卒業論文

高フィネス光共振器を用いた高精度な光周波数差の測定

指導教員：井上　慎　准教授

平成 26 年 2 月提出

東京大学工学部　物理工学科
03-120518　　赤羽　健二
03-120529　　小野　貴晃

目次

第 1 章

序論

1.1　本研究の背景

1.1.1　レーザーの開発とレーザー冷却技術の発展

レーザーは光技術と分光学に革新をもたらし、科学と技術の諸分野に大きな波及を与えている。レーザー (laser) とは、Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation の頭文字を集めて作られた語である。レーザーの元となった発明はメーザー (Maser, Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) であり、これは 1954 年に C.H.Towns が開発したものである。C.H.Towns と A.L.Schawlow がマイクロ波ではなく光によっても同様の発振が得られることを示唆した。1960 年には世界初のレーザーが実現された [1]。その後は気体レーザー、半導体レーザー、固体レーザーなどの様々なレーザーが発明されてきた。

技術が発展するにつれて、レーザーによる原子の冷却技術も確立された。1997 年には、Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji, William D. Phillips が"レーザー光を用いて原子を冷却および捕捉する手法の開発"というテーマでノーベル賞を受賞した [1]。レーザー冷却を用いた研究としては、1995 年には JILA の Eric Cornell, Carl Wieman のグループが ^{87}Rb の希薄原子気体で、Wolfgang Ketterle のグループが ^{23}Na の希薄原子気体でそれぞれ Bose-Einstein 凝縮 (BEC) を達成した [2] [3]。彼らは、従来のレーザー冷却技術に加え、エネルギーの高い原子を選択的に取り除く蒸発冷却を用いたことで BEC を達成した。さらに、1997 年には BEC 同士の干渉縞が確認された [4]。なお、Eric Cornell, Carl Wieman, Wolfgang Ketterle は BEC の研究に関してノーベル賞を受賞した [1]。BEC が実現された後も、冷却原子系の研究は進んでいる。冷却原子系の応用としては、超流動-Mott 絶縁体相転移 [5]、BEC-BCS crossover[6]、光格子時計 [7] などがある。

1.1.2　本研究室での研究内容

井上研究室では、極低温の極性分子を作り出すことを目的としている。井上研究室では二つのグループがある。一つは Feshbach 共鳴 [8] を用いて極低温の ^{41}K^{87}Rb 分子の性質を研究している。もう一つのグループでは光会合 [9] により生成した ^{41}K^{87}Rb 分子の分光を行っている。

1.2　本研究の意義

1.2.1　レーザー周波数差の高精度測定

一般的なレーザーの周波数を測定するための方法としては波長計を用いればよい。しかし、赤外光のレーザーの周波数はおよそ 300THz であるのに対して、一般的な波長計の測定精度は 100MHz 程度である。つまり、波長計による周波数測定は 6 桁ほどの精度でしか測定できず、これ以上の精度を求めるのは困難である。

レーザーの周波数を高精度で測定するための手段の一つに、光周波数コムがある。光周波数コムとは、フェムト秒のモードロックされたレーザーにマイクロ波の等間隔なスペクトルを実現する手法である [10]。周波数スペクトルと未知の周波数のレーザー光を干渉させることで、レーザー光の正確な周波数を測定することができ、その精度はマイクロ波の精度に依存する。実際に、光周波数コムは精密な分光に用いられている [11][12]。現在の Cs 原子を用いた SI 単位系の時間の基準はおよそ 10^{-15} の不確定性を持つため [13]、マイクロ波の精度もこれに依存してしまう。しかし、光格子時計 [7] を時間の基準とすれば、10^{-18} の不確かさで周波数を測定することが可能となると期待されている。

2005 年には、John L. Hall と Theodor W. Hänsch が”光周波数コム技術などのレーザーを用いた精密な分光法の発展への貢献”によりノーベル賞を受賞している [1]。

しかし、本実験では光周波数コムを用いずに高精度な周波数差測定を行うことができないかと考えた。そのために、ファブリーペロー光共振器 (cavity) の共振周波数間隔 (縦モード間隔) を測定した。cavity の詳しい説明については 2.2 節を参照されたい。

cavity のミラーの分散を無視すれば cavity の縦モード間隔が一定となるはずなので、縦モード間隔を精密に測定することで、レーザーの絶対周波数をそれと同じ精度で測定することが可能となる。しかし現実的には、ミラーの分散の影響で縦モード間隔が一定とならないため、絶対周波数を決定することは難しい。本実験では、ミラーの分散の影響を考慮して縦モード間隔を測定することで、縦モード間隔が一定でない環境においてもレーザーの周波数差を測定することは可能ではないかと考えた。cavity の共鳴周波数間隔をおよそ 9 桁で測定し、レーザーの周波数差をそれと同じ精度で測定することを目標とした。この測

定に成功すれば、通常精密な測定が困難な 1THz 程度のレーザーの周波数差はおよそ 1kHz の精度で決定することが可能となる。この測定により、先行研究 [14] で求められた分子の振動準位間のエネルギー差をより高精度で測定することも可能となる。

先行研究 [14] では、^{41}K^{87}Rb 分子の $X^1\Sigma^+$ 準位と $b^3\Pi_{0+}$ 準位間の遷移を分光した。$X^1\Sigma^+(v''=0) \rightarrow b^3\Pi_{0+}(v'=0)$ の遷移は 291.4172(2)THz、$X^1\Sigma^+(v''=0) \rightarrow b^3\Pi_{0+}(v'=1)$ の遷移は 293.6336(2)THz、$X^1\Sigma^+(v''=1) \rightarrow b^3\Pi_{0+}(v'=0)$ の遷移は 289.2034(2)THz であることが測定されている。この実験ではレーザーの絶対周波数の測定に波長計を用いているため、精度はおよそ 200MHz である。そのため、数 kHz の精度で分子の分光をできたにもかかわらず、波長計の精度により周波数の測定精度は数百 MHz である。$b^3\Pi_{0+}(v''=0)$ と $b^3\Pi_{0+}(v'=1)$ のエネルギー差は、二つの遷移のエネルギー差から求めることができ、2216.5(2)GHz となる。これは高々 4 桁の精度である。このエネルギー差は本実験によってより高精度で測定することが可能となるはずである。

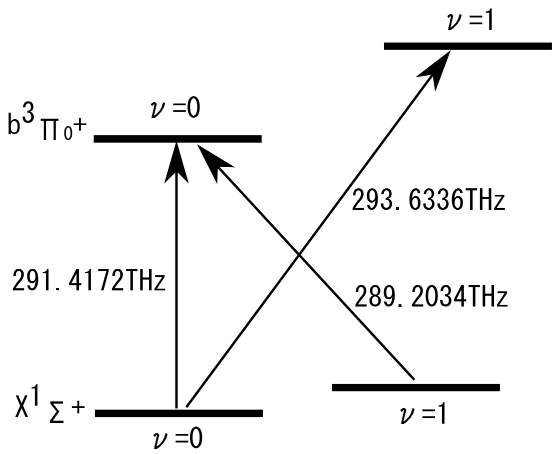


図 1.1 $X^1\Sigma^+(v''=0)$、$b^3\Pi_{0+}(v'=0)$、$b^3\Pi_{0+}(v'=1)$ のエネルギー差を表したもの。

1.2.2 FSR の安定な cavity の作製

FSR を安定にするためには cavity の長さを一定に保つ必要がある。そのための手段の一つに、cavity のスペーサーに熱膨張の少ない素材を使うことが挙げられる。

熱膨張係数の小さい材料として、ULE(Ultra Low Expansion) ガラスがある。先行研究 [15] によると、ULE ガラスの熱膨張係数αは、5 ℃〜35 ℃の平均値で $\alpha = (0 \pm 30) \times 10^{-9}K^{-1}$ であり、室温付近で熱膨張係数が正から負に変化する。そのため、熱膨張係数のゼロ点が存在し、その近辺で温調をすることで実効的に $|\alpha| \leq 10^{-9}K^{-1}$ となる。cavity の長さが 10cm で室温が 1K 変化したときの FSR の変化は 1.5Hz となる。一方で、他の熱膨張係数が小さい物質としてスーパーインバー (熱膨張係数αは $\alpha \simeq 10^{-7}K^{-1}$) を用いると、

同じ条件では FSR が 150Hz もずれてしまう。このことから ULE ガラスの熱膨張係数の小ささがわかる。

しかし、熱膨張係数の小さい ULE ガラスにも欠点がある。ULE ガラスは時間の経過とともに結晶化するので、長期的にはわずかに cavity の長さが変化して FSR がずれてしまう。そのため、ULE cavity にロックされたレーザーの周波数のドリフトの大きさは先行研究 [15] では 65mHz/s である。一日ごとに 5kHz、一年では 2MHz もレーザー周波数がドリフトしてしまうので、長期的に FSR が安定しているとは言えない。

そこで、本実験では ULE cavity よりも FSR が安定している cavity の作製を目指した。具体的には、cavity に PZT をつけてその PZT にフィードバックをすることで cavity 長を制御した。また、本実験では、cavity の材質として ULE ガラスではなくスーパーインバーを使用している。スーパーインバーの熱膨張係数 α は $\alpha \simeq 10^{-7}K^{-1}$ であり ULE よりも大きいが、価格が ULE と比べて大幅に安いというメリットがある。本実験の目標が達成されれば、単に FSR を安定化するだけでなく FSR の安定な cavity の作製におけるコストを抑えることも可能となる。

1.3　本論文の構成

本論文の構成は以下のようになっている。

第 1 章では、本研究の背景と目的を述べた。第 2 章では、cavity に関する基本的な理論および本実験で行う様々なロックの原理について解説する。第 3 章では、FSR の制御、測定のために本実験で使ったシステムについて述べる。具体的には、実験で使ったレーザーや cavity の性能、光学系の配置などについて説明している。また、実験によって得られたデータをまとめる。第 4 章では、本研究のまとめと今後の展望を述べる。

第 2 章

理論

2.1 ガウシアンビーム

自由空間を伝播する電磁場モードの展開の仕方のひとつにガウシアンモードによる展開がある。ここでは、マクスウェル方程式からガウシアンビームの方程式を導出し、性質を考察する。この導出には [23] を参照した。

屈折率 n の一様媒質中について考え、$\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \epsilon, \mu, c$ をそれぞれ電束密度、磁束密度、電場、磁場、誘電率、透磁率、真空中の光速とする。真電荷、真電流のない場合、マクスウェル方程式は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} \\ \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \end{cases} \tag{2.1}$$

と表される。これらから、電場の波動方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

と書き表される。ここで、電場が特定の方向に偏光しているとし、その向きの単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とする。すると、スカラー $E(\mathbf{r}, t)$ を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t)\mathbf{e} \tag{2.3}$$

とできる。さらに、電場が周波数 ω で振動する単色な電場であるとすれば、

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r})e^{i\omega t} \tag{2.4}$$

と書ける。これを波動方程式 (2.2) に代入することで、

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0 \qquad (k^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2}) \tag{2.5}$$

を得る。光の伝播する方向を z 方向とすることで

$$E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r})e^{-ikz} \tag{2.6}$$

となる。そして、近軸近似を用いることで、

$$\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} = 0 \tag{2.7}$$

とできるので、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E(\mathbf{r})}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{E_0(\mathbf{r})e^{-ikz}\right\} \\
&= \left\{-k^2 E_0(\mathbf{r}) - 2ik\frac{\partial}{\partial z}E_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_0(\mathbf{r})\right\}e^{-ikz} \\
&\simeq \left\{-k^2 E_0(\mathbf{r}) - 2ik\frac{\partial}{\partial z}E_0(\mathbf{r})\right\}e^{-ikz}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

が得られる。よって波動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_0(\mathbf{r}) - 2ik\frac{\partial}{\partial z}E_0(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.9}$$

と表される。この解は一般に知られていて [16]

$$\begin{aligned}
E_{lm}(\mathbf{r}) =& E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right)H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right) \\
&\times exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\omega(z)^2} - i\left\{k\left(\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + z\right) - (l+m+1)\eta(z)\right\}\right] \\
&\qquad (l, m = 0, 1, 2, \cdots)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\omega(z) = \omega_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{2.11}$$

$$R(z) = \frac{z^2 + {z_R}^2}{z} \tag{2.12}$$

$$\eta(z) = arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \tag{2.13}$$

$$z_R = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda} \tag{2.14}$$

となる。ただし $H_n(x)$ は n 次のエルミート多項式である。

この $E_{lm}(\mathbf{r})$ のことを TEM_{lm} モードのガウシアンビームと呼ぶ。TEM とは Transeverse Electro Magnetic の略である。$l=m=0$ のとき、

$$E_{00}(\mathbf{r}) = E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\omega(z)^2} - i\left\{k\left(\frac{x^2+y^2}{2R(z)}+z\right)-\eta(z)\right\}\right] \tag{2.15}$$

である。このモードのことを基本ガウシアンビームという。このモードは強度分布がガウシアン分布となるのでレーザー光学では重要視される。光が TEM_{00} モードのみからなる場合は空間モード (横モード) がシングルモードであるという。実際の光は様々な l,m のモードの光の重ね合わせであり、このことを空間モードがマルチモードであるという。l,m の値が異なるモード同士は干渉しない。なお、TEM_{00} において、式 (2.11)、(2.12) における ω (z)、$R(z)$ はそれぞれ位置 z におけるビーム径、波面の曲率半径を表す。式 (2.14) の z_R のことをレイリー長という。

2.2 cavity

本実験では光共振器 (cavity) を使用する。ここでは、その基本的な性質について説明する。理論的な詳細は [16],[23] に基づいている。

2.2.1 cavity の安定条件

曲率半径 r_1, r_2 の二枚の球面ミラーを貼り合わせた長さ l の光共振器 (cavity) を考える。この共振器を一周する時の ABCD 行列 (付録 A 節を参照) は、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\frac{4l}{r_1}-\frac{2l}{r_2}+\frac{4l^2}{r_1r_2} & 2l-\frac{2l^2}{r_2} \\ -\frac{2}{r_1}-\frac{2}{r_2}+\frac{4l}{r_1r_2} & 1-\frac{2l}{r_2} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.16}$$

となる。ビームパラメーター q の光が共振器を一周してまた同じ状態 q に戻るとすれば、式 (A.3) より、

$$q = \frac{Aq+B}{Cq+D} \tag{2.17}$$

となる。これを変形することで、

$$B\left(\frac{1}{q}\right)^2 + (A-D)\left(\frac{1}{q}\right) - C = 0 \tag{2.18}$$

となる。ビーム径が発散しないための条件として、$Im(\frac{1}{q}) \neq 0$ かつ $B \neq 0$ となる。よって

$$\begin{aligned} (A-D)^2 + 4BC &< 0 \\ (A+D)^2 - 4 &< 0 \qquad (\because AD - BC = 1) \\ -2 < A + D &< 2 \\ 0 < \left(\frac{l}{r_1} - 1\right)\left(\frac{l}{r_2} - 1\right) &< 1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

を得る。この領域の外においては、ビーム径が無限大に発散するため、共振器中から光が漏れて光強度のロスが大きくなる。

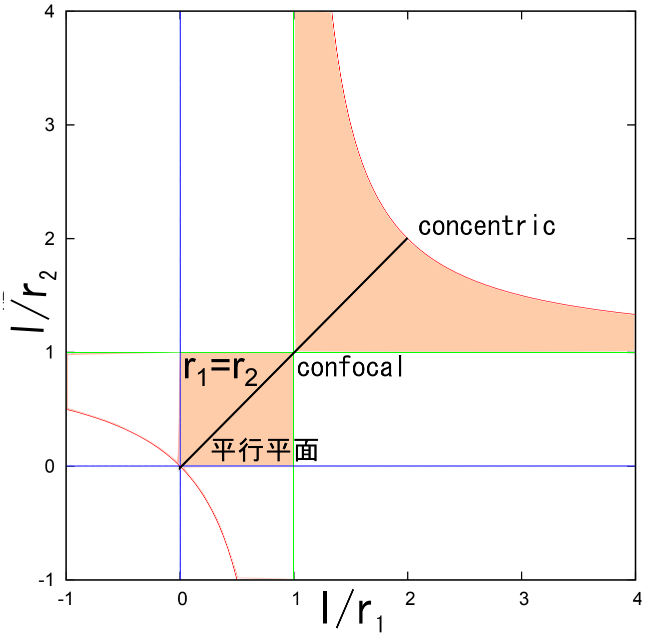


図 2.1　式 (2.19) の領域を表したもの。光は着色された領域の cavity にカップリングすることができる。黒の直線は、$r_1 = r_2$ の時を表している。なお、$\frac{l}{r_1} = \frac{l}{r_2} = 1$ となる cavity を共焦点 (confocal) な cavity、$\frac{l}{r_1} = \frac{l}{r_2} = 2$ となる cavity を共心 (concentric) な cavity という。

2.2.2　cavity の共鳴条件と Free Spectral Range

図 2.2 のような 2 枚のミラーを合わせた共振器 (cavity) を考える。2 枚のミラーのエネルギー反射率を R_1, R_2、共振器長を l(一周で 2l)、cavity 内での一周のロスを L とする。また、ミラーでのロスは考えないものとする (透過率を T として $R + T = 1$)。また、ミラーの分散の影響も無視する。cavity に入射する電場を E_i、透過する電場を E_t とする。

cavity を一周する際の光の位相変化をφとおくと、

$$\phi = 2\pi \frac{2ln}{\lambda} = 2\pi f \frac{2ln}{c} \tag{2.20}$$

図 2.2　cavity の入射光、反射光、透過光を図のようにおく。ミラーの反射率は R_1、R_2 であり、共振器を一往復する時のロスを L とした。ミラーの分散は無視する。

である。ただし、λ は光の波長、f は光の周波数であり、$\frac{c}{n}=f\lambda$ を満たす。このとき、

$$\begin{aligned}
E_t &= \sqrt{1-R_2}(1-L)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{1-R_1}E_i \\
&\quad +\sqrt{1-R_2}\left\{\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}\right\}(1-L)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{1-R_1}E_i \\
&\quad +\sqrt{1-R_2}\left\{\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}\right\}^2(1-L)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\phi}{2}}\sqrt{1-R_1}E_i+\cdots \\
&= \sqrt{(1-R_1)(1-R_2)}(1-L)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\phi}{2}}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}\right\}^j\right]E_i \\
&= \frac{\sqrt{(1-R_1)(1-R_2)}(1-L)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\phi}{2}}}{1-\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}}E_i \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

である。第一項は cavity 内で反射されずに透過したもの、第二項は 1 周して透過したもの、…、である。cavity への入射光強度を I_i、透過光強度を I_t とすると、$I_i \propto |E_i|^2$、$I_t \propto |E_t|^2$ より、

$$\begin{aligned}
\frac{I_t}{I_i} &= \frac{E_t^*E_t}{E_i^*E_i} \\
&= \frac{(1-R_1)(1-R_2)\sqrt{1-L}}{1+R_1R_2(1-L)-2\sqrt{R_1R_2(1-L)}cos\phi} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

である。同様に、cavity からの反射光の電場を E_r、強度を I_r とすると、

$$\begin{aligned}
E_r &= -\sqrt{R_1}E_i+(1-R_1)\sqrt{R_2(1-L)}e^{i\phi}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}\right\}^jE_i \\
&= -\sqrt{R_1}E_i+\frac{(1-R_1)\sqrt{R_2(1-L)}e^{i\phi}}{1-\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}}E_i \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\frac{I_r}{I_i}=R_1+\frac{(1-R_1^2)R_2(1-L)-2(1-R_1)\sqrt{R_1R_2(1-L)}cos\phi}{1+R_1R_2(1-L)-2\sqrt{R_1R_2(1-L)}cos\phi} \qquad (2.24)$$

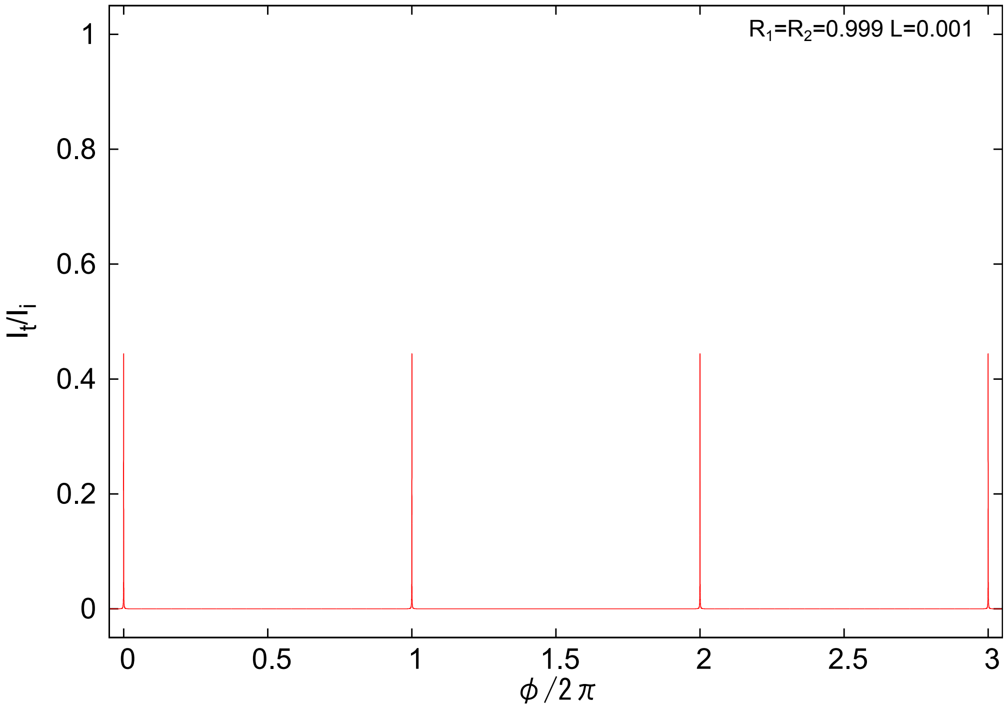


図 2.3　$R_1 = R_2 = 0.999$、$L = 0.001$ のときの cavity 一周の位相変化に対するレーザーの透過率をプロットしたもの。$\frac{\phi}{2\pi}$ が整数となる時に鋭いピークが表れていることが読み取れる。

