$に属するものが存在するとき，Mを$\bar{M}$の$\mathfrak{G}$-アリッド部分多様体と呼ぶことにする．特に$\mathfrak{G}=I(\bar{M})$のとき，$\mathfrak{G}$-アリッド部分多様体は通常のアリッド部分多様体に他ならない．定義から$\mathfrak{G}$-弱鏡映部分多様体は$\mathfrak{G}$-アリッド部分多様体である．ヒルベルト空間のPF部分多様体に対しても同様の概念が定義できる.

定理 7 ([10]). (i) Gを連結コンパクト・リー群，NをGの閉部分多様体とする．次は同値：
(a) NはGの$(G\times G)$-アリッド部分多様体,
(b) $\Phi^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$の$\mathcal{G}$-アリッドPF部分多様体.
(ii) G/Kをコンパクト法等質空間，NをG/Kの閉部分多様体とする．次は同値：
(a) NはG/KのG-アリッド部分多様体,
(b) $\pi^{-1}(N)$はG/Kの$(G\times K)$-アリッド部分多様体,
(c) $\Phi_K^{-1}(N)$は$V_{\mathfrak{g}}$の$P(G,G\times K)$-アリッドPF部分多様体.

例 8. (U,L)をコンパクト・リーマン対称対とする．Lが連結と仮定する．$\mathfrak{u}=\mathfrak{l}+\mathfrak{p}$で標準分解，$\mathrm{Ad}:L\to SO(\mathfrak{p})$でイソトロピー表現を表す．$S$で$\mathfrak{p}$の標準球面を表す．$x\in S$を通る軌道$\mathrm{Ad}(L)\cdot x$が，$S$上$\mathrm{Ad}(L)$作用の孤立軌道と仮定する．武富の定理[16]からそれはSの$\mathrm{Ad}(L)$-アリッド部分多様体である．定理7を適応することで，$V_{\mathfrak{o}(\mathfrak{p})}$のアリッドPF部分多様体$P(SO(\mathfrak{p}),\mathrm{Ad}(L)\times SO(\mathfrak{p})_x)*\hat{0}$が得られる.

4.7. 等質極小部分多様体について

本研究で得られた極小 PF 部分多様体の例は，全てあるリー群作用の軌道であり，定理 1 からそれらは全測地的でない．よって次が分かる：

系. 無限次元ヒルベルト空間には，全測地的でない等質極小部分多様体が多数存在する．

ところが，有限次元の場合において，次の結果が知られている．

定理 8 (Di Scala [14])**.** 有限次元ユークリッド空間の任意の等質極小部分多様体は，全測地的である．

従って上の系は，有限次元部分多様体論と無限次元部分多様体論の一つの決定的差を示すと言える．

参考文献

[1] K. Enoyoshi, *Principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a Grassmann manifold* $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})$ *by the* G_2*-action*, to appear in Tokyo J. Math.

[2] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47-157.

[3] E. Heintze, X. Liu, C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem*, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[4] O. Ikawa, T. Sakai, H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds.* J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437-481.

[5] T. Kimura, K. Mashimo, *Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds*, a preprint.

[6] C. King, C.-L. Terng, *Minimal submanifolds in path space*, Global analysis in modern mathematics, 253-281, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[7] N. Koike, *On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space*, Japan. J. Math. (N.S.) **28** (2002), no. 1, 61-80.

[8] Dominic S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, JDG **8** (1973), 153-160.

[9] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, arXiv:1904.08328.

[10] M. Morimoto, *Austere and arid properties for PF submanifolds in Hilbert spaces*, in preparation.

[11] S. Ohno, *A sufficient condition for orbits of Hermann actions to be weakly reflective*, Tokyo J. Math. **39** (2016), no. 2, 537-564.

[12] R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology 2 (1963), 299-340.

[13] F. Podestà, *Some remarks on austere submanifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **11** (1997), no. 2, suppl., 157-160.

[14] A. J. Di Scala, *Minimal homogeneous submanifolds in Euclidean spaces*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), no. 1, 15-18.

[15] S. Smale, *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem*, Ann. of Math. (2) 80 (1964), 382-396.

[16] Y. Taketomi, *On a Riemannian submanifold whose slice representation has no nonzero fixed points*, Hiroshima Math. J. **48** (2018), no. 1, 1-20.

[17] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space.* JDG **29** (1989), no. 1, 9-47.

[18] C.-L. Terng, *Polar actions on Hilbert space.* J. Geom. Anal. **5** (1995), no. 1, 129-150.

[19] C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces.* JDG **42** (1995), no. 3, 665-718.