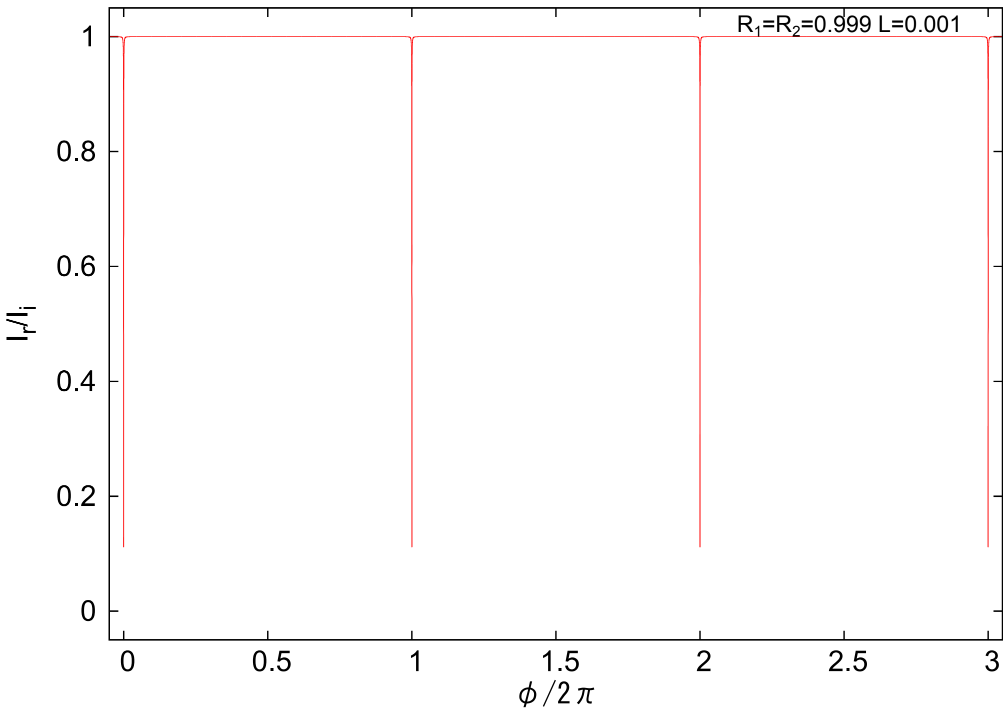


図 2.4　$R_1 = R_2 = 0.999$、$L = 0.001$ のときの cavity 一周の位相変化に対するレーザーの反射率をプロットしたもの。こちらも $\frac{\phi}{2\pi}$ が整数のときにピークが見られる。

を得る。

$R_1 = R_2 = 0.999$、$L = 0.001$ とし、透過率、反射率を一周の cavity 一周の位相変化φに対してプロットしたグラフが図 2.3、2.4 である。cavity 一周の位相変化φが特定の値のときにレーザーが cavity に共鳴しており (そのピークが櫛状なので共鳴の櫛と呼ぶことにする)、その共鳴条件は

$$\phi = 2\pi m (m \text{ は整数}) \tag{2.25}$$

である。

共鳴条件について、周波数 f を用いて表すことにする。ただし、ここではガウシアンビームの空間モードについては考えない。空間モードを考慮した場合については 2.2.4 節で示す。式 (2.20) より m 番目の共鳴周波数 f_m について

$$f_m = \frac{c}{2ln} \times m \tag{2.26}$$

を得る。ここで、FSR(Free spectral Range) を

$$\mathrm{FSR} \equiv \frac{c}{2ln} \tag{2.27}$$

により定義する。すると、

$$f_m = \mathrm{FSR} \times m \tag{2.28}$$

が得られる。つまり、cavity の m 番目の共鳴周波数は FSR の m 倍と表される。FSR は cavity の共鳴周波数間隔を表す。つまり、整数 i に対して、

$$f_{m+i} - f_m = i \times \mathrm{FSR} = i \times \frac{c}{2ln} \tag{2.29}$$

が成立する。

cavity の共鳴条件を波長λを用いて表すと、式 (2.20)、(2.25) より、

$$m\frac{\lambda}{2} = ln \tag{2.30}$$

である。つまり、cavity の共鳴条件は cavity の片道の光路長が光の半波長の整数倍となることであるといえる。

2.2.3 cavity の半値幅と finesse

次に、透過光の共鳴時のピークに対する周波数軸の FWHM(Full Width Half Maximum、半値全幅) を求めたい。FWHM について、透過率がピークの半分となる時の ϕ を ϕ_h、そ

の時の周波数を f_h とおくと、式（2.22）より、

$$\frac{1}{2}\frac{(1-R_1)(1-R_2)\sqrt{1-L}}{1+z^2-2z}=\frac{(1-R_1)(1-R_2)\sqrt{1-L}}{1+z^2-2zcos\phi_h} \quad (z\equiv\sqrt{R_1R_2(1-L)})$$

$$cos\phi_h=1-\frac{(1-z)^2}{2z}$$

$$\phi_h=2\pi N\pm arccos\left\{1-\frac{(1-z)^2}{2z}\right\} \quad (N\text{ は整数})$$

ここで、式 (2.20)、(2.28) より、

$$f=\frac{c}{4\pi ln}\phi=\frac{\mathrm{FSR}}{2\pi}\phi \tag{2.31}$$

であるので、

$$f_h=N\cdot\mathrm{FSR}\pm\frac{\mathrm{FSR}}{2\pi}arccos\left\{1-\frac{(1-z)^2}{2z}\right\} \tag{2.32}$$

となる。つまり、

$$\mathrm{FWHM}=\frac{\mathrm{FSR}}{\pi}arccos\left\{1-\frac{(1-z)^2}{2z}\right\} \tag{2.33}$$

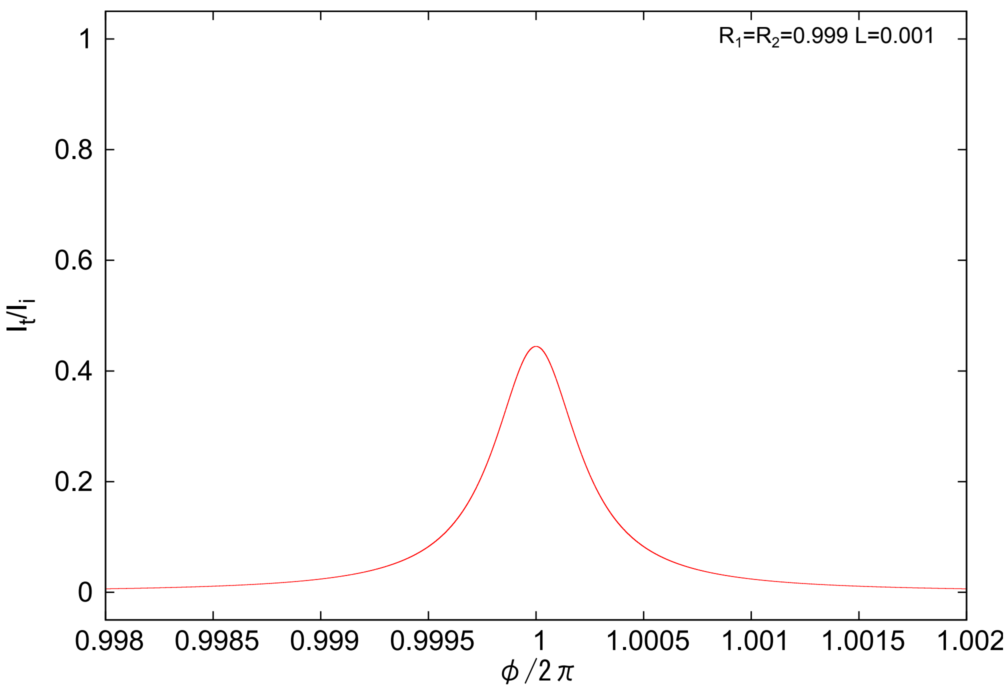


図 2.5　図 2.3 を $\frac{\phi}{2\pi}$=1 近辺で拡大したもの。ピーク値の半分の値をとる周波数の幅が FWHM である。

である。ここで、

$$\text{finesse} \equiv \frac{FSR}{FWHM} \tag{2.34}$$

により finesse を定義する。式 (2.33) より、

$$\text{finesse} = \frac{\pi}{arccos\left\{1-\frac{(1-z)^2}{2z}\right\}} = \frac{\pi}{arccos\left\{1-\frac{\left(1-\sqrt{R_1R_2(1-L)}\right)^2}{2\sqrt{R_1R_2(1-L)}}\right\}} \tag{2.35}$$

である。具体的に R,L を決定した時の finesse の値を表 2.1 にまとめる。finesse はミラーの反射率が大きくロスが小さいほど大きくなる量であることが分かる。

表 2.1　式 (2.35) による finesse の具体的な値。R が大きく、L が小さいほど finesse が大きくなっている。

R_1	R_2	L	finesse
0.5	0.5	0	4.35
0.9	0.9	0	29.8
0.9	0.9	0.1	19.8
0.9	0.9	0.5	6.83
0.99	0.99	0	313
0.999	0.999	0	3140
0.9999	0.9999	0	31414
0.99999	0.99999	0	314158

$z \simeq 1$ のとき

$$arccos\left\{1-\frac{(1-z)^2}{2z}\right\} \simeq \frac{1-z}{\sqrt{z}} \tag{2.36}$$

という近似式が成り立つので、

$$\text{finesse} \simeq \frac{\pi\{R_1R_2(1-L)\}^{\frac{1}{4}}}{1-\sqrt{R_1R_2(1-L)}} \tag{2.37}$$

である。

2.2.4　共鳴周波数の縦モードと横モード

前節で議論した通り、レーザー光の cavity への共鳴条件は cavity 一周時の位相変化が $\phi = 2\pi m$(m は整数) となることであった。前節ではガウシアンビームの横モード (空間モード) の効果を考えずに FSR を導出したが、ここではそれらの効果を含んだ考察をする。

cavity に入射するレーザー光はガウシアンビームである。そのモードを TEM_{pq} とすれば、式 (2.10) より光の進行方向成分の位相は

$$\eta_{p,q}(z) = kz - (p+q+1)arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \tag{2.38}$$

である。cavity の 2 枚のミラーの位置を z_1, z_2 とおく。cavity の半周を考えると光の共鳴条件は

$$\eta_{p,q}(z_2) - \eta_{p,q}(z_1) = \pi m \qquad (m \text{ は整数}) \tag{2.39}$$

であり、cavity の長さ l を用いて

$$kl - (p+q+1)\left\{arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)\right\} = \pi m \tag{2.40}$$

と表される。波数 k を周波数 f に直し、f について解けば

$$f = \frac{c}{2\pi nl}(j+1)\left\{arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)\right\} + \frac{c}{2nl}m \qquad (j \equiv p+q) \tag{2.41}$$

である。この式から、m または j が変化すると共鳴周波数が変化することが分かる。

式 (2.41) を用いてレーザー光の共鳴周波数について考察する。ある周波数 f_1 の光が cavity に共鳴しているとする。そのときの m、j の値をそれぞれ m_1、j_1 とおく。なお、共鳴条件は $j = p + q$ によって決定されるため、 j が同じ値となる p,q のモードは縮退している。

まず、$m = m_1 + 1$、$j = j_1$ における共鳴周波数 f_2 について考える。式 (2.41) より共鳴周波数間隔は

$$f_2 - f_1 = \frac{c}{2nl} \tag{2.42}$$

である。この結果は、式 (2.29) から導出した FSR と一致している。j の変化がないときの cavity 内にできる定在波の数によって決まるモードのことを縦モード (周波数モード) という。

今度は、$m = m_1$、$j = j_1 + \Delta j$ のときの共鳴周波数 f_3 を考える。式 (2.41) を用いることで共鳴周波数間隔 Δf は、

$$\Delta f = f_3 - f_1 = \frac{c}{2\pi nl}\Delta j\left\{arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)\right\} \tag{2.43}$$

を得る。$arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)$ の部分は cavity の形状によって決まる量である [16]。以上からガウシアンビームのパラメーター p,q が異なると共鳴周波数も変化することがわかり、このモードのことを横モード (空間モード) という。

conforcal な cavity の場合は

$$arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) = -arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right) = \frac{\pi}{4} \tag{2.44}$$

であるから [16]、

$$\Delta f = f_3 - f_1 = \frac{c}{4nl}\Delta j \tag{2.45}$$

である。 つまり、横モードの櫛は、共鳴周波数は j=0 のときの縦モードの櫛の位置か、それらの中間の位置にある。

また、$l \ll R_1, R_2$ のときは、$z_R \gg l$ であり、

$$\Delta f \simeq \frac{c}{2\pi n z_R}\Delta j \tag{2.46}$$

である [16]。縦モードの櫛の間に細かい横モードの櫛が現れることがわかる。

実際のレーザー光には様々な l,m のモードが含まれているので、周波数モードだけでなく空間モードによる細かい櫛も観測される。なお、cavity に入射する光のアラインメントを調節することで共鳴する横モードの割合を変更することができる。ほとんど特定の横モードだけがカップリングするようにアラインメントを調節することができて、その場合の FSR は $\frac{c}{2nl}$ となる。

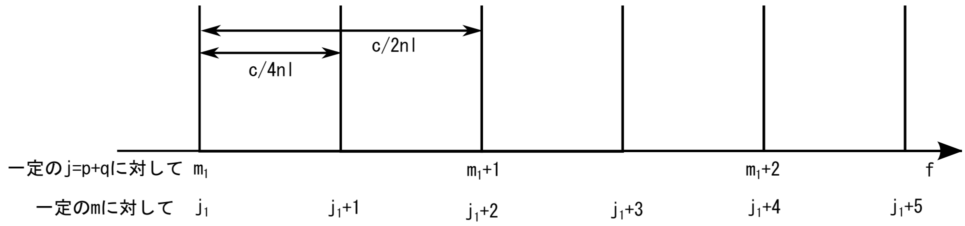


図 2.6　confocal な cavity の共鳴周波数を表したもの。櫛の周波数間隔は $\frac{c}{4nl}$ であり、これが実効的な FSR となっている。なお、アラインメントを調整し特定の横モードで光をカップリングさせせると、縦モードの櫛のみが残り、周波数間隔は $\frac{c}{2nl}$ となる。

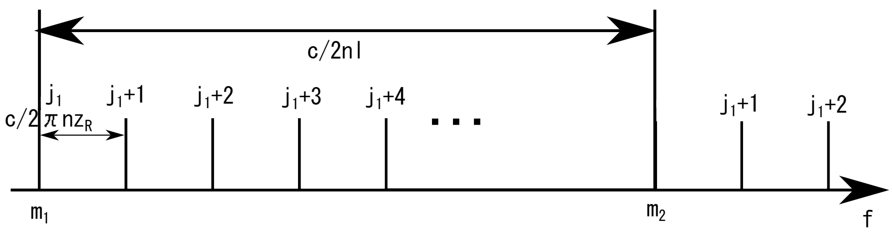


図 2.7　$R \gg l$ となる cavity の共鳴周波数を表したもの。縦モードの間隔は $\frac{c}{2nl}$ であるが、その間に細かい横モードの櫛が多数見られる。こちらもアラインメントを調節することで特定の櫛を大きくすることができる。

2.3 ビート信号について

本実験では、レーザの周波数差を測定するために2つのレーザーのうなり（ビート）の信号を見ている。この原理について説明する。

二つのレーザーの電場 $E_1e^{i\omega_1 t}$、$E_2e^{i\omega_2 t}$ とが重なって PD で検出されると、その強度 V は

$$\begin{aligned} V &= |E_1e^{i\omega_1 t} + E_2e^{i\omega_2 t}|^2 \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2cos(\omega_1 - \omega_2)t \end{aligned} \tag{2.47}$$

となる。すなわち、ビートをとった二つのレーザーの差周波が PD で検出される。この差周波は数 GHz に抑えることができる。この周波数はスペクトラムアナライザ (Spectrum analyzer) の帯域にあり、1Hz 程度の精度で測定できる。一方で、波長計はレーザーの周波数である数百 THz を測定することができるが、その精度は高々数 GHz である。

2.4 Pound-Drever-Hall(PDH) 法

本実験では、cavity の共鳴周波数にロックすることでレーザーの中心周波数の安定化を行った。その手法として、Pound-Drever-Hall(PDH) 法 [17] というものを用いた。この手法では、レーザーに位相変調をかけて、反射光強度をその変調周波数で復調する。そうすることで共鳴周波数の前後で符号の異なる信号が得られ、それをエラー信号としてフィードバックをかけ、レーザーの周波数を cavity の共鳴周波数にロックする。PDH 法は図 2.8 のような系で行う。以下の式計算は Ref.[17] を参考にした。

レーザーの電場を $E_0e^{i\omega t}$ とおく。EOM で $e^{\beta sin\Omega t}$ の位相変調を与えるとき、EOM 通過後の電場 E_{inc} は、

$$E_{inc} = E_0e^{i(\omega t+\beta sin\Omega t)} \tag{2.48}$$

$$= E_0e^{i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)e^{in\Omega t} \tag{2.49}$$

と書ける。ただし、$J_n(\beta)$ は Bessel 関数である。変調の振幅が小さく、$\beta \ll 1$ のとき,

$$E_{inc} \simeq E_0[J_0(\beta)e^{i\omega t} + J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t} - J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}] \tag{2.50}$$

となる。$J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t}$、$-J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}$ の 2 項は変調をかけることで立つサイドバンドを表す。ここで、cavity の反射係数 $F(\omega)$ を周波数 ω の光が cavity で反射されたときの入

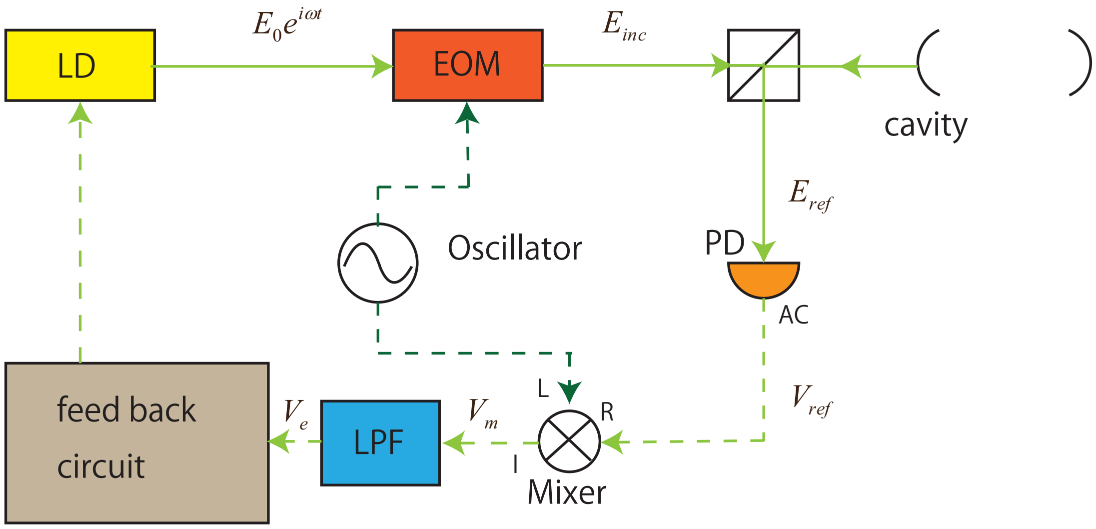


図 2.8　PDH 法を行う系の概略。実線は光路、点線は電気信号を表す。

射光と反射光の電場の比で定義する。2.2 節で述べた定義を用いれば、

$$F(\omega) \equiv \frac{E_r}{E_i} \tag{2.51}$$

$$= -\sqrt{R_1} + \frac{(1-R_1)\sqrt{R_2(1-L)}e^{i\phi}}{1-\sqrt{R_1R_2(1-L)}e^{i\phi}} \tag{2.52}$$

である。E_{inc} が反射係数 $F(\omega)$ の cavity で反射されると、その電場 E_{ref} は

$$E_{ref} = E_0[F(\omega)J_0(\beta)e^{i\omega t} + F(\omega+\Omega)J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t} - F(\omega-\Omega)J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}] \tag{2.53}$$

となる。これを Photo Diode(PD) で測ると、その出力 V_{ref} は、

$$\begin{aligned} V_{ref} &\propto |E_{ref}|^2 \\ &= 2\sqrt{P_cP_s}(Re[F(\omega)F^*(\omega+\Omega) - F^*(\omega)F(\omega-\Omega)]cos\Omega t \\ &\quad + Im[F(\omega)F^*(\omega+\Omega) - F^*(\omega)F(\omega-\Omega)]sin\Omega t) + (2\Omega\ terms) + Const \end{aligned} \tag{2.54}$$

と書ける。ただし、$P_c = J_0^2(\beta)|E_0|^2$、$P_s = J_1^2(\beta)|E_0|^2$ である。今、変調周波数 Ω が共鳴周波数の線幅 $\delta\nu$ に対して十分大きい場合を考える。このとき、$\omega \pm \Omega$ の周波数の光は cavity でほとんどすべて反射される。すなわち、$F(\omega \pm \Omega) \simeq -1$ が成り立ち、

$$F(\omega)F^*(\omega+\Omega) - F^*(\omega)F(\omega-\Omega) \simeq -F(\omega) + F^*(\omega) = -2iIm[F(\omega)] \tag{2.55}$$

であるから、

$$Re[F(\omega)F^*(\omega+\Omega) - F^*(\omega)F(\omega-\Omega)] \simeq 0 \tag{2.56}$$

$$Im[F(\omega)F^*(\omega+\Omega) - F^*(\omega)F(\omega-\Omega)] \simeq -2Im[F(\omega)] \tag{2.57}$$

となる。そのため、

$$V_{ref} \propto -4\sqrt{P_c P_s} Im[F(\omega)] sin\Omega t + (2\Omega\ terms) + Const \tag{2.58}$$

となる。図のように Mixer の RF 端子に V_{ref}、Lo 端子に $sin\Omega t$ を入力したときの I 端子の出力 V_m は、$V_{ref} \times sin\Omega t$ であり、特に

$$sin\Omega t \times sin\Omega t = \frac{1 - cos2\Omega t}{2} \tag{2.59}$$

である。Low Pass Filter を通ると V_m のうち振動項は切り捨てられて、エラー信号としては

$$V_e \propto -Im[F(\omega)] \tag{2.60}$$

となる。ここで反射係数 $F(\omega)$ について考える。$R_1 = R_2 = R$、$L \simeq 0$ のとき、

$$F(\omega) \simeq -\sqrt{R} + \frac{(1-R)\sqrt{R}e^{i\phi}}{1 - Re^{i\phi}} \tag{2.61}$$

$$= \frac{-\sqrt{R}(1 - Re^{i\phi}) + (1-R)\sqrt{R}e^{i\phi}}{1 - Re^{i\phi}} \tag{2.62}$$

である。2.2 節の記号を用いて、また $\omega = 2\pi f$ とすると、$n \simeq 1$ のとき

$$\phi \simeq 2\pi f \frac{2l}{c} = \frac{\omega}{\Delta f} \tag{2.63}$$

と書ける。ここで、Δf は FSR を表す。ω を、共鳴周波数 ω_0 と共鳴周波数からのずれ $\delta\omega$ とに分けて

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega \tag{2.64}$$

と表すと、

$$\phi \simeq \frac{\omega_0}{\Delta f} + \frac{\delta\omega}{\Delta f} \tag{2.65}$$

$$= 2\pi N + \frac{\delta\omega}{\Delta f} (\ N : \text{整数}\ ) \tag{2.66}$$

と書ける。これを式 (2.62) に代入すると、

$$F(\omega) = \frac{-\sqrt{R}\left[1 - Rexp\left(i\frac{\delta\omega}{\Delta f}\right)\right] + (1-R)\sqrt{R}exp\left(i\frac{\delta\omega}{\Delta f}\right)}{1 - Rexp\left(i\frac{\delta\omega}{\Delta f}\right)} \tag{2.67}$$

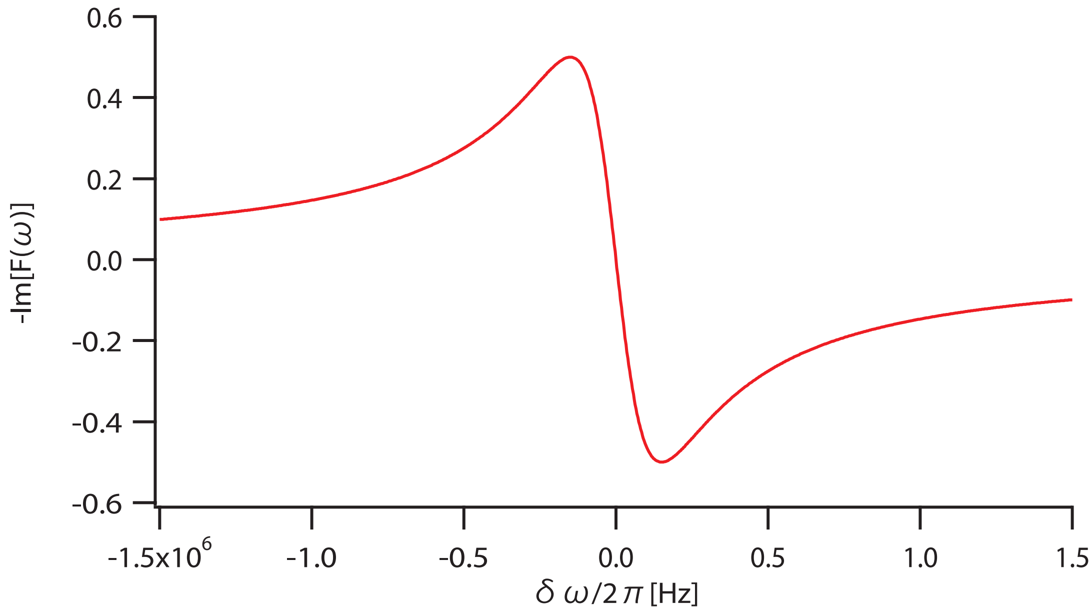


図 2.9　共鳴周波数からのずれに対する $-Im[F(\omega)]$ の様子。 L=0、R=0.9999、Δf =1.5GHz として、式 (2.62) から計算した。

今、共鳴周波数に十分近く $\dfrac{\delta\omega}{\Delta f} \ll 1$ となるような ω の領域を考えると、

$$F(\omega) \simeq \frac{-\sqrt{R}\left[1 - R\left(1 + i\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)\right] + (1-R)\sqrt{R}\left(1 + i\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)}{1 - R\left(1 + i\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)} \tag{2.68}$$

$$\simeq \frac{-\sqrt{R}\left[1 - R\left(1 + i\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)\right] + (1-R)\sqrt{R}\left(1 + i\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)}{1 - R} \tag{2.69}$$

$$= i\frac{\delta\omega\sqrt{R}}{(1-R)\Delta f} \tag{2.70}$$

となる。式 (2.60) と (2.70) より、

$$V_e \propto -\delta\omega \tag{2.71}$$

である。すなわち、エラー信号は共鳴周波数の近くでは前後で符号の異なる信号となる。共鳴周波数に十分近い場合に限らず、$\delta\omega$ に対する $-Im[F(\omega)]$ の様子を図 2.9 に示しておく。共鳴周波数でエラー信号が 0 を通り、前後で符号が異なることがわかる。従って、エラー信号を回路で増幅して LD にフィードバックをかければ、レーザーの周波数を cavity の共鳴周波数にロックすることができる。

2.5 Optical Phase Lock Loop（OPLL）法

ビート信号の周波数は二つの光の差周波であるから、二つのレーザーを cavity の隣の櫛にロックしたとき、ビート信号の周波数は理想的には FSR と一致する。そこで本実験では、ビート信号の周波数を Oscillator の出力する RF 信号の周波数にロックすることで、FSR の制御を行った。ビートの周波数を RF の周波数にロックする手法として、Optical Phase Lock Loop（OPLL）法を用いた。この手法では、異なる周波数を持つ二つの信号を干渉させてその位相差を検出する。そして、位相差を一定にするようにフィードバックをかけることで、一方の周波数を、もう一方の周波数にロックする。

本実験では、cavity の PZT にフィードバックを行うことで、二つのレーザーのビート信号の周波数を RF の周波数にロックした。その原理を説明する。導出は Ref.[18, 24] を参考にした。

今、二つのレーザーが一つの cavity の隣接する共鳴周波数にロックされているとする。その二つのレーザーのビート信号の周波数を ω_b と書く。ビート信号の周波数はレーザーの周波数差であるから、$\omega_b = FSR$ が成り立つ。PZT への入力信号を V とする。$V=0$ のときの cavity 長 l を l_0 とし、$l(V) = l_0 + \Delta l$ と書いたとき、$\Delta l \propto V$ となる。PZT にフィードバックをかけることによる FSR の変化を ΔFSR、ビート信号の周波数の変化を $\Delta\omega_b$ と書くと、

$$\begin{aligned}\Delta\omega_b &\propto \Delta FSR \\ &= \frac{c}{2n(l_0+\Delta l)} - \frac{c}{2nl_0} \\ &= \frac{c}{2nl_0} \times \left[\frac{1}{1+\frac{\Delta l}{l_0}} - 1\right] \\ &\simeq -\frac{c}{2nl_0} \times \frac{\Delta l}{l_0} \quad (\because \Delta l \ll l_0) \\ &\propto V \end{aligned} \tag{2.72}$$

となって、$\Delta\omega_b$ は V に比例する。

今、V が時間変化するような場合を考える。このとき、ロックをかける瞬間を t=0 としてビート信号の周波数を $\omega_b(t) = \omega_{b0} + \Omega(t)$ とおく。ただし、$\Omega(t=0) = 0$ とする。すると、ビート信号の位相は $\phi_b(t) = \omega_{b0}t + \delta(t) \quad (\delta'(t) = \Omega(t))$ とおける。また、RF の周波数を ω_m とすると、位相は $\phi_m(t) = \omega_m t$ と書ける。時刻 t でのビート信号と RF 信号との位相差を $\Delta\phi(t)$ と書くと、$\Delta\phi(t) = \phi_b(t) - \phi_m(t) = (\omega_{b0} - \omega_m)t + \delta(t)$ である。

二つの信号を Mixer で掛け合わせると、

$$sin(\omega_{b0}t+\delta(t)) \times sin\omega_m t = \frac{1}{2}(-cos[(\omega_{b0}+\omega_m)t+\delta(t)] + cos[(\omega_{b0}-\omega_m)t+\delta(t)]) \tag{2.73}$$

となる。Mixer のあとの Low Pass Filter で第一項を除去し、第二項をフィードバックのエラー信号として用いる。すなわち、$V \propto cos[(\omega_{b0} - \omega_m)t + \delta(t)]$ となる。$\Delta\phi(t) = (\omega_{b0} - \omega_m)t + \delta(t)$ であるからエラー信号はビートと RF との位相差を検出している。

フィードバック回路を通してフィードバック信号に掛かる係数を C とすると、

$$\frac{d\phi_b(t)}{dt} = \omega_{b0} + \delta'(t) \tag{2.74}$$
$$= \omega_{b0} + \Delta\omega_b(t) \tag{2.75}$$
$$\simeq \omega_{b0} + Ccos[(\omega_{b0} - \omega_m)t + \delta(t)] \tag{2.76}$$
$$= \omega_{b0} + C\left[cos(\omega_{b0} - \omega_m)t \cdot cos\delta(t) - sin(\omega_{b0} - \omega_m)t \cdot sin\delta(t)\right] \tag{2.77}$$

となる。$\omega_{b0}t - \omega_m t \ll 1$ で、

$$\frac{d}{dt}\Delta\phi(t) \simeq C[cos\delta(t) - (\omega_{b0} - \omega_m)t \cdot sin\delta(t)] \tag{2.78}$$
$$\simeq C\left[sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta(t)\right) - (\omega_{b0} - \omega_m)t \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta(t)\right)\right] \tag{2.79}$$

が成り立つ。$\delta(t)$ は時間発展とともに値を変えるが、$\delta(t) \simeq \frac{\pi}{2}$ となると、

$$\frac{d}{dt}\Delta\phi(t) \simeq C\left[\frac{\pi}{2} - \delta(t) - (\omega_{b0} - \omega_m)t\right] \tag{2.80}$$

と書ける。これより、

$$\frac{d}{dt}\Delta\phi(t) \simeq -C\left(\Delta\phi(t) - \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.81}$$

となる。この微分方程式は直ちに、

$$\Delta\phi(t) - \frac{\pi}{2} \propto e^{-Ct} \tag{2.82}$$

と解ける。$C > 0$ の場合、

$$\Delta\phi(t) \to \frac{\pi}{2} \quad (t \to \infty) \tag{2.83}$$

である。従って、$t \to \infty$ で $\frac{d\phi_b(t)}{dt} \to \frac{d\phi_m(t)}{dt} = \omega_m$ であり、$\omega_b(t \to \infty) = \omega_m$ である。すなわち、ビート信号の周波数を RF の周波数にロックすることができる。

$C < 0$ の場合でも、$\delta(t) \simeq -\frac{\pi}{2}$ を考えれば、

$$\frac{d}{dt}\Delta\phi(t) \simeq C\left[\frac{\pi}{2} + \delta(t) + (\omega_{b0} - \omega_m)t\right] \tag{2.84}$$

で、

$$\Delta\phi(t) + \frac{\pi}{2} \propto e^{Ct} \tag{2.85}$$
$$\Delta\phi(t) \to -\frac{\pi}{2} \quad (t \to \infty) \tag{2.86}$$

となり、やはりロックすることができる。いずれにせよ、$\omega_{b0}t - \omega_m t \ll 1$ という条件がこのフィードバックの成立条件であることに注意する。ロックしたい周波数がロックする先の周波数から遠いあるいは不安定であるとき、この方法は使えない。

2.6　ロックインアンプを用いたロック法

最後に、ロックインアンプ (Lock-in Amplifier) を用いてロックする方法の原理を説明する。

ロックインアンプは、二つの信号を入力とし、それらを Mixer で掛け合わせ Low Pass Filter を通して出力するという装置である。(図 2.10)

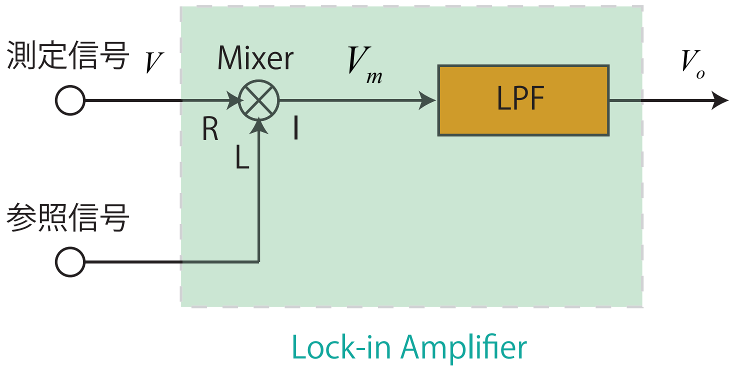


図 2.10　ロックインアンプの概略図

例えば、測定信号を $Acos\omega_i t$、参照信号を $Bcos\omega_r t$ としたとき、それらを Mixer で掛け合わせると、

$$V_m = Acos\omega_i t \times Bcos\omega_r t \tag{2.87}$$

$$= \frac{AB}{2}(cos[(\omega_i - \omega_r)t] + cos[(\omega_i + \omega_r)t]) \tag{2.88}$$

となるが、高周波成分は Low Pass Filter で除去され、

$$V_o \propto cos(\omega_i - \omega_r)t \tag{2.89}$$

となる。さらに、Low Pass Filter のカットオフ周波数を小さくすれば、ほとんど $\omega_i \simeq \omega_r$ の場合に限り、信号を出力することができる。すなわち、測定信号の ω_r で振動する成分のみを取り出せる。

ここで、測定信号 V がレーザーの周波数 ω の関数であり、周波数 ω に $\omega(t) = \omega_c + A_m cos\omega_m t$ と表せる弱い変調（$A_m cos\omega_m t \ll \omega_c$）が掛かっている場合を考える。このと

き測定信号 V は

$$
\begin{aligned}
V(\omega) &= V(\omega_c + A_m cos\omega_m t) \qquad (2.90)\\
&= V(\omega_c) + (A_m cos\omega_m t)\left(\frac{dV}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_c}\\
&\quad + \frac{1}{2}(A_m cos\omega_m t)^2\left(\frac{d^2V}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_c} + \cdots \qquad (2.91)
\end{aligned}
$$

のように展開できる。これを測定信号とし、ω_m を参照信号としてロックインアンプに入力すれば、$cos\omega_m t$ で振動する成分のみを取り出せるため、ロックインアンプで出力される信号 V_o は

$$
V_o \simeq A_m\left(\frac{dV}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_c} \qquad (2.92)
$$

となる。この方法により、測定信号の周波数微分信号が得られる。

特に、cavity の共鳴周波数付近の周波数に弱い変調をかける場合を考える。2.2 節で述べた定義を用いて、$R_1 = R_2 = R$、$L \simeq 0$、$n \simeq 1$ のとき、

$$
\frac{I_r}{I_i} \simeq R + \frac{(1-R^2)R - 2(1-R)Rcos\phi}{1+R^2-2Rcos\phi} \qquad (2.93)
$$

である。2.4 節と同様に $\phi \simeq \dfrac{\omega}{\Delta f} = \dfrac{\omega_0}{\Delta f} + \dfrac{\delta\omega}{\Delta f} = 2\pi N + \dfrac{\delta\omega}{\Delta f}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{I_r}{I_i} &\simeq R + \frac{(1-R^2)R - 2(1-R)Rcos\left(2\pi N + \dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)}{1+R^2-2Rcos\left(2\pi N + \dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)} \qquad (2.94)\\
&= R + \frac{(1-R^2)R - 2(1-R)Rcos\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)}{1+R^2-2Rcos\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)} \qquad (2.95)\\
&\simeq R + \frac{(1-R^2)R - 2(1-R)R\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)^2\right)}{1+R^2-2R\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)^2\right)} \qquad (2.96)\\
&= \frac{R\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)^2}{R\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)^2 + (1-R)^2} \qquad (2.97)\\
&= -\frac{(1-R)^2}{R\left(\dfrac{\delta\omega}{\Delta f}\right)^2 + (1-R)^2} + 1 \qquad (2.98)
\end{aligned}
$$

と書ける。$\delta\omega$ を変数としてみるとこれはローレンツ関数である。この信号の周波数微分を考えると、

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{I_r}{I_i}\right) = \frac{d}{d(\delta\omega)}\left(\frac{I_r}{I_i}\right) \tag{2.99}$$

$$= \frac{2R(1-R)^2(\Delta f)^2\delta\omega}{[R(\delta\omega)^2+\Delta f(1-R)^2]^2} \tag{2.100}$$

となり、共鳴周波数で 0 を横切る関数となっている。ロックインアンプの測定信号として cavity からの反射光信号を PD で検出したものを用いると、$V \propto \dfrac{I_r}{I_i}$ となっているため、ロックインアンプを用いて微分信号を得ることで $V_o \propto \dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{I_r}{I_i}\right)_{\omega=\omega_c}$ という微分信号が得られる。これをエラー信号としてフィードバックをすれば、周波数 ω_c は cavity の共鳴周波数 ω_0 にロックされる。

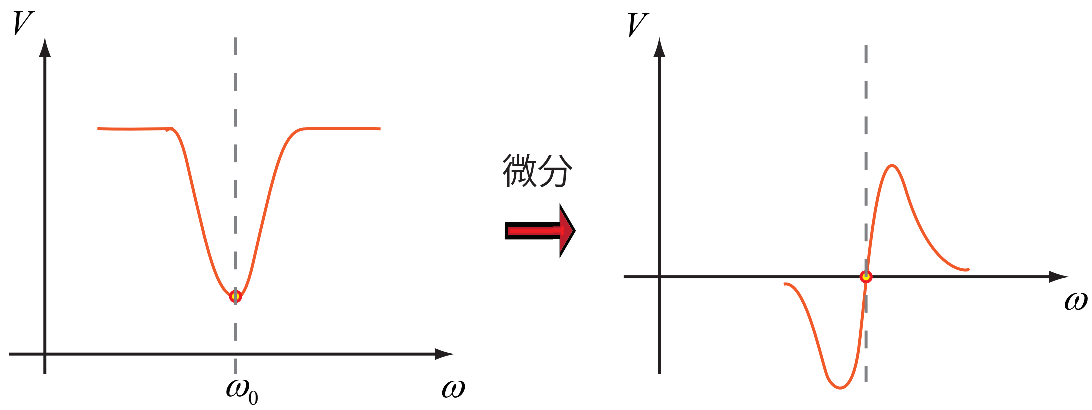


図 2.11　反射光強度の信号とその微分信号の様子。微分信号は共鳴周波数で 0 を横切る関数となる。

第 3 章

レーザーシステムの開発と制御

3.1 外部共振器型半導体レーザー

本実験ではレーザーダイオード (LD) を用いた外部共振器型半導体レーザー (ECDL; External Cavity Diode Laser) を使用した。それらについて説明する。

LD とは半導体レーザー光源であり、その線幅の大きさは 10MHz 程度である [18]。ECDL とは、名前の通り共振器を外部に設けた半導体レーザーのことである。その共振器により線幅は単純な LD よりも細くなり、1MHz ほどである。

今回の実験では、我々は 3.1 に示すような Littrow 型の ECDL を使用した。その仕組みについて説明する。

LD から出た放射状の光をレンズによって集光して平行光とする。回折格子 (grating) で回折した光のうち 1 次光が LD に戻り、正のフィードバックを起こしてレーザーが発振する。0 次の回折光はその後のミラーで反射されて外部へ出ていく。grating の角度は可動なので、共鳴条件を変化させることができ、それによってレーザーの共鳴周波数を動かすことができる。

LD へ電流を流す際の保護回路として図 3.2 の回路が組まれている。直流電源の入力端子のほかに、フィードバック用の入力端子がある。また、grating の裏側にはピエゾ素子 (PZT) が貼ってある。PZT はかかる電圧によって長さが伸び縮みするので、PZT に電圧をフィードバックすることで共振器長を変え、レーザーの周波数を制御することができる。本実験では、これら二つのシステムを用いてフィードバックを行いレーザーを cavity にロックした。

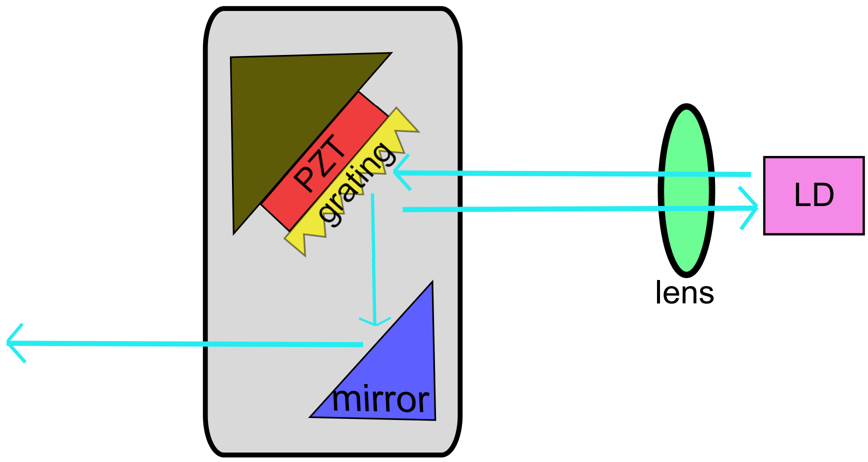


図 3.1　Littrow 型 ECDL の構造。青色の矢印は光の通る経路を表す。灰色の PZT,grating,mirror が乗っている台は可動であるので、grating の角度を変えてレーザーの共振条件を変更できる。

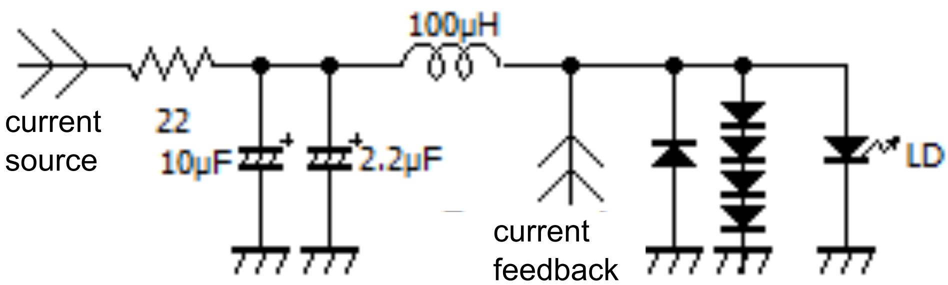


図 3.2　LD の保護回路。ECDL の筐体に取り付けてある。

今回の実験では、ECDL を二つ用意している (LD-A,B として区別する)。使用している LD は二つとも Eaglyand 社の EYP-RWE-1060-10020-0750-SOT01-0000 である。これは、外部共振器型レーザー用につくられたものであり、AR コート付きの LD である。また、どちらの LD も、直流電源は LDC202C 温調は TED200C(ともに THORLABS) を用いた。

それぞれの LD を外部共振器の筐体に取り付けて、波長を 1028nm 程度にした上でレーザーに流す電流を変化させて測定した光強度を図 3.3、図 3.4 に示す。フィッティングの結果、LD-A は 12.6(1)mA、LD-B は 25.6(2)mA を閾値としてレーザーが発振していることが分かる。

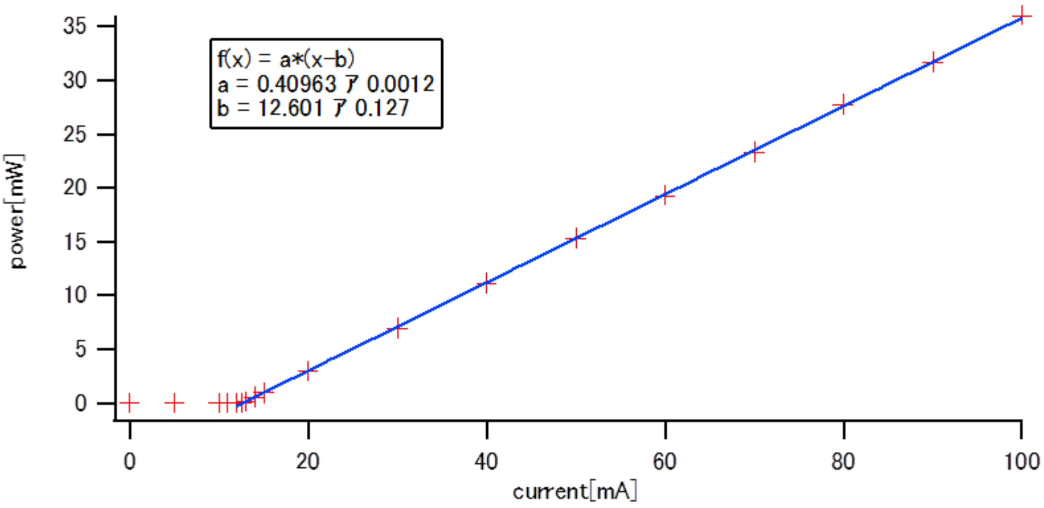


図 3.3　LD-A の光強度の電流特性

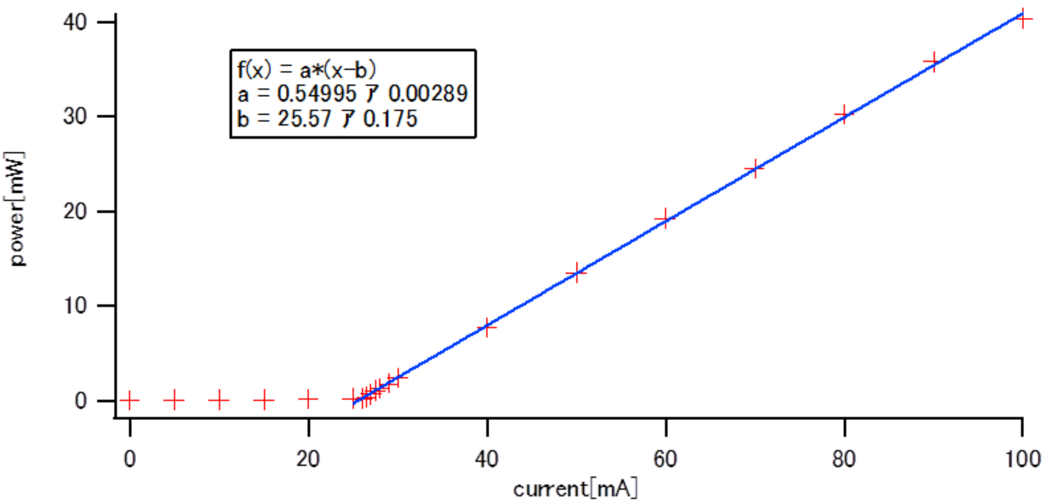


図 3.4　LD-B の光強度の電流特性

3.2 cavity

3.2.1 cavity の設計とそれぞれの部品の性質

本実験のために cavity を作成した。図 3.5 に示す。

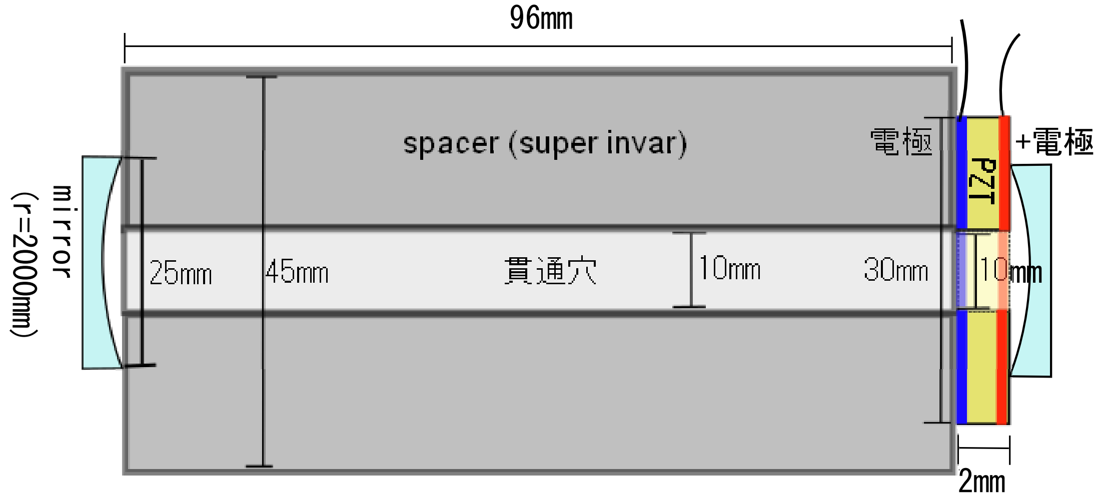


図 3.5　cavity の設計図。cavity は円柱状なので、断面図を載せている。接着はすべて torr seal で行われている。

式 (2.27) を用いて、この cavity の FSR を見積もることができる。この cavity の長さは l=98mm であり、空気中では $n \simeq 1$ なので、

$$\mathrm{FSR} = \frac{c}{2l} \simeq 1.53\mathrm{GHz} \tag{3.1}$$

である。

ミラーは Layertec 製の球面ミラー (Low Loss Mirror 110780) であり、曲率半径は 2000mm である。スペックシートによると、990nm から 1085nm の波長における反射率は 99.99 %以上であり、1038nm の波長に対する透過率はおよそ 0.001 %である。式 (2.35) によりこの cavity の finesse を見積もることができる。$R_1 = R_2 = 0.9999, L = 0.00001$ と値をおけば、

$$\mathrm{finesse} = 2.99 \times 10^4 \tag{3.2}$$

である。

スペーサーは先行研究 [19] で作られたものを再利用している。材質はスーパーインバーである。もとの長さを l_s、温度変化により膨張した長さを Δl_s とおくと、熱膨張係数 α は

$$\alpha \frac{\Delta l_s}{l_s} = 10^{-7} K^{-1} \tag{3.3}$$

である。

PZT は富士セラミック社の Pb(Zr・Ti)O_3 系・ソフト材の C-8 を使用している。今回作製した cavity では、PZT の分極の方向はレーザーの光が通る方向と平行にしてある。

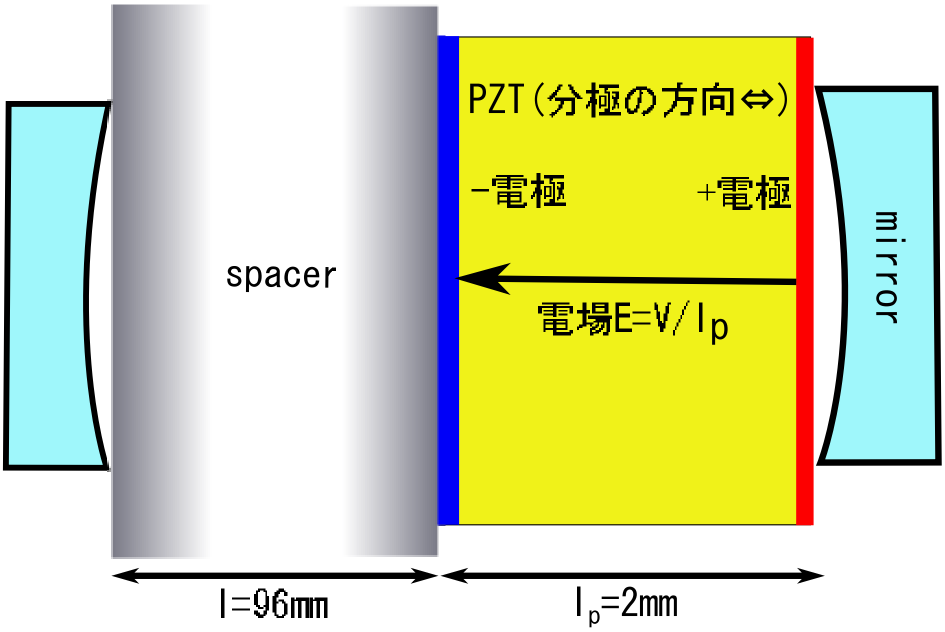


図 3.6　PZT の分極の向きと PZT にかかる電場。spacer の一部を省略して書いているが、実際には PZT の長さは spacer の長さと比べて小さい。

PZT の等価圧電係数 d_{33} は、$d_{33} = 627 \times 10^{-12}$m/V である [20]。添え字の 33 とは、歪み及び電極面の法線方向が PZT の分極の方向を向いていることを表す。PZT のもとの長さを l_p、PZT にかかる電圧を V、電場を E(=$\frac{V}{l_p}$) とおくと、単位長さ当たりの PZT の歪み δ は、

$$\delta = Ed_{33} \tag{3.4}$$

である。よって PZT 全長の歪み、つまり PZT の長さの変化を Δl_p とすれば、

$$\begin{aligned}\Delta l_p &= \delta \times l_p \\ &= \frac{V}{l_p} \times d_{33} \times l_p \\ &= Vd_{33}\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる。つまり、PZT の長さの変化は PZT にかかる電圧の大きさに比例する。

3.2.2　cavity の長さの微小変化に対する FSR 変化量の評価

式 (2.27) より、cavity の長さが変化すると、それに伴って FSR も変化する。本実験においては、外部より cavity の PZT に電圧をかけて PZT の長さを変化させている。また、3.3 節で後述する通り cavity は温調されているが、温度揺らぎによりスペーサーの長さが変化することが考えられる。ここでは、cavity の長さが変化する原因として PZT にかかる電圧と温度揺らぎのみを考え、FSR の変化を評価する。

スペーサー、PZT のある時刻での長さをそれぞれ l_s, l_p とする ($l_s \simeq 96$mm、$l_p \simeq$2mm)。温度変化によるスペーサーの長さの変化を Δl_s、外部電圧による PZT の長さの変化を Δl_p とする。

chamber 内は温調されているので、それほど大きな温度変化は見られないはずである。温度変化を大きめに見積もり、スペーサーの温度が 1K 変化したとする。すると、式 (3.3) により、

$$\Delta l_s = 10^{-7} \times 1 \times l_s = 9.6\text{nm} \tag{3.6}$$

である。

次に、PZT について考える。PZT にかかる電圧は最大で 150V である。したがって、式 (3.5) より、PZT の長さの変化としては最大で

$$\Delta l_p = 150 \times 627 \times 10^{-12} = 94.1\text{nm} \tag{3.7}$$

である。

式 (3.6) と式 (3.7) を比較することで、温度揺らぎに対するスペーサーの長さの変化に対して、電圧による PZT の長さの変化の方が大きいことが分かる。よって、仮にノイズとして cavity 内の温度が 1K 動いたとしても、PZT に feedback 信号を返すことで cavity の長さを元のまま維持することができると考えられる。

cavity の長さの変化の要因として PZT だけを考え、変化させることのできる FSR の大きさ ΔFSR を考える。cavity の長さを l とすれば、

$$\begin{aligned}
\Delta\text{FSR} &= \frac{c}{2l} - \frac{c}{2(l+\Delta l_p)} \\
&= \frac{c}{2l} - \frac{c}{2l}\frac{1}{1+\frac{\Delta l_p}{l}} \\
&\simeq \frac{c}{2l} - \frac{c}{2l}\left(1 - \frac{\Delta l_p}{l}\right) \left(\because \frac{\Delta l_p}{l} \ll 1\right) \\
&= \frac{c}{2l}\frac{\Delta l_p}{l}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。l=98mm なので式 (3.7) より $\frac{\Delta l_p}{l} \sim 10^{-6}$ であり、式 (3.1) より、

$$\Delta \mathrm{FSR} \sim 10^3 \mathrm{Hz} \tag{3.9}$$

である。つまり、この実験で cavity の PZT に電圧をかけて変化させることのできる FSR の大きさはおよそ 1kHz である。

3.3 真空槽

cavity を大気中に置いた場合は、大気圧の変動や温度変化などによって cavity 長が不安定になるため、FSR が大きく動いてしまうことが起こりうる。そのため、図 3.7 のような真空槽 (chamber) を設計し、cavity をこの中に入れて真空を引くことで cavity を大気から隔離した。真空度は 3×10^{-8}Torr ほどに安定した。また、chamber には温調のためにサーミスタとペルチェが取り付けてあり、chamber 内のアルミの箱の温度が 25 ℃となるように調節されている。さらに、外部の熱が伝わりにくくするために cavity はゴム球の上に置かれている。

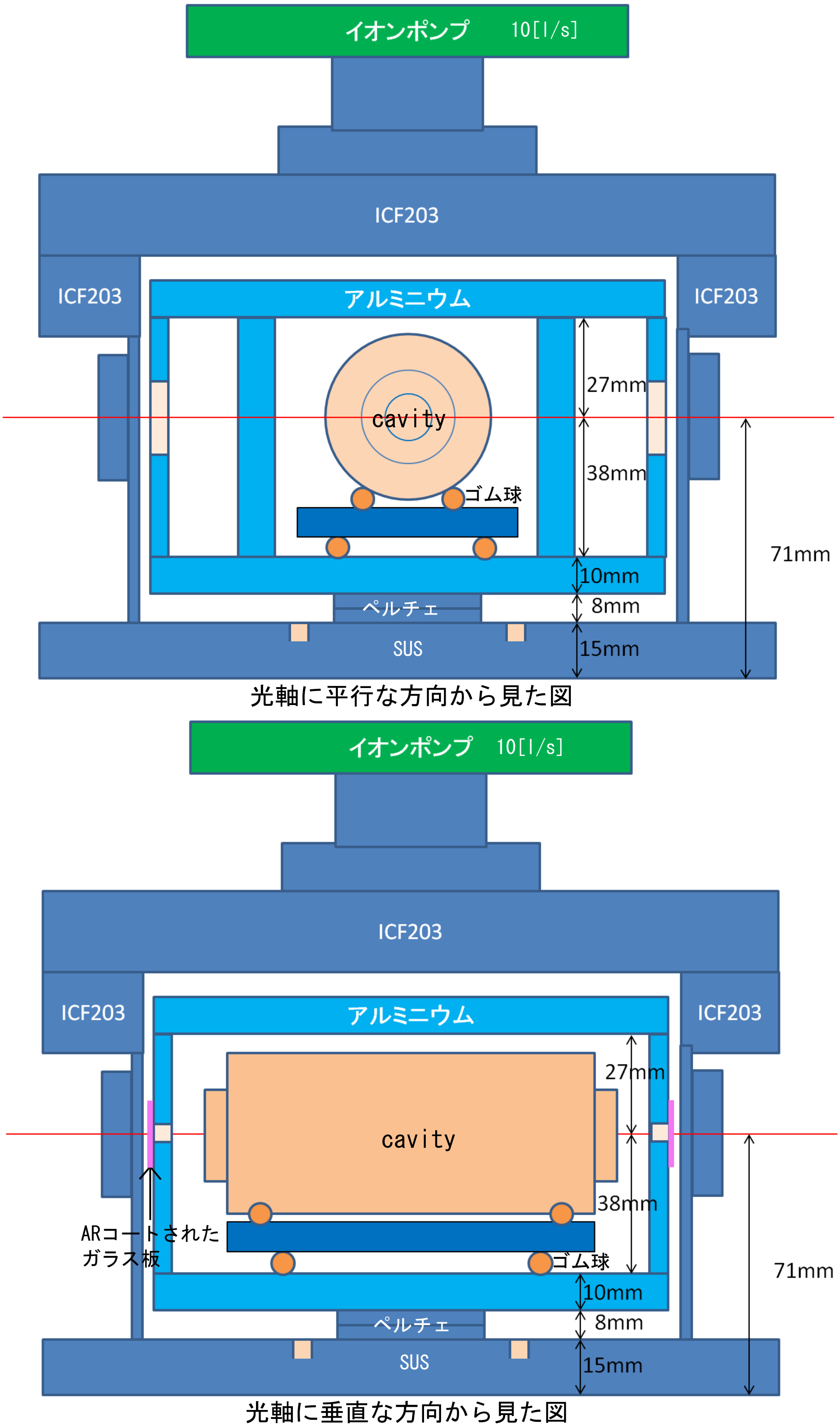
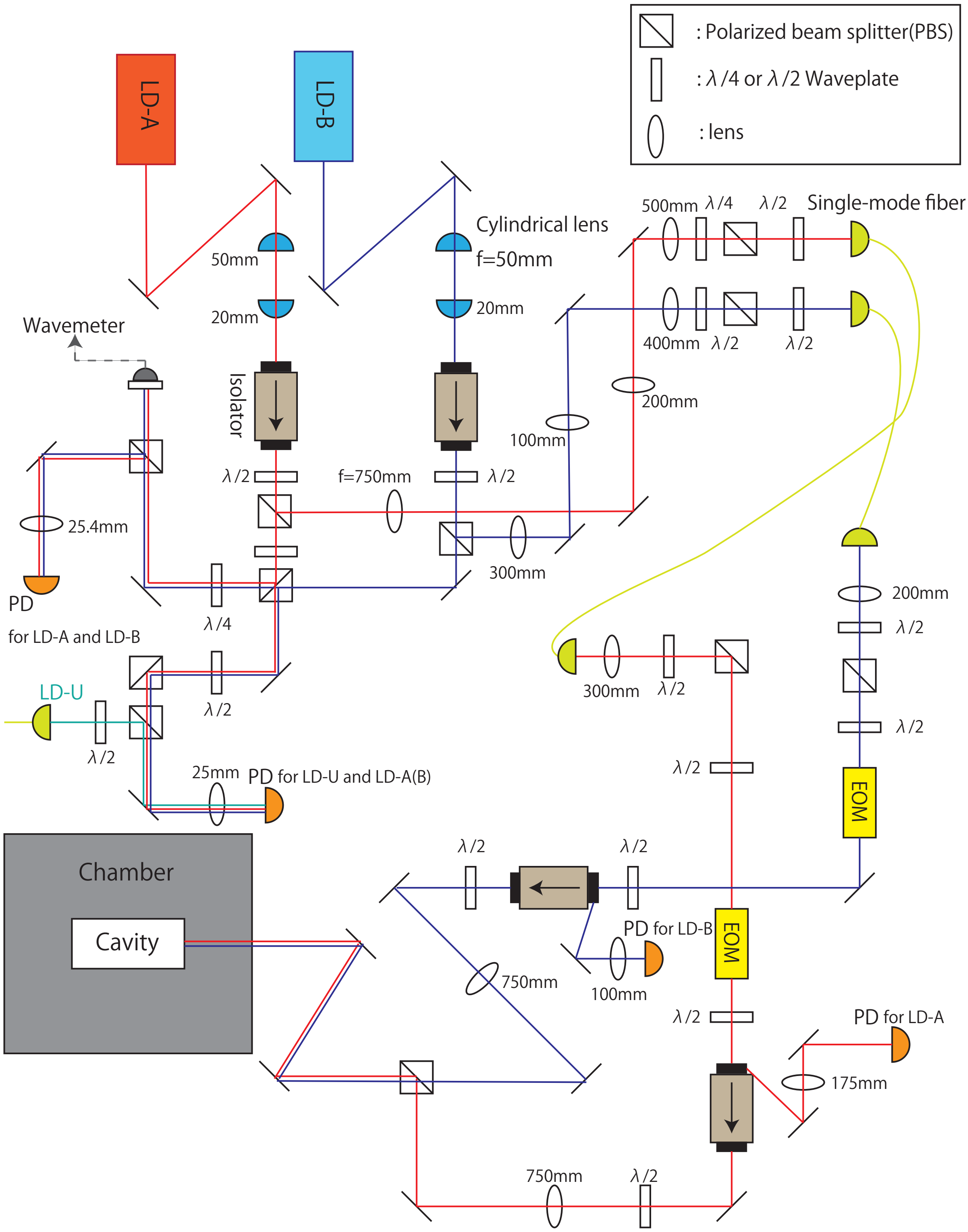


図 3.7 chamber の概略図。cavity は chamber 内部の円筒形のアルミニウムの箱の中に置かれている。

3.4 光学系の作製

本実験で作製した光学系を図 3.8 に示す。

LD-A、LD-B は 3.1 節で述べた ECDL であり、ともに 3.2 節で述べた cavity に光を入れている。LD-U と書いたのは、先行研究 [21] で作製された ULE(Ultra-Low Expansion) cavity にロックしているレーザーのことである。光ファイバーを用いて別のテーブルから持ってきている。一般に cavity の光強度は外部の finesse 倍程度となる。本実験で作製した cavity は finesse が大きいので、ミラーの損傷を防ぐために cavity に入れる光の強度が 10μW 程度より小さくなるよう注意した。また、レーザーのモードをきれいにするために single mode fiber に通した。



: Polarized beam splitter(PBS)
: λ/4 or λ/2 Waveplate
: lens
LD-A
LD-B
Wavemeter
50mm
20mm
Cylindrical lens
f=50mm
20mm
Isolator
500mm
λ/4
λ/2
Single-mode fiber
400mm
λ/2
λ/2
200mm
100mm
λ/2
f=750mm
λ/2
25.4mm
300mm
PD
for LD-A and LD-B
λ/4
λ/2
LD-U
λ/2
25mm
PD for LD-U and LD-A(B)
200mm
λ/2
λ/2
300mm
λ/2
λ/2
EOM
Chamber
Cavity
λ/2
λ/2
PD for LD-B
EOM
750mm
100mm
λ/2
PD for LD-A
175mm
750mm
λ/2

図 3.8 作製した光学系。

3.5 finesse の測定

レーザーの線幅を細くするためには、finesse の大きい cavity にロックすることが重要である。3.2 節で述べた cavity について、その finesse を測定した。測定は Ref.[22] を参考にした。Ref.[22] によればパルス的に光を cavity にカップルさせ、cavity から出てくる光の減衰の時定数を調べれば値を求めることができる。cavity は特定の周波数の光しか通さないため、レーザーの周波数をスイープすればパルス的に cavity に光を入れることができる。このときの代表的な信号は図 3.9 である。$f(x) = a\exp(-x/b)\sin(dx^2 + ex + f) + g$ という関数を用いてフィッティングを行い、その時定数 b から、finesse $= \frac{\pi d}{2L} b$ の関係を用いて finesse を求めた。5 回の測定の平均値から finesse は $1.81(18) \times 10^5$ と求まった。

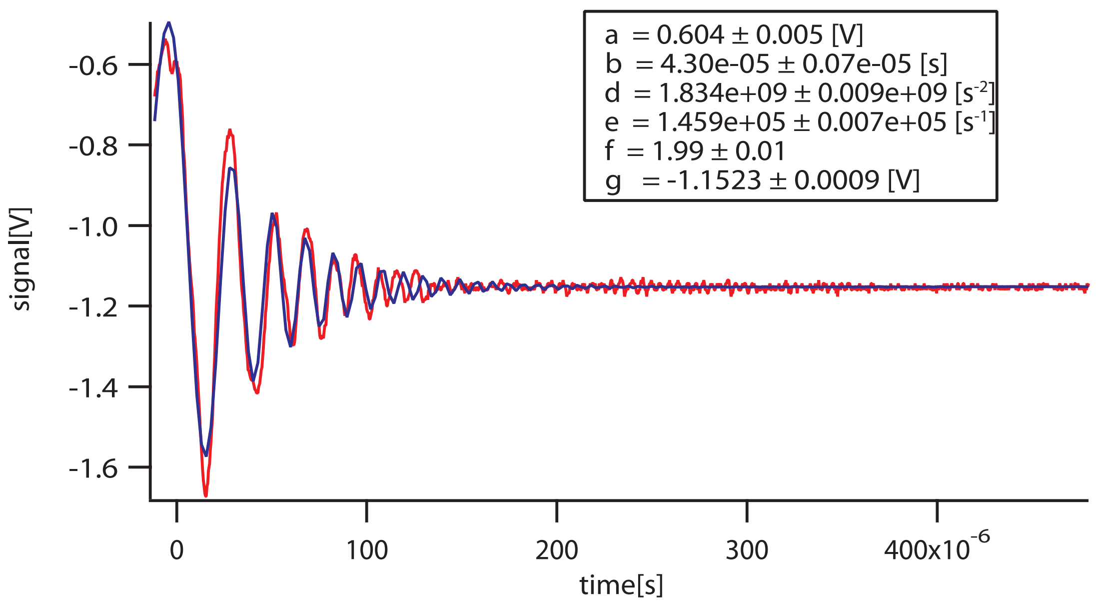


図 3.9 反射光の減衰（赤）とフィッティング（青）

また、逆に式 (2.24) と式 (2.35) から cavity のミラーの反射率と cavity 内でのロスを求めてみる。同じミラーを使っているため、2 枚のミラーの反射率はどちらも R とし、cavity 内のロスを L とおく。ミラーを透過する際のロスは無視する。つまり、ミラーの透過率 T に対して R+T=1 とする。finesse を f とすると、$f = 1.81(18) \times 10^5$ である。また、入射光強度に対する反射光強度の割合は、$I = \frac{I_r}{I_i} = 0.53$ であることが測定されている。

$$z = R\sqrt{1-L} \tag{3.10}$$

とする。式 (2.35) より、

$$f = \frac{\pi}{arccos\left\{1 - \frac{(1-z)^2}{2z}\right\}} \tag{3.11}$$

である。これを整理すると、

$$z^2 + 2\left(cos\frac{\pi}{f} - 2\right)z + 1 = 0 \tag{3.12}$$

を得る。z<1 であることから、

$$z = 2 - cos\frac{\pi}{f} - \sqrt{\left(2 - cos\frac{\pi}{f}\right)^2 - 1} \tag{3.13}$$

$\frac{\pi}{f} \ll 1$ より、$cos\frac{\pi}{f} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{f}\right)^2$ を用いると、

$$z \simeq 1 - \frac{\pi}{f} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{f}\right)^2 \tag{3.14}$$

また、式 (2.24) より、共鳴時の反射率を z を用いて表せば、

$$I = R + \frac{\left(\frac{1}{R} - R\right)z^2 - 2(1-R)z}{1 + z^2 - 2z} \tag{3.15}$$

であり、整理すると

$$R^2 - \left\{2z + I(1-z)^2\right\}R + z^2 = 0 \tag{3.16}$$

よって

$$R = \frac{2z + I(1-z)^2 \pm \sqrt{\left\{2z + I(1-z)^2\right\}^2 - 4z^2}}{2} \tag{3.17}$$

ここで、$f = 1.81(18) \times 10^5$ なので式 (3.13) より z=0.9999807(17) である。また、これを用いると I=0.53 と式 (3.17) より R=0.99999476(93) である (複合の-については

R=0.9999667<z となるので不適)。さらに、式 (3.10) より、L=2.806(32) $\times 10^{-5}$ となる。スペックシートの条件の R>0.9999 が成立する。また、$L \ll 1$ より、ミラー一枚当たりのロス L' は L'=1.493(16)$\times 10^{-5} < 2 \times 10^{-5} =$ 20ppm となり、ロスについてもスペックシートの条件を満たす。

3.6　線幅の狭窄化と測定

cavity の共鳴周波数間隔を測定するために隣の櫛に二つのレーザーをロックしてそれらのビート信号を測定したい。ビート信号の線幅は各々のレーザーの線幅の和として表されるので、共鳴周波数間隔を精度よく測るためには各々のレーザーの線幅を細くする必要がある。そこで、2.4 節で述べた PDH 法を用いて、LD-A、LD-B 二つのレーザーをそれぞれ cavity の共鳴周波数にロックして線幅を細くした。そのために組んだフィードバックの系を図 3.10 に示す。また、図 3.10 中のフィードバック回路を図 3.11 に示す。

図 3.11 の回路の Ramp in に 10Hz の三角波を入れ、それを 15 倍した電圧を ECDL の PZT に返すことで、レーザーの周波数を周期的にスウィープする。cavity からの反射光を PD で検出して、その DC 成分をオシロスコープで観測する。PD の回路図を図 3.12 に示す。PD は先行研究 [23, 24] で作製されたものを本実験のために改造して用いた。レーザーに EOM で位相変調を与え、Mixer で復調することで、共鳴周波数の前後で符合の異なるエラー信号が得られる。これをフィードバック回路で増幅し、ECDL の電流と PZT にフィードバックを返すことでロックを行った。

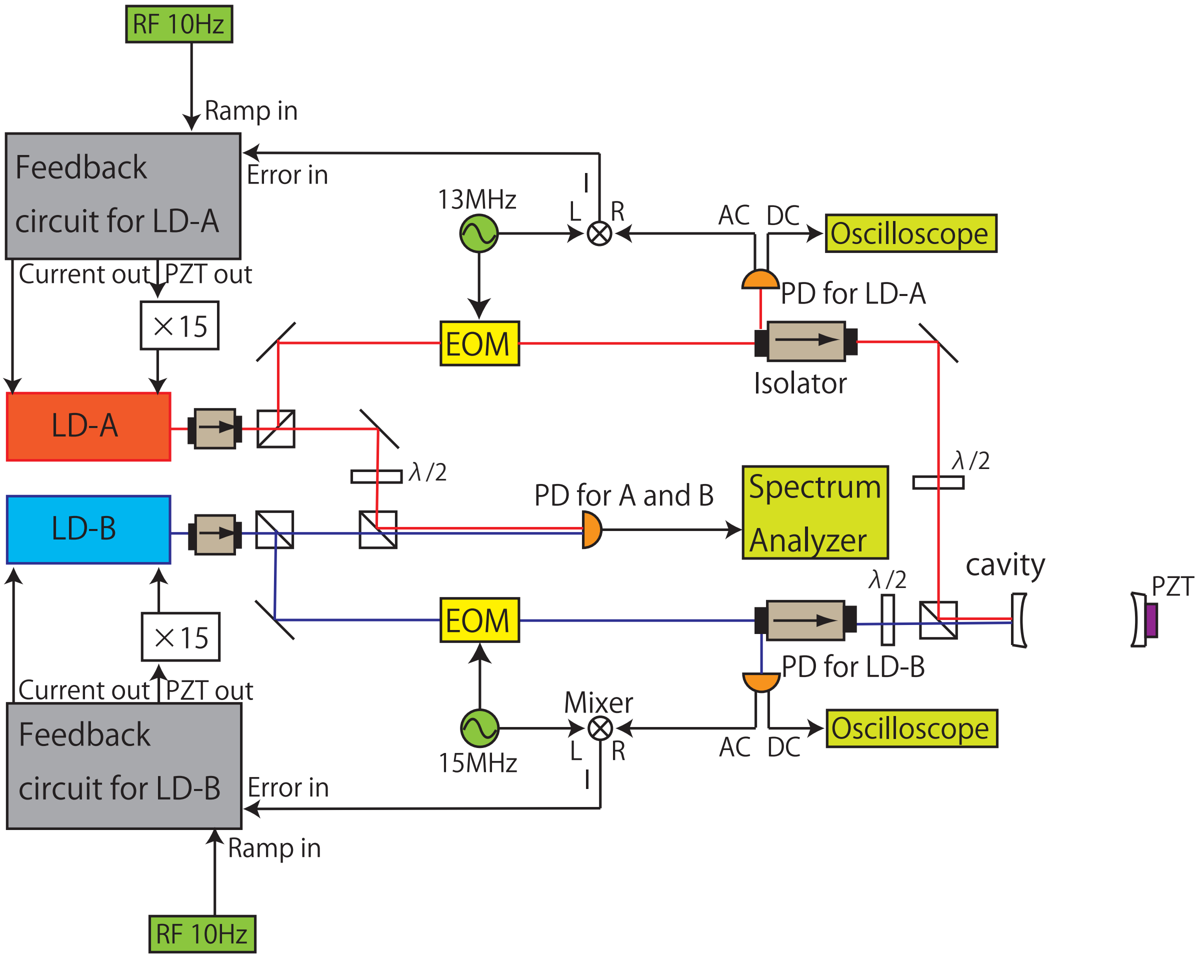


図 3.10 線幅の狭窄化のためのフィードバックの系の概略。

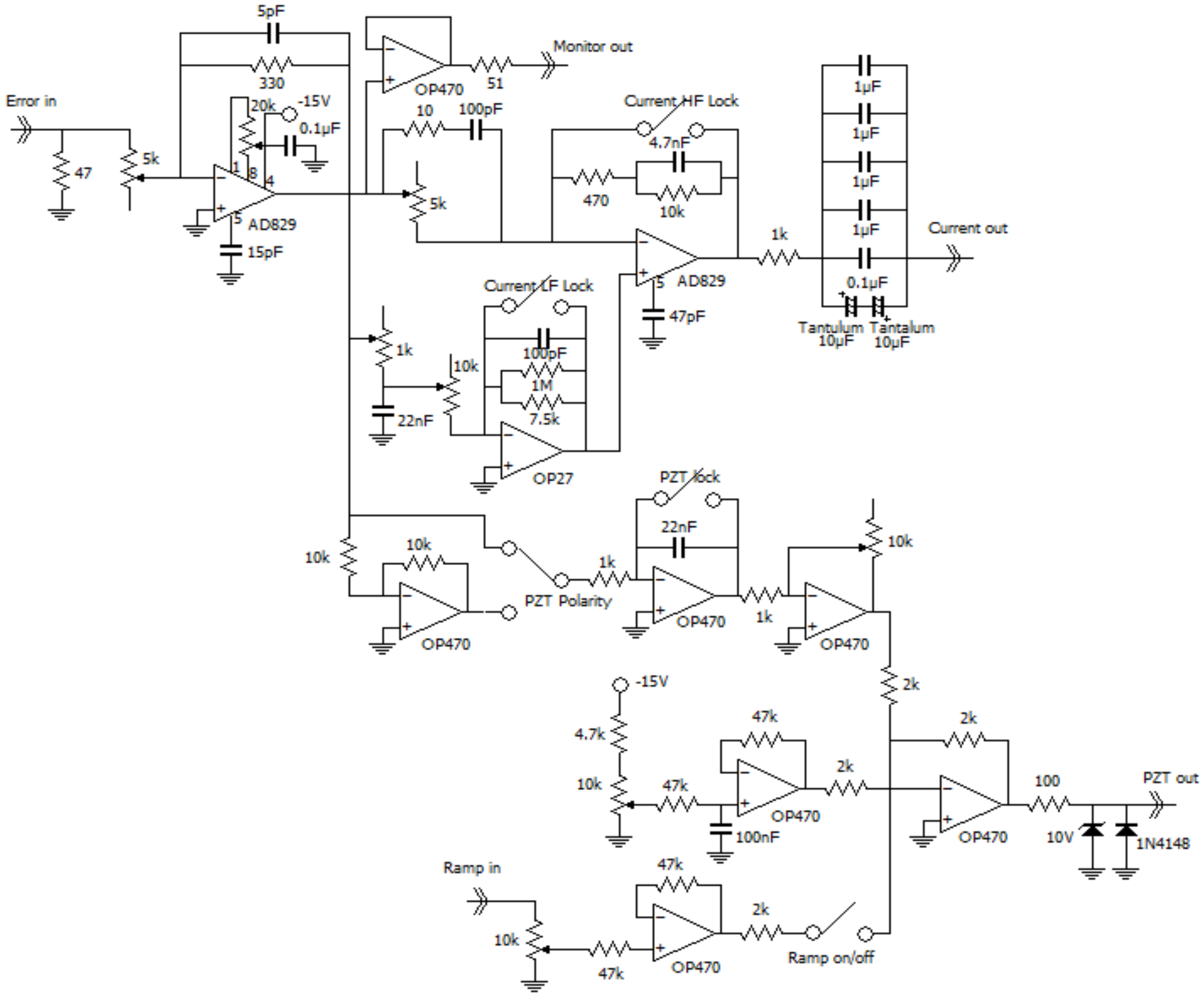


図 3.11　cavity にロックするための LD へのフィードバック回路。フィードバック回路は基本的には先行研究 [21] に準じているが変更点もある。本実験は先行研究 [21] と比べて cavity の finesse が高いため、cavity に入れる光の強度を小さくした。そのため、エラー信号の S/N 比が悪くなり、ロックがかかりにくかった。その対策として、Error in 直後の AD829 の 1、8 番ピンにオフセット調整用の回路をつないだ。これによりオペアンプの性能上現れる不要なオフセットを消すことができ、ロックが安定してかかるようになった。

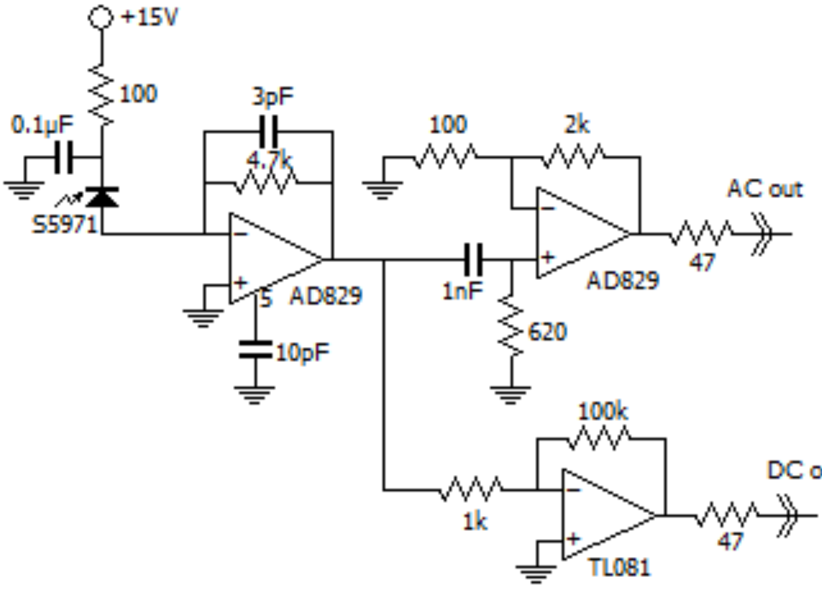


図 3.12 PD の回路。レーザー光の強度が先行研究 [23, 24] と比べて弱いので、DC 側の出力を 100 倍にした。AC 側は 15MHz ほどの帯域をもつ。

以下、ロックの具体的な手順を説明する。図 3.13、3.14、3.15、3.16 は反射光の DC 成分を見ているオシロスコープの様子である。CH2(水色) は反射光 DC 成分を AC カップリングで、CH3(紫色) は DC カップリングで見ている。CH1(黄色) は 10Hz の三角波 (Ramp) を見ている。CH3 のみオシロスコープで Invert をかけているので、反射光強度が強いほど信号は画面の下に現れる。図 3.13 はロックをかけてないときの信号の様子である。反射光の減少している部分に信号が画面の全領域で固定されれば周波数をロックできたことになる。まずロック回路の Current HF lock を on にすると、数 MHz 以上の速い揺らぎに対して ECDL に流れる電流にフィードバックがかかり、図 3.14 のように信号が減っている領域の幅が広がる。さらに Current LF lock を on にすると、数 kHz から数 100kHz の少し遅い揺らぎに対してもフィードバックがかかり、図 3.15 のようにさらに信号が減っている領域の幅が広がる。この状態で Ramp の振幅を小さくしていき、信号が減っている領域を広げ、PZT lock を on にすると、100Hz 以下のさらに遅い揺らぎに対してもフィードバックがかかり、図 3.16 のように信号が減っている領域が画面全体に広がる。この状態で Ramp の振幅をゼロにしても信号の減っている領域は画面全体に広がったままであり、これでロックがかかったことになる。

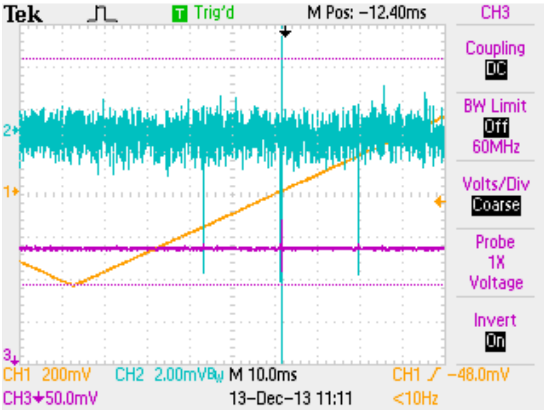


図 3.13　ロックをかけていないときのオシロスコープの画像。cavity に共鳴する周波数で反射信号が減少していることがわかる。また、左右の小さな櫛は変調によるサイドバンドである。

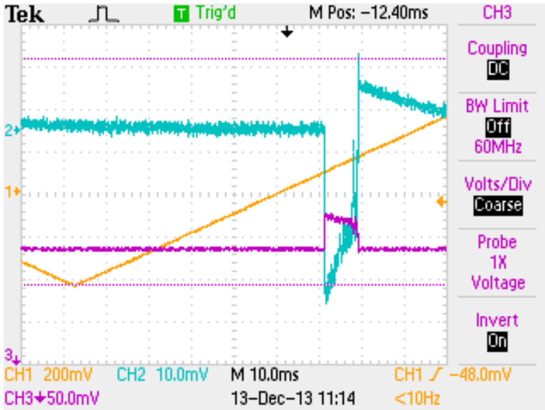


図 3.14　HF lock を on にしたときのオシロスコープの画像。図 3.13 よりも反射信号が減少している幅が広がっている。

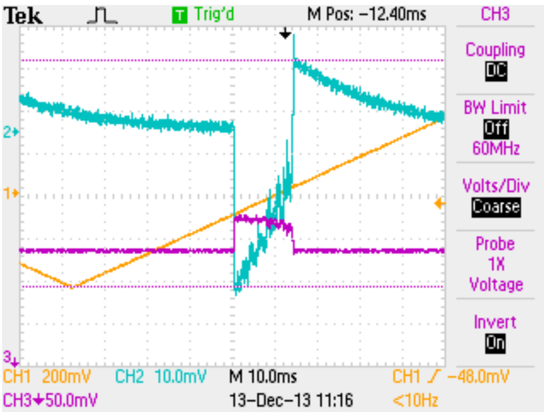


図 3.15　HF lock，LF lock を on にしたときのオシロスコープの画像。図 3.14 よりもさらに共鳴している幅が広がっている。

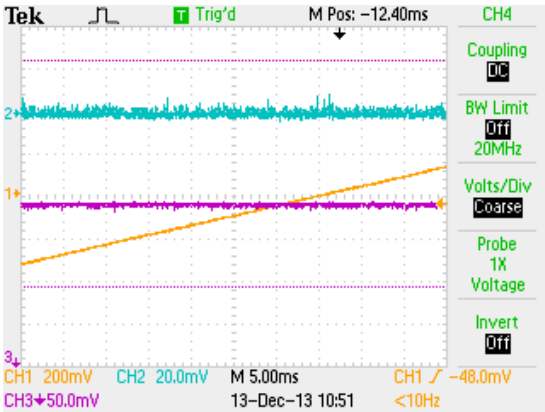


図 3.16　HF lock，LF lock，PZT lock を on にしたときのオシロスコープの画像。画面の全領域で反射信号が減少している。これにより光を cavity にロックできたことが確認できる。

このようにして、二つの LD をそれぞれ独立に cavity にロックした。そして、そのときの LD-A と LD-B のビート信号をスペクトラムアナライザで見た。その様子が図 3.17、3.18、3.19 である。図 3.19 は図 3.18 の縦軸をリニアに換算したものである。図 3.19 のデータをローレンツ関数 $y = y_0 + \dfrac{A}{(x - x_0)^2 + B}$ でフィッティングした。その値からビート信号の線幅を半値全幅 (FWHM) として求めると、FWHM =3.93(3)Hz であった。すなわち、ビート信号の線幅を 1Hz オーダーまで小さくすることができた。

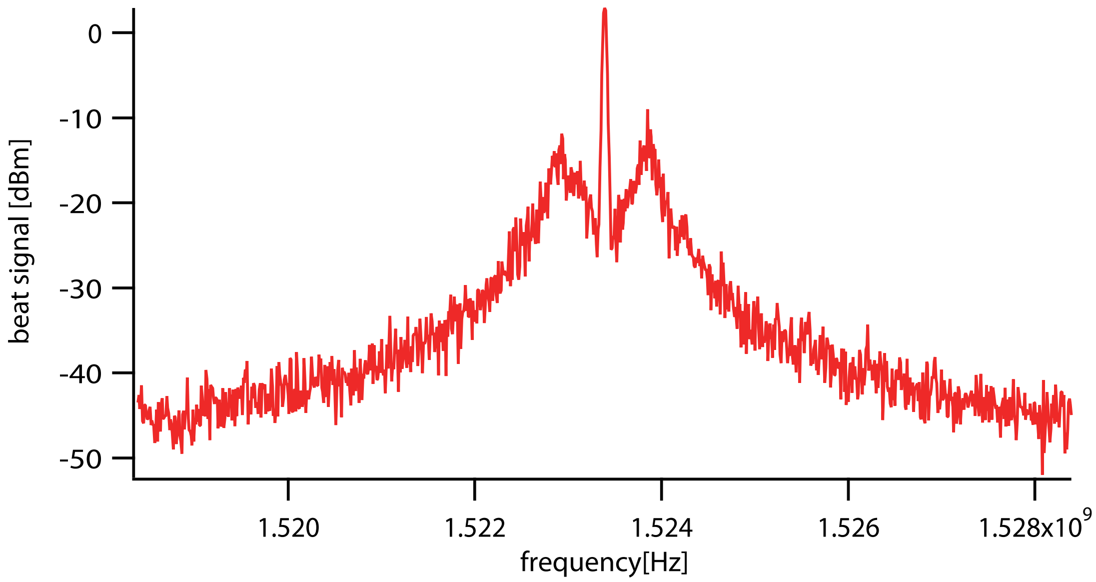


図 3.17　LD-A と LD-B とのビート信号。span: 10MHz

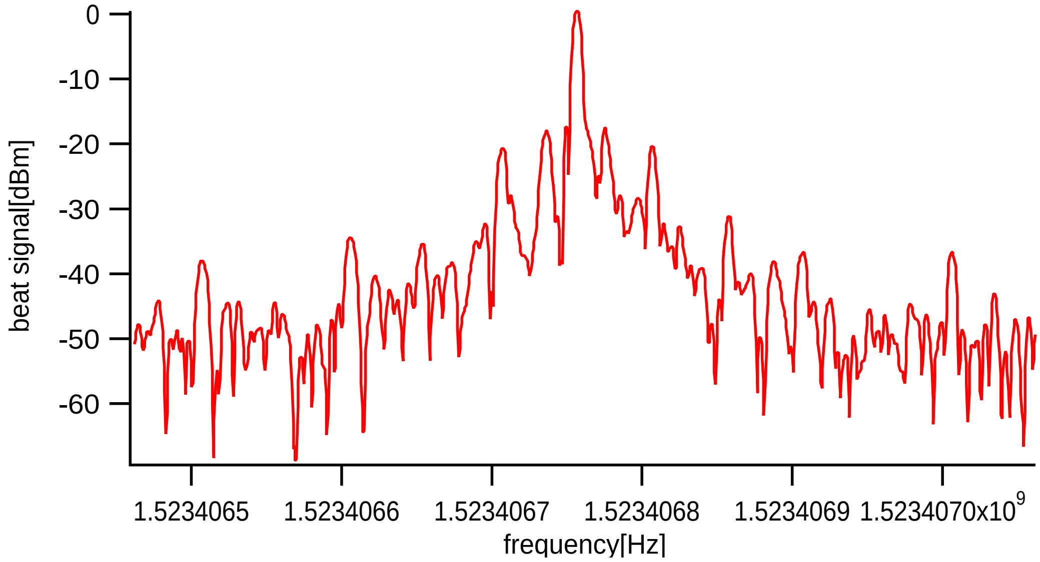


図 3.18　span: 600Hz　図 3.17 の中心部分を拡大したもの。

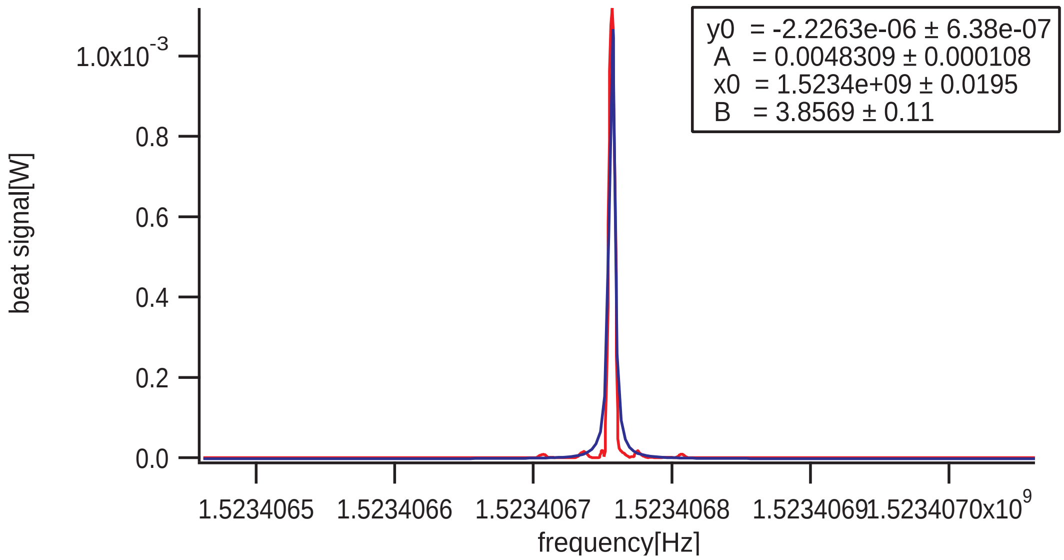


図 3.19　span: 600Hz(linear)　青線はローレンチアンによるフィッティングを表す。

また、ビート信号の中心周波数の時間的変動をスペクトラムアナライザを用いて測定した。図 3.20 に得られたデータを示す。データから、ビート信号の中心周波数は短時間で 20Hz 程度揺れていることがわかる。すなわち、ビート信号は短期的な線幅は安定しているが、長期的には安定していないことがわかる。

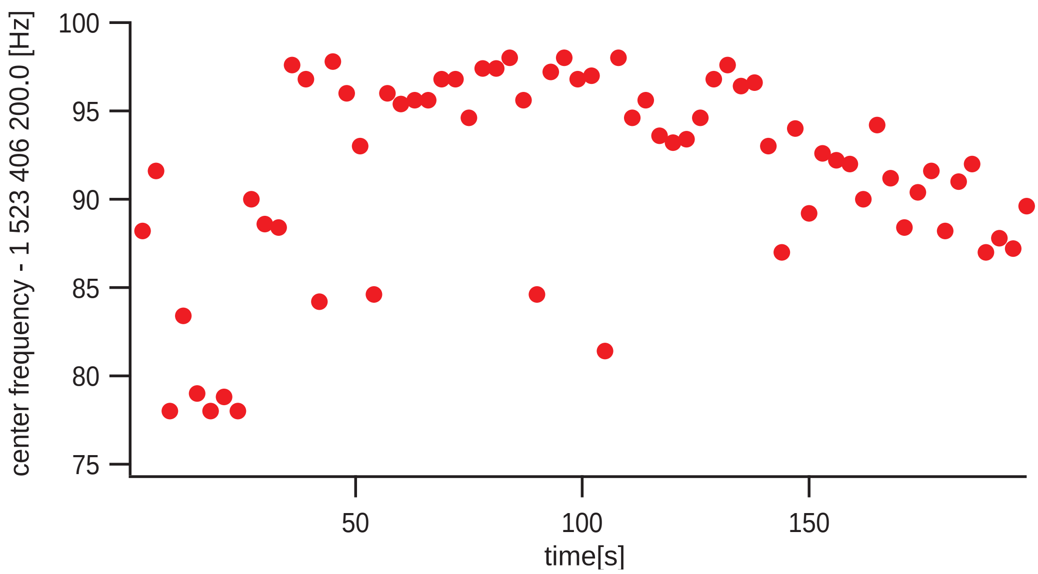


図 3.20　ビート信号の中心周波数の時間的変動。

3.7　FSR の制御

3.7.1　ビートロックを用いた FSR の制御

次に、cavity の FSR を制御するために、2.5 節で述べた OPLL 法を用いて、LD-A と LD-B とのビート信号を RF の周波数にロックした。これをビートロックと呼ぶ。そのために組んだフィードバックの系及びビートロックに用いたフィードバック回路をそれぞれ図 3.21、図 3.22 に示す。ビート信号のロックは、GPS を介して 12 桁の精度をもつファンクションジェネレータ (Rohde & Schwartz SMC100A 信号発生器 ∼3.2GHz 出力) の出力する 1.5234050000GHz の RF 信号に対して行った。このとき、LD-A と LD-B とのビート信号だけでなく、LD-U と LD-A（または LD-B）とのビート信号をスペクトラムアナライザで観測した。ULE cavity にロックしたレーザーである LD-U は、長期的には 5.6(1)kHz/day の速度で中心周波数がドリフトしてしまうが、瞬間的な線幅はおよそ 100Hz である。詳しくは Ref.[18, 21] を参照されたい。

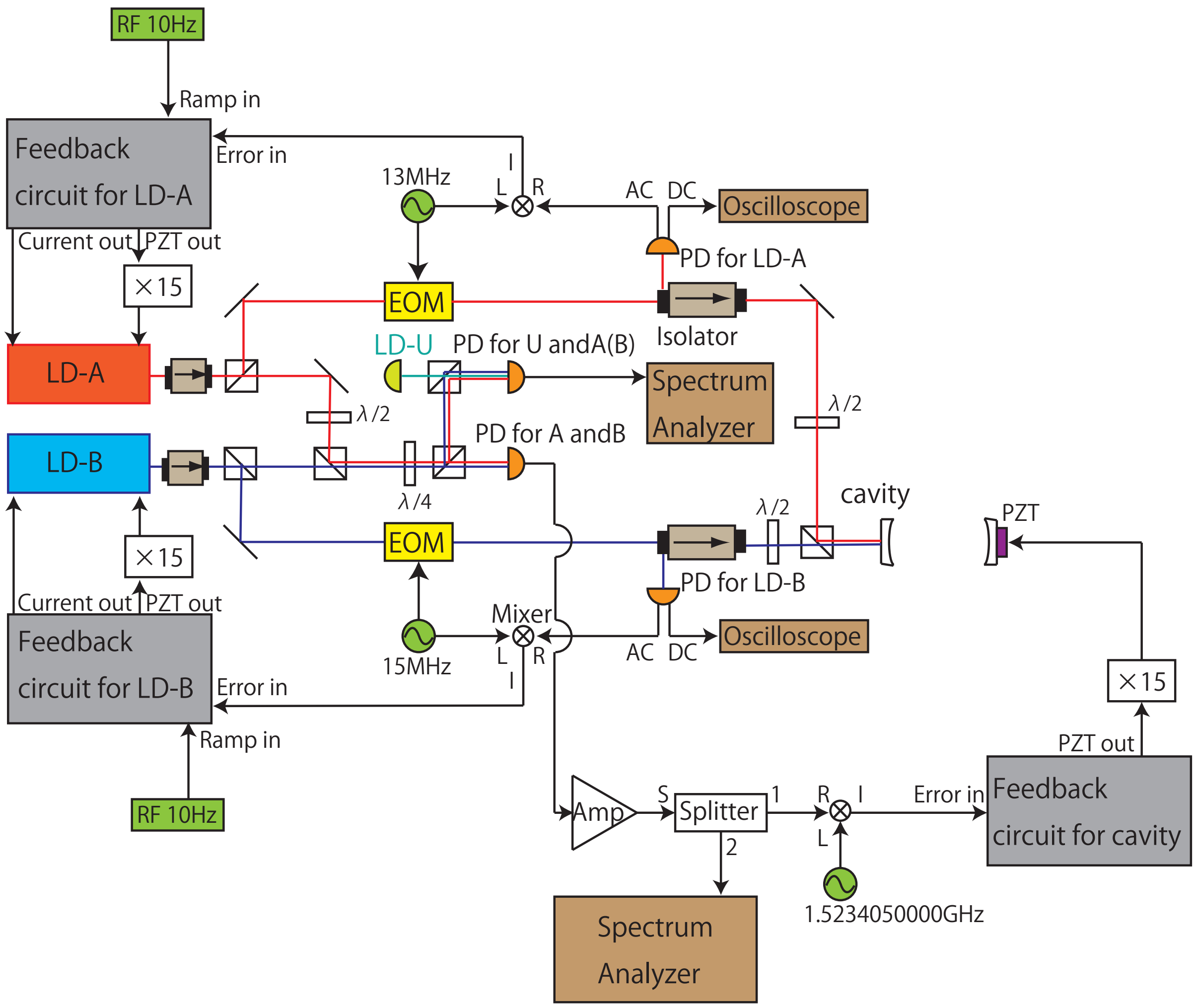


図 3.21　FSR の制御のためのフィードバックの系の概略。

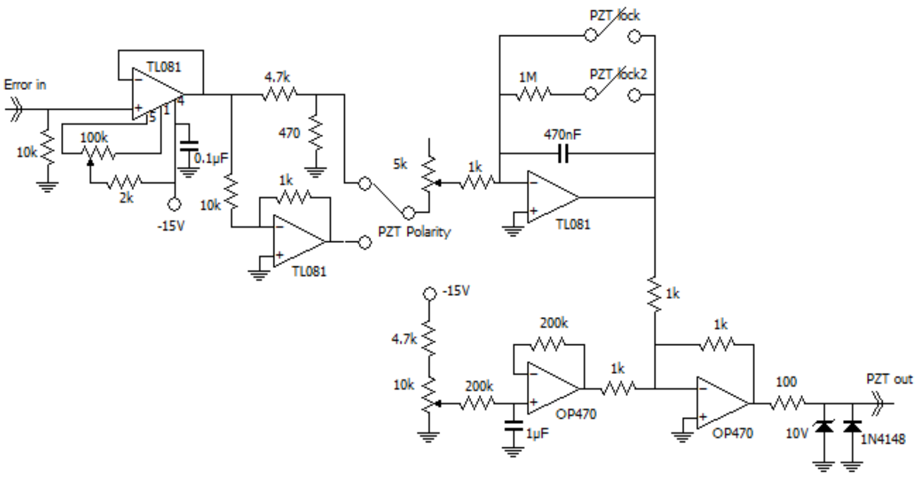


図 3.22　cavity へのフィードバック回路。先行研究 [21] の PZT にフィードバックする部分のみを回路として組んだ。この回路にも初段のオペアンプにオフセット調整機能をつけた。

ロックの具体的な手順を説明する。まず、2 つの LD を cavity の隣接する櫛へロックする。次に、cavity へのフィードバック回路の PZT bias を調整することで、cavity の FSR を変えて、ビート信号の中心周波数を変える。そうしてビート信号の中心周波数を RF の周波数の十分近くまで近づけて、PZT lock のスイッチをオンにする。これで、RF の周波数へのロックは達成される。ロックをかけたときの LD-A と LD-B とのビート信号を図 3.23、LD-A と LD-U とのビート信号を図 3.24 に示す。

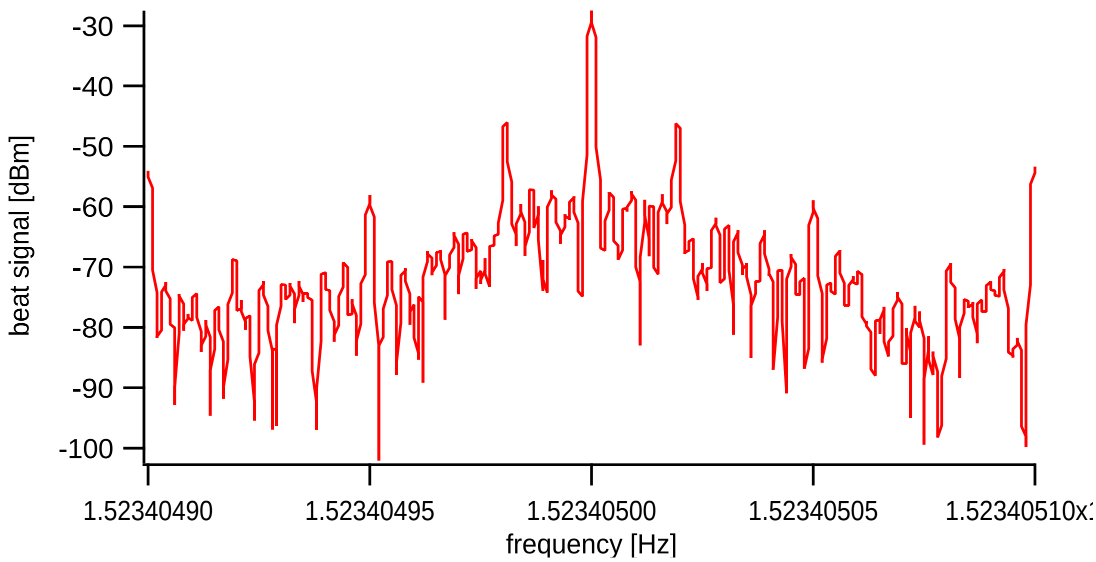


図 3.23　ビートロック時の LD-A と LD-B とのビート信号。span:200Hz　中心周波数が RF の周波数である 1.523405000GHz にあることが確認できる。

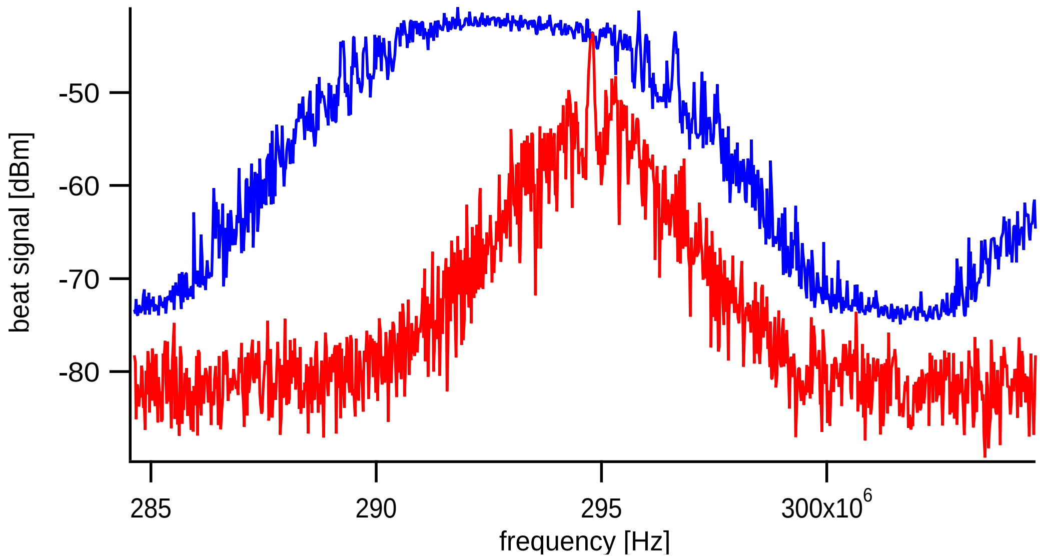


図 3.24　LD-A と LD-U のビート信号。 span:20MHz 赤:瞬間のデータ 青:100ms ごとにデータをとり 1000 回データをとった時の強度の最大値　およそ 100s 間で中心周波数が 4MHz ほど揺らいでしまっている。

図 3.23 について、スペクトラムアナライザでは 0.1Hz のオーダーまで見ることができたが、数分観察していても中心周波数の値が変わらなかった。すなわち、LD-A と LD-B とのビート信号の中心周波数を 0.1Hz 以下の精度でロックすることができた。それに対し、図 3.24 を見ると、LD-A と LD-U とのビート信号は 100s の間に 4MHz 程度の中心周波数の揺らぎが生じている。LD-U の長期的なドリフトは 5.6(1)kHz/day であるから、LD-A の中心周波数が 100s 間に 4MHz 程度揺れていると言える。図 3.24 について、赤で示した瞬間のデータの線幅はビートロックをかけているか否かに依らなかった。すなわち、ビートロックをかけたことにより LD-A の短期的な線幅が大きくなったわけではなく、LD-U のロックの精度が悪かったことなどにより短期的な線幅が大きくなってしまったと考えられる。

ここで、ビートロックをかけていないときの FSR のドリフトを調べるために、LD-A（または LD-B）と LD-U とのビート信号の中心周波数の推移を調べた。データを図 3.25 に示す。

ULE cavity にロックしたレーザーの周波数のドリフトはおよそ 10kHz/day と十分に小さいことに注意すれば、図 3.25 のドリフトは今回の実験で作製した cavity にロックしたレーザーの周波数のドリフトを表しており、それはおよそ 11.8kHz/min であることがわかる。すなわち、11.8kHz/min の速さでドリフトするレーザーの中心周波数が、ビートロックをかけることで 100s 間に 4MHz 程度の揺らぎになったということである。

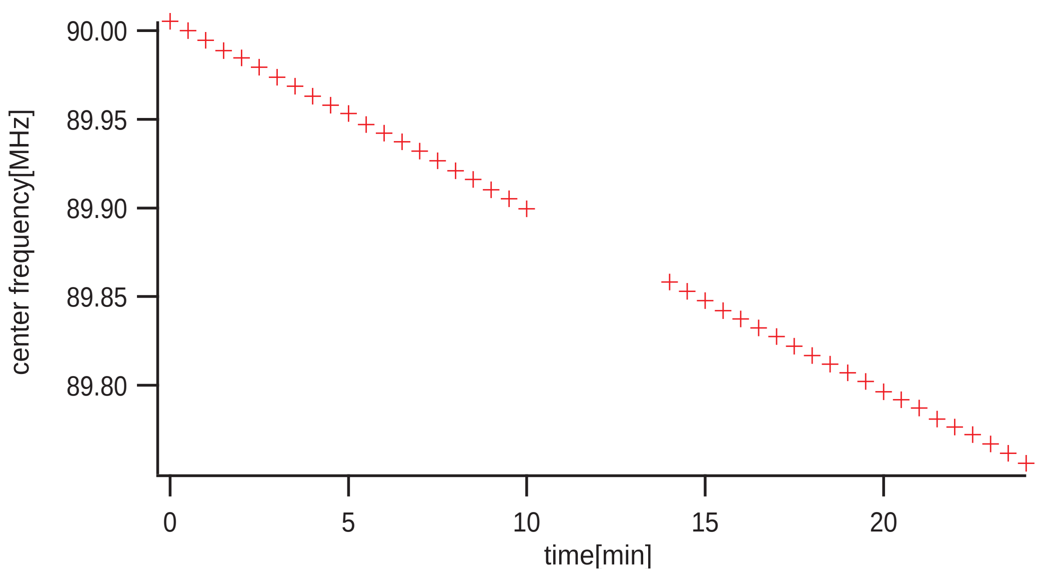


図 3.25　LD-A および LD-B と LD-U とのビート信号の中心周波数の推移。10s より前のデータは LD-B と LD-U のビート信号、10s より後のデータは LD-A と LD-U のビート信号のデータであるが、同じ櫛にロックしており FSR のドリフトを測定していることに変わりはない。

以下、ビートロックをかけたことで 4MHz 程度の中心周波数の揺らぎが生じた理由を考える。PDH 法を用いたロックは、エラー信号にオフセットが乗ることなどにより、レーザーの周波数を cavity の共鳴周波数ちょうどにロックできるわけではない。すなわち、レーザーの周波数には cavity の共鳴周波数からのずれが生じてしまう。これをそれぞれのレーザーに対し、δ_A、δ_B と書く。LD-A、B を隣の櫛にロックしたときのそれぞれの中心周波数 f_A、f_B は

$$f_A = (N+1) \times f_{FSR} + \delta_A \tag{3.18}$$
$$f_B = N \times f_{FSR} + \delta_B \tag{3.19}$$

と書ける。本実験でレーザーの周波数はおよそ 300THz、FSR はおよそ 1.5GHz であるから、N はおよそ 2×10^5 である。このとき、LD-A と LD-B のビート信号の周波数 f_0 は、

$$f_0 = f_A - f_B = f_{FSR} + \delta_A - \delta_B \tag{3.20}$$

となる。すなわちビート信号の周波数は FSR そのものではなく、それぞれのレーザーの周波数の共鳴周波数からのずれをノイズとして含んでいる。

このノイズの及ぼす影響について考察したい。3.6 節のビート信号の中心周波数の長期的な揺らぎは 10Hz 程度であった。このビート信号は f_0 を表すので、ビートロックをかけていないとき、$\delta_A - \delta_B$ の長期的な揺らぎは 10Hz 程度である。$\delta_A - \delta_B$ の揺らぎの値はレーザーの cavity へのロックの精度によるものである。従って、ビートロックをかけているときも $\delta_A - \delta_B$ の長期的な揺らぎは 10Hz 程度であると考えられる。

この実験におけるビートロックは f_0 を一定にしようと働くものである。$\delta_A - \delta_B$ の揺らぎにより f_0 がわずかに変化するとき、その変化を打ち消すように cavity の PZT に信号を送り、f_{FSR} を動かしている。この方法で f_0 を 0.1Hz 以下の精度で 1.5234050000GHz にロックすると、f_{FSR} に 10Hz 程度の揺らぎが生じる。この揺らぎは式 (3.18) において N+1 $\sim 2 \times 10^5$ が掛かることで増幅され、結局 f_A が数 MHz 揺らいでしまう、ということになる。

具体的に数値を代入した例を挙げてみる。LD-A と LD-B とのビート信号を測定し、その周波数と 1,500,000,000Hz との差を cavity の PZT にフィードバックすることで、LD-A を 300,001,500,000,000Hz、LD-B を 300,000,000,000,000Hz にロックしようとしたとする。

今、ある瞬間にたまたま f_{FSR}=1,500,000,000Hz、f_A=300,001,499,999,990Hz(FSR の 200,001 倍から 10Hz 引いたもの)、f_B=300,000,000,000,000Hz となっていたとする。f_A がずれているのは、LD-A のロック回路にオフセットが乗ってしまい、本当の共振器の櫛の周波数より 10Hz 低い周波数にロックされる状態になっていたのだ。

すると観測されるビートが 1,499,999,990Hz なので、cavity のフィードバック回路は「cavity の FSR を 10Hz 増やさなくてはいけない」と勘違いし、PZT を縮めてしまう。

その結果、f_{FSR}=1,500,000,010Hz、f_A=300,001,502,000,000Hz(FSR の 200,001 倍から 10Hz 引いたもの)、f_B=300,000,002,000,000Hz(FSR の 200,000 倍) となり、ビートはめでたく 1,500,000,000Hz となる。つまり、ビートを見ている PD から見ればロックは完全に達成されているのだが、その実、絶対周波数は目標から 2MHz もずれてしまったのである。

以上の考察からビートロックをかけた状態では、f_{FSR} の揺らぎはおよそ $\delta_A - \delta_B$ の揺らぎで制御されているとわかる。$\delta_A - \delta_B$ は長期的にドリフトしていくようなものではないので、f_{FSR} にもドリフトはないはずである。従って、ビートロックによって FSR の長期的なドリフトは抑えられたと言える。

また、レーザーの絶対周波数を 1kHz 以下の精度で測定したい場合、FSR の長期的な揺らぎを $\frac{1 \times 10^3}{2 \times 10^5}$Hz $= 5 \times 10^{-3}$Hz 以下に抑える必要がある。上の考察から、このビートロックの手法を用いてそれを実現するには δ_A、δ_B の長期的な揺らぎ、及びビートロックの精度を 5×10^{-3}Hz 以下に抑える必要があったことがわかる。

3.7.2 fiber EOM を用いた FSR の制御

3.7.1 節の実験では、ビートロックをすることで二つの LD を cavity にロックする時のノイズを拾ってしまい、FSR の揺らぎが大きくなった。そこで、二つの LD ではなく一つの LD だけを cavity にロックして FSR を制御することを試みた。そのために図 3.26 のような系を作製した。

まず LD-A を PDH 法を用いて cavity にロックした。次に、ファイバー EOM(Photline 社製 NIR-MPX-LN-02) によりレーザーに 1.5GHz の位相変調をかけ、中心周波数から 1.5GHz 離れた周波数にサイドバンドを立てた。ファイバー EOM を用いたのは通常の EOM では対応しない高周波の変調をかけるためである。また、位相を π 変調するのに必要な電圧は 3V と低いため多くのサイドバンドが励起できる。今ファイバー EOM にかけている RF1.5GHz に 100kHz の周波数変調をかけ、ロックインアンプ（Stanford Research Systems Lock-In Amplifier SR510）の参照信号として同じ 100kHz の信号を入れている。従って、2.6 節で述べた原理で、ロックインアンプの出力信号は微分信号になっているはずである。これを確認するためにファイバー EOM に入れている RF 信号を 10Hz で振った。そのときのオシロスコープの画像が図 3.27 である。CH4（緑色）がロックインアンプの出力信号であり、微分信号が得られていることが見てとれる。その後 10Hz の Ramp を切り、オシロスコープを見ながら cavity へのフィードバック回路の PZT bias を調整して反射光強度がなるべく小さくなるようにし、PZT lock のスイッチをオンにした。すると、cavity の FSR を RF の周波数にロックすることができた。このとき LD-A と LD-U とのビート信号をスペクトラムアナライザで観測して、cavity の安定度を評価した。

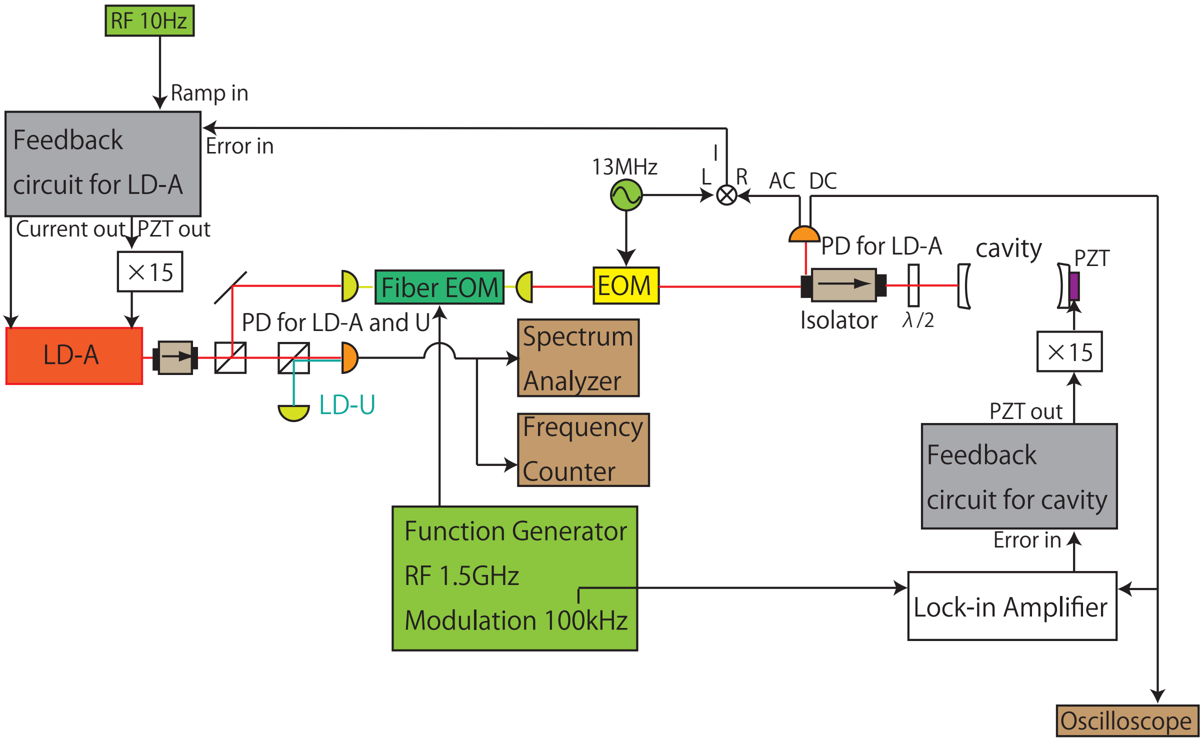


図 3.26　FSR の制御及び測定のための系の概略。LD-A の cavity からの反射光を拾っている PD の DC 成分を測定信号としてロックインアンプへ入れている。また、ファイバー EOM にかけている RF1.5GHz に 100kHz の周波数変調をかけ、ロックインアンプの参照信号として同じ 100kHz の信号を入れている。ロックインアンプの出力信号をフィードバック回路で増幅し、cavity の PZT に返している。

図 3.28 はロックをかけたときのスペクトラムアナライザのデータである。ファイバー EOM にかけている RF 信号の強度は 15dBm である。RF 信号の周波数は 1.523405000GHz に設定している。図 3.28 を見ると、LD-A と LD-U とのビート信号は 3MHz 程度の中心周波数の揺らぎが生じていて、3.7 節でビートロックを用いた場合とほとんど変わらない。この中心周波数の揺らぎは LD-A を cavity にロックする時の共鳴周波数からのずれとロックインアンプを用いたロックによる共鳴周波数からのずれによるものであると考えられる。

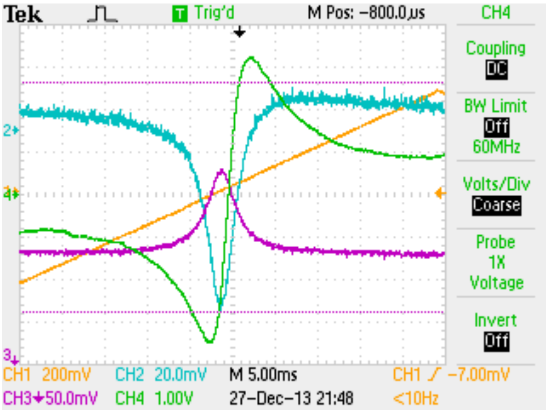


図 3.27　ファイバー EOM にかけている RF を 10Hz で振ったときのオシロスコープの画像。CH4(緑色) はロックインアンプの出力信号を表す。共鳴周波数で 0 を横切るような微分信号が得られている。

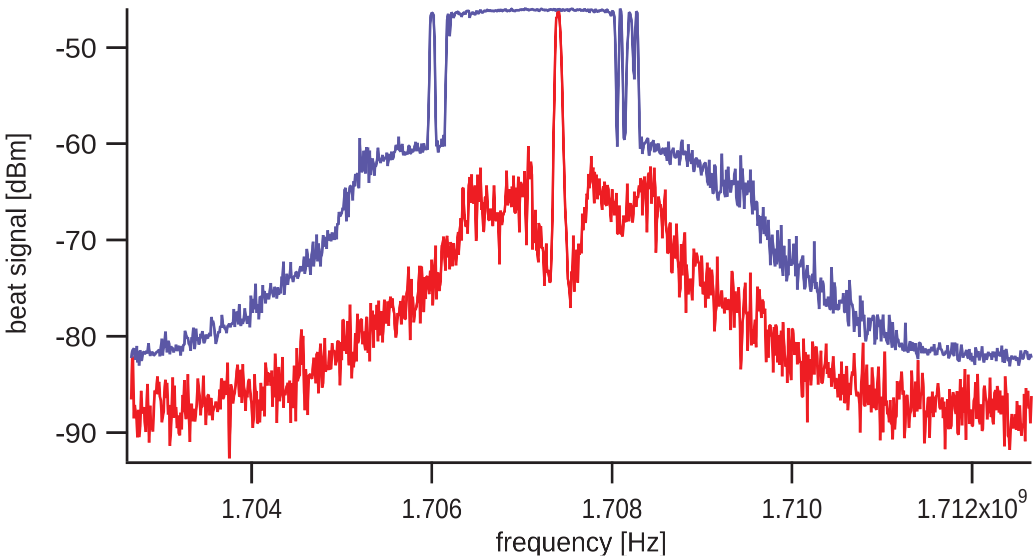


図 3.28　LD-A と LD-U とのビート信号。 span:10MHz 赤:瞬間のデータ 青:120ms ごとにデータをとり、1003 回データをとった時の強度の最大値　およそ 100s 間で中心周波数が 3MHz ほど揺らいでいる。

そこで、cavity の PZT に返すロックの精度をよくするために、ファイバー EOM にかける RF 信号の強度を大きくした。EOM に位相変調をかけるとサイドバンドが立つことは 2.4 節で述べた。式 (2.50) では近似を用いてサイドバンドは $\omega \pm \Omega$ の周波数に立つと述べたが、厳密には $\omega \pm \Omega$、$\omega \pm 2\Omega$、$\omega \pm 3\Omega$、$\cdots$ の周波数にサイドバンドは立つ。ベッセル関数の性質から位相変調の強度を大きくするほど高次のサイドバンドの振幅は大きくなる。レーザーの中心周波数 ω がちょうど共鳴周波数 ω_0 にロックできているとして、FSR と RF の周波数が Δ ずれているとき、$\omega \pm n\Omega$ の周波数のサイドバンドと共鳴周波数のずれは $n\Omega - nFSR = n\Delta$ である（図 3.29)。このずれを小さくするようにロックは働くから、高次のサイドバンドが強く立っているほど FSR をより精度良く RF の周波数にロックすることができる。同じことであるが別の説明として、次のようにも考えられる。n 次のサイドバンドの寄与だけを考え、仮にサイドバンドの次数、振幅によらず同じ δ の精度でロックできるとしたとき、ロックをすると $n\Omega - nFSR = \delta$ となる。すなわち、$FSR = \Omega + \dfrac{1}{n}\delta$ であって、より精度よくロックすることができることがわかる。従って、RF 信号の強度を強くして高次のサイドバンドの振幅を大きくすることで、ずれに対して敏感にロックをかけることができ、中心周波数の揺らぎは小さくなると考えられる。このファイバー EOM にかけられる最大の RF 信号を入れたとき、サイドバンドは ±10 本程度立つ。

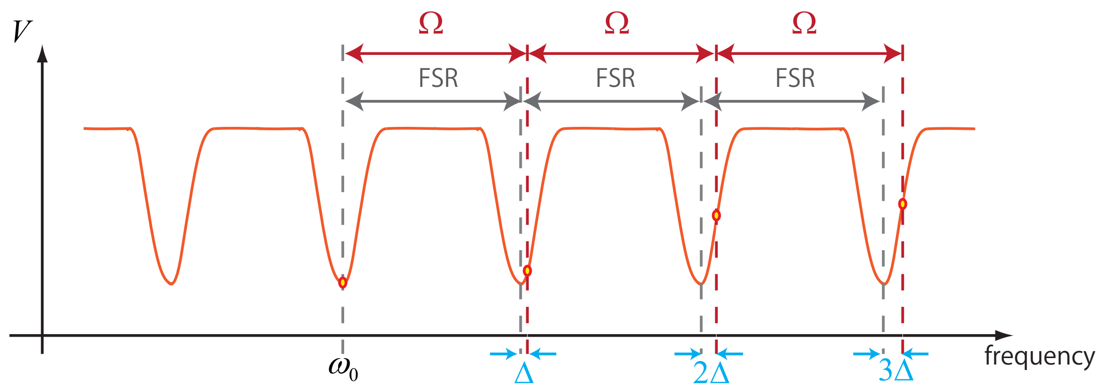


図 3.29　サイドバンドと共鳴周波数とのずれの様子。縦軸は cavity からの反射光強度を表す。レーザーの中心周波数が cavity の共鳴周波数 ω_0 に一致しているとき、高次のサイドバンドほどずれが大きくなる。

RF 信号の強度を大きくするために、ファンクションジェネレータとファイバー EOM の間にアンプ (R&K AA180-0S) を入れた。これは、1.5GHz でおよそ 32dB のゲインを持つ。このとき、ファンクションジェネレータで出力する RF の強度を-17dBm にしたときにファイバー EOM にかかる変調の強度がおよそ 15dBm になることに注意する。そしてファンクションジェネレータで出力する RF の強度を-20dBm から 0dBm の範囲で変化させて、中心周波数の揺らぎを測定した。図 3.30、3.31、3.32 はそれぞれ-20dBm、-10dBm、0dBm の強度の RF 信号をアンプを通してロックをかけた時の、LD-A と LD-U とのビート信号のデータである。図 3.33 はファンクションジェネレータで出力する RF 信号の強度に対する中心周波数の揺らぎをプロットしたものである。

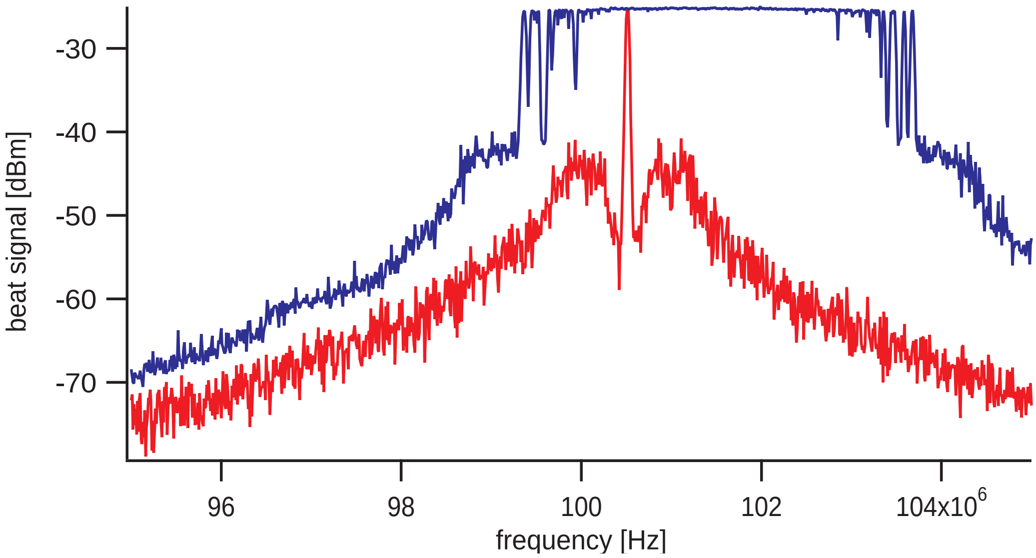


図 3.30　LD-A と LD-U とのビート信号。 span:10MHz 赤:瞬間のデータ 青:120ms ごとにデータをとり 1000 回データをとった時の強度の最大値　およそ 100s 間で中心周波数の揺らぎは 4MHz 程度。

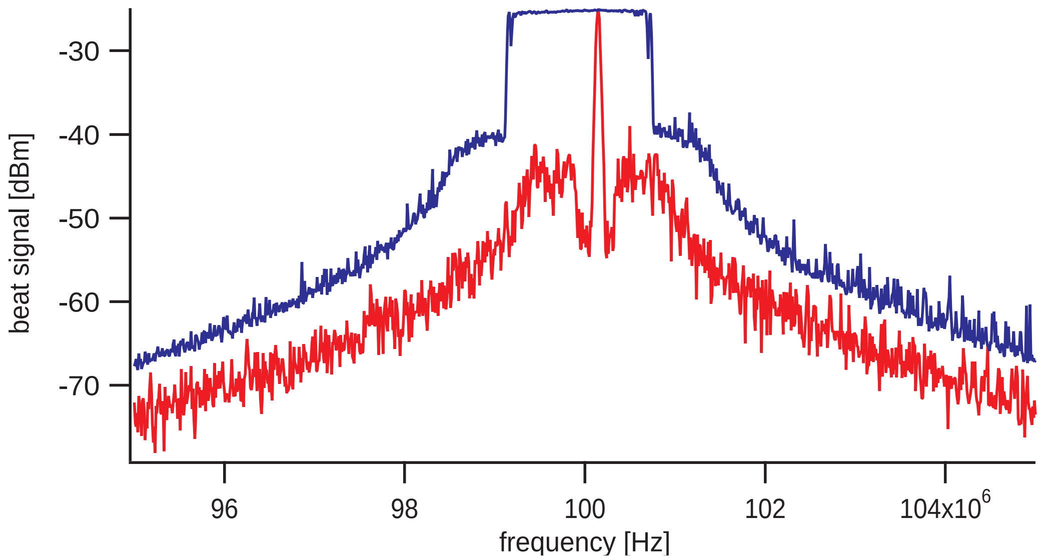


図 3.31　LD-A と LD-U とのビート信号。 span:10MHz 赤:瞬間のデータ 青:120ms ごとにデータをとり 1000 回データをとった時の強度の最大値　およそ 100s 間で中心周波数の揺らぎは 1.5MHz 程度。

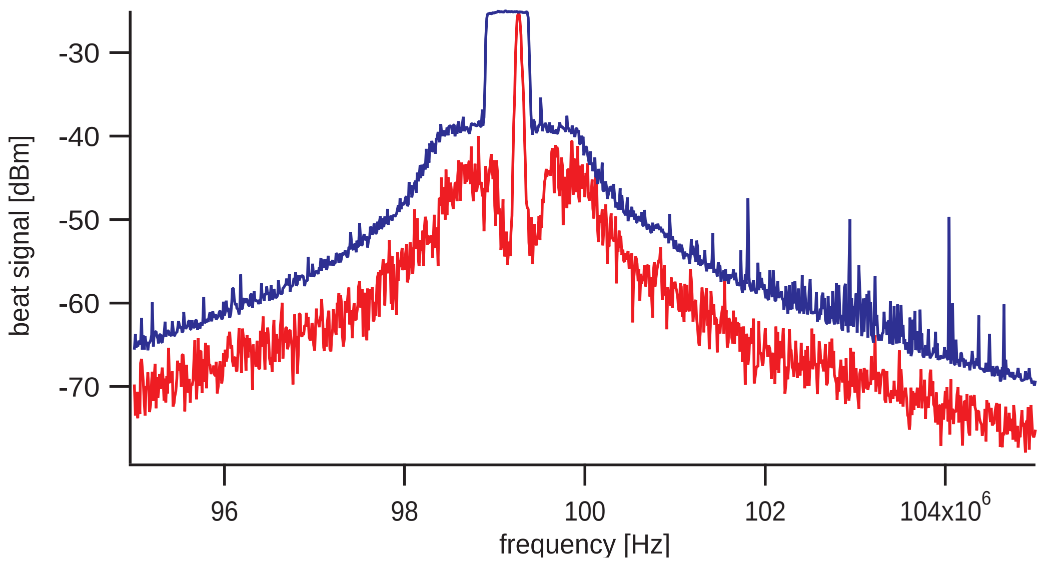


図 3.32　LD-A と LD-U とのビート信号。 span:10MHz 赤:瞬間のデータ 青:120ms ごとにデータをとり 1000 回データをとった時の強度の最大値　およそ 100s 間で中心周波数の揺らぎは 500kHz 程度。

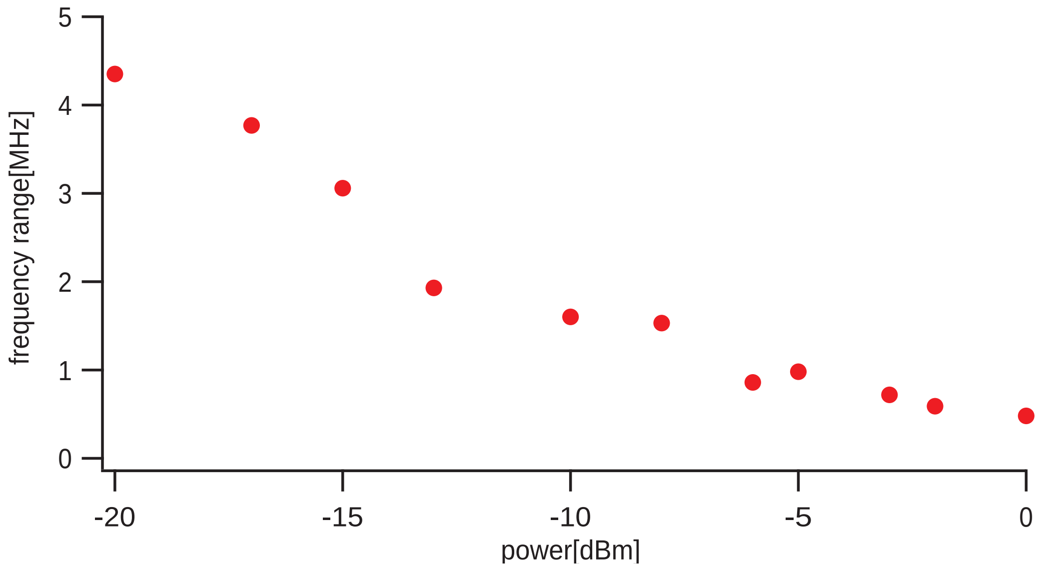


図 3.33　ファンクションジェネレータで出力する RF 信号の強度に対する中心周波数の揺らぎ。中心周波数の揺らぎは、信号強度の最大値が-30dBm を超える周波数の最大値と最小値の差とした。

図 3.33 から RF 信号の強度を大きくするほど、中心周波数の揺らぎが抑えられていることがわかる。特にファンクションジェネレータで出力する RF 信号の強度が 0dBm で、ファイバー EOM にかかる変調の強度がおよそ 32dBm であるとき、およそ 100s 間の中心周波数の揺らぎは図 3.32 の通りおよそ 500kHz にまで抑えることができた。

また、この系で cavity の FSR をロックする RF の周波数を変化させ、LD-A と LD-U とのビートの中心周波数を測定した。RF の周波数は、1.523405200Hz から 1.523406000Hz まで、50Hz ずつ値を変えてデータを取った。ビートの中心周波数には揺らぎがあるため、各々の周波数に対し 100 回、ビートの中心周波数を周波数カウンターで計測した。式 (2.28) より、RF の周波数とビート周波数は比例関係を満たすことが予想される。図 3.34 が得られた RF の周波数とビート信号の周波数の関係のデータである。図 3.34 より、RF の周波数とビート周波数は確かに比例関係を満たすようである。

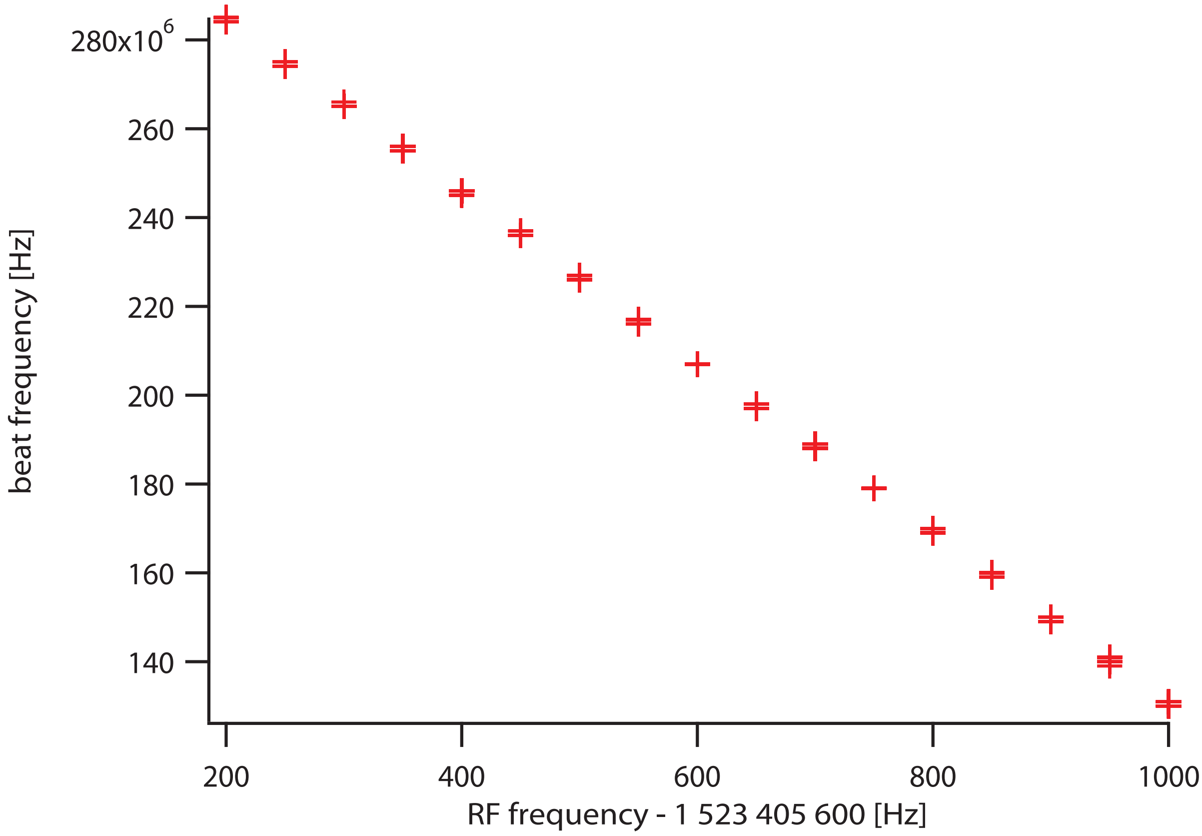


図 3.34　RF の周波数に対するビート信号の周波数。

3.8　レーザーの周波数差の測定

3.8.1　共鳴周波数間隔の周波数依存性

次に、共鳴周波数間隔の周波数依存性を調べた。今回用いているのは誘電体多層膜ミラーであり、光がミラーで反射するとき入射光と反射光の間で位相シフトが起こる。この位相シフトは光の周波数の関数であり、位相シフトの周波数依存性を分散という。このミラーの分散により、共鳴周波数間隔に周波数依存が現れる。ミラーでの反射による位相シフトを $\Phi(\nu)$ と書く。すると式 (2.20) の ϕ は

$$\phi = \frac{4\pi l}{\lambda} + 2\Phi(\nu) \tag{3.21}$$

と書ける。式 (2.25) の共鳴条件は

$$\frac{4\pi l}{\lambda} + 2\Phi(\nu_m) = 2\pi m (m : \text{整数}) \tag{3.22}$$

となる。このとき、

$$\nu_m = \frac{c}{2L_0}\left(m - \frac{1}{\pi}\Phi(\nu_m)\right) \tag{3.23}$$

であって、

$$\mathrm{FSR} \equiv \frac{\nu_m}{m} = \frac{c}{2L_0} - \frac{\Phi(\nu_m)c}{2\pi L_0 m} \tag{3.24}$$

となる。本実験で測定しているのは共鳴周波数間隔である。n 番目の櫛と n+1 番目の櫛の共鳴周波数間隔を Δ_n とすると、

$$\begin{aligned}
\Delta_n &\equiv \nu_{n+1} - \nu_n && (3.25)\\
&= \frac{c}{2L_0}\left[1 - \frac{1}{\pi}(\Phi(\nu_{n+1}) - \Phi(\nu_n))\right] && (3.26)\\
&\simeq \frac{c}{2L_0}\left[1 - \frac{1}{\pi}(\nu_{n+1} - \nu_n)\left.\frac{d\phi}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_n}\right] && (3.27)\\
&\simeq \frac{c}{2L_0}\left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{c}{2L_0}\left.\frac{d\phi}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_n}\right) && (3.28)
\end{aligned}$$

となる。式（3.24）と（3.28）からミラーの分散を考えると、隣接する共鳴周波数間隔と FSR とは厳密には別の値をとることに注意する。

共鳴周波数間隔の周波数依存性を調べるために図 3.35 のような系で実験を行った。図 3.26 の系と異なり、ファンクションジェネレータにフィードバックを返し、ファイバー EOM に入れている RF 信号の周波数を cavity の共鳴周波数にロックしていることに注意する。

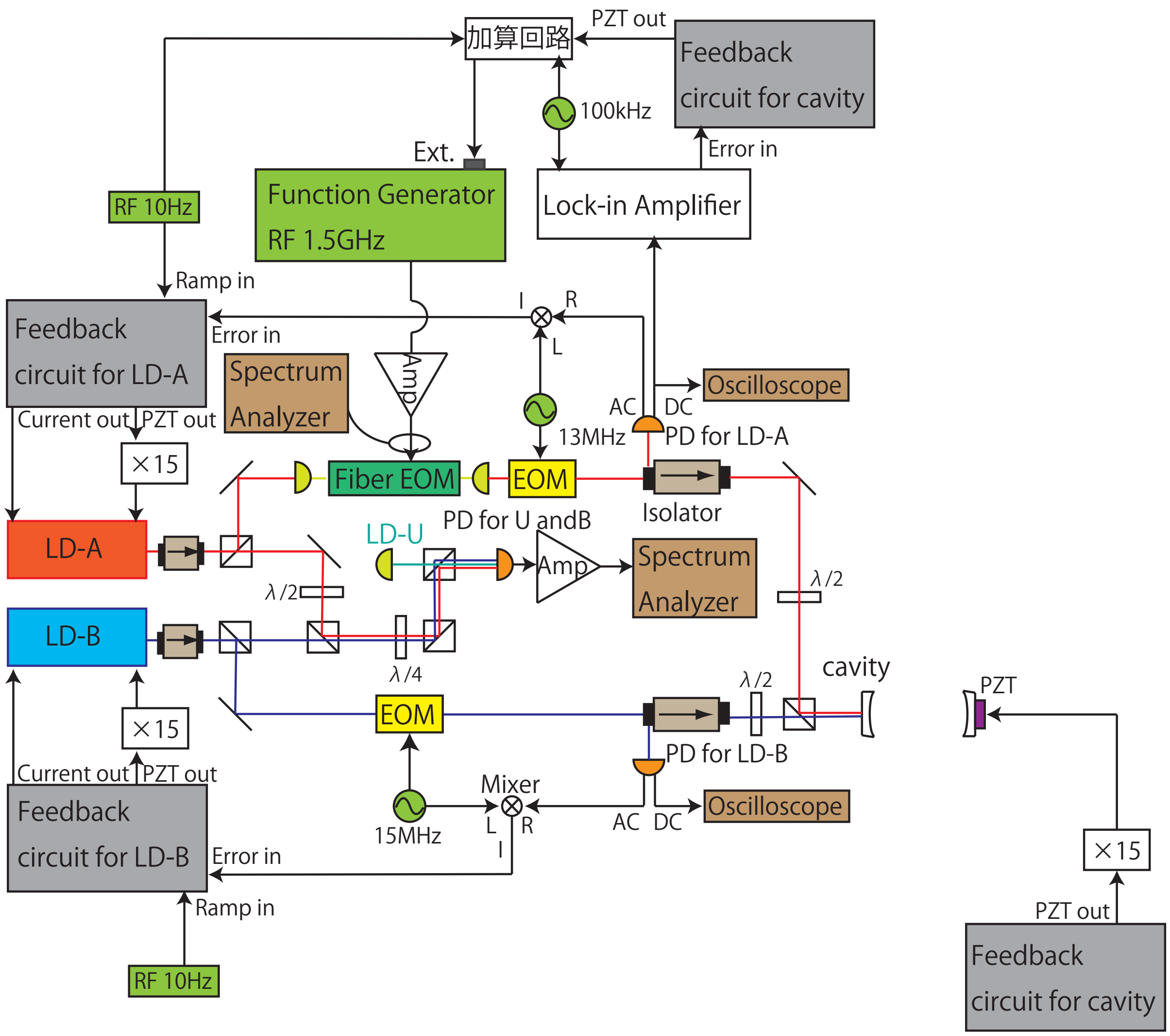


図 3.35　共鳴周波数間隔の周波数依存を見るための系。加算回路に入れている 10Hz はエラー信号の形を見やすくためであり、実際にロックをかけるときは切っている。cavity の PZT につながっている回路は cavity 長をおよそ固定するためのものである。

共鳴周波数間隔は当然 cavity 長によっても変化してしまうので、この実験では cavity 長を固定したい。そこで、LD-B を cavity にロックし、LD-B と LD-U とのビート周波数が 100MHz になるように cavity への回路の PZT bias を調整する。この状態で LD-A を cavity へロックし、さらにサイドバンドを立てて共鳴周波数へロックした。レーザーの波長は ECDL の特性上およそ 1000-1060nm の範囲でしか動かせない。さらに、PD(S5971) の受光感度が長波長で小さくなるので [25]、およそ 1000-1030nm の範囲でレーザーの波長を変えて cavity の共鳴周波数間隔の値を測定した。

結果が図 3.36 である。確かに共鳴周波数間隔が周波数に依存していることがわかる。データを二次関数 $y = a(x-b)^2 + c$ でフィッティングした。

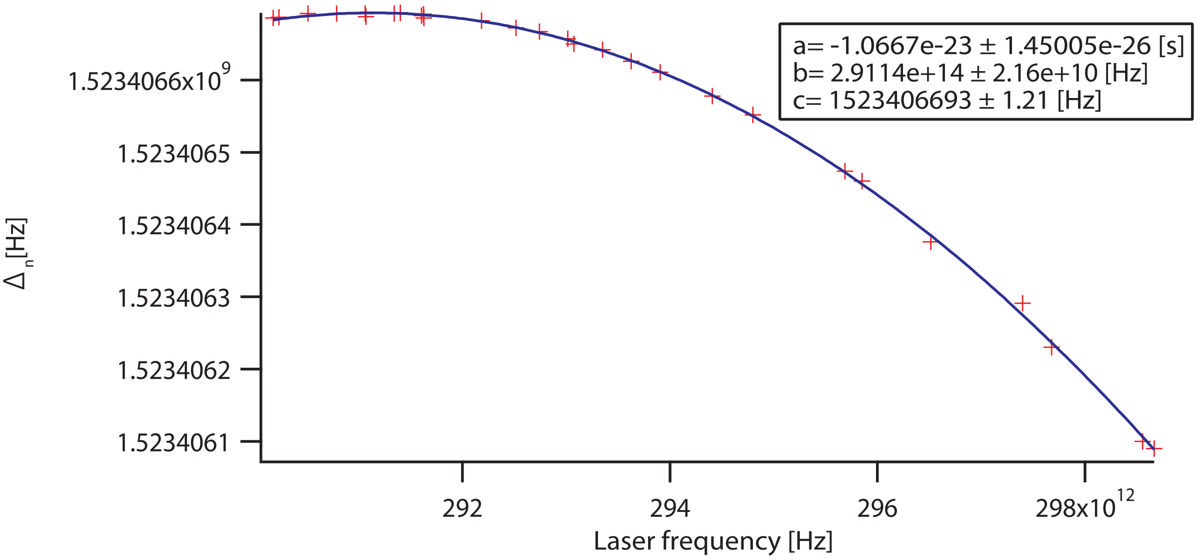


図 3.36 LD-A の周波数に対する共鳴周波数間隔。赤：実験で得られたデータ 青：フィッティング 周波数は波長計での読みである。

$\phi'(\nu)$ が ν の二次関数で近似できると考えて $\phi'(\nu) = A\nu^2 + B\nu + C$ と置き、式 (3.28) に代入した。$\Delta_n = a(\nu - b)^2 + c$ と比較して、$\phi'(\nu)$ を求めた。これから GDD(Group Delay Dispersion)

$$\mathrm{GDD} \equiv \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \tag{3.29}$$

を求めた。フィッティングから得られた $\phi'(\nu)$ から GDD は $-3.63 \times 10^{-43}\nu + 1.06 \times 10^{-28}[\mathrm{s}^2]$ と求まった。これをプロットしたものが図 3.37 である。

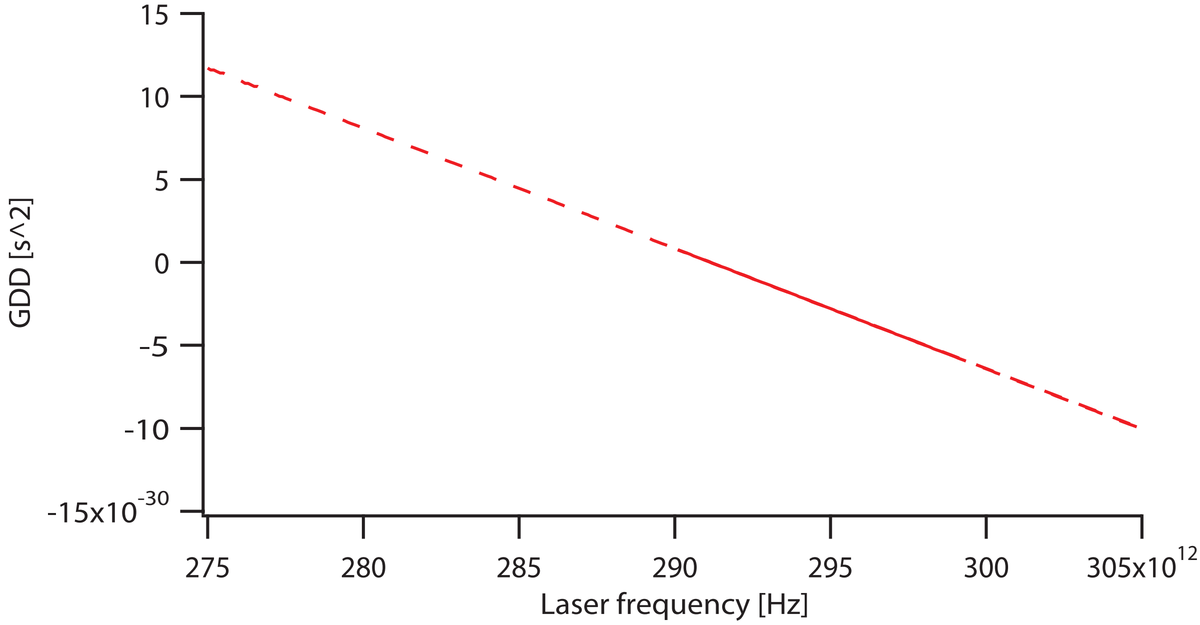


図 3.37　図 3.36 のフィッティングの値から求めた周波数に対する GDD。測定した範囲での値を実線で示した。点線部分はフィッティングから推測される値である。

スペックシートによると、本実験で使用したミラーは波長 990-1085nm の範囲で $|\mathrm{GDD}| < 20\mathrm{fs}^2 = 20 \times 10^{-30}\mathrm{s}^2$ を満たす。この範囲を周波数に直すと 276-303THz であるが、図 3.37 を見てわかるように、この範囲で $|\mathrm{GDD}| < 20\mathrm{fs}^2 = 20 \times 10^{-30}\mathrm{s}^2$ を満たしている。

3.8.2　^{41}K^{87}Rb 分子の準位の周波数差の測定

図 3.36 のデータを用いると、この cavity にロックしたレーザーの周波数差を共鳴周波数間隔の測定精度で測定することができる。これを利用して ^{41}K^{87}Rb 分子の準位の周波数差を測定する実験を行った。特に、準位 $b^3\Pi_{0+}$ の v=0 と v=1 との周波数差及び準位 $X^1\Sigma^+$ の v=0 と v=1 との周波数差を測定した。^{41}K^{87}Rb 分子の遷移周波数の測定は先行研究 [14] で行われている。[14] の分光実験では、ULE cavity にロックされたレーザーと、それに対してオフセットをつけてロックされたレーザーを用いて分光を行った。このオフセット周波数は OPLL を使って高精度に制御されている。分光の精度は数 kHz 程度であり、ULE cavity の共鳴周波数からの周波数差は精度よくわかっている。図 3.38 に示すように [14] の分光実験では三つの分光（$X^1\Sigma^+$,v=0 $\to$ $b^3\Pi_{0+}$,v=0、$X^1\Sigma^+$,v=0 $\to$ $b^3\Pi_{0+}$,v=1、$X^1\Sigma^+$,v=1 $\to$ $b^3\Pi_{0+}$,v=0）を行っている。これらの共鳴周波数を s_a、s_b、s_c と置く。また、これらの分光のときに ULE cavity にロックされたレーザーの周波数を u_a、u_b、u_c と置く。これらを波長計で測定すると、それぞれ 291.4159(2)THz、293.6317(2)THz、289.2107(2)THz であった。

まず、準位 $b^3\Pi_{0+}$ の v=0 と v=1 との周波数差の測定に関して説明する。分光実験 [14] からは

$$s_a = u_a + 1.254102(2)\mathrm{GHz} \tag{3.30}$$
$$s_b = u_b + 1.916096(3)\mathrm{GHz} \tag{3.31}$$

となることがわかっている。知りたいのは $s_b - s_a$ であるので、$u_b - u_a$ を正確に測定すればよい。[14] の実験によると $s_b - s_a = 2.2165(2)\mathrm{THz}$ と 200MHz の精度で求められている。本実験では $u_b - u_a$ をより精度良く測定するために図 3.39 のような系を作製した。

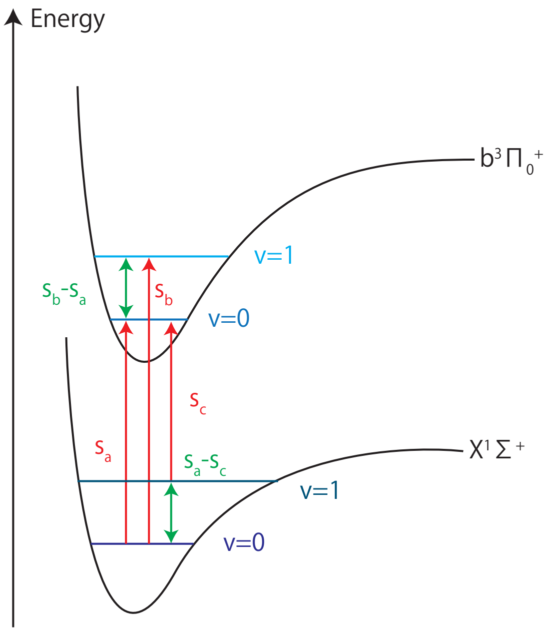


図 3.38　${}^{41}\mathrm{K}{}^{87}\mathrm{Rb}$ 分子の本実験に関係する準位の概略。準位 $b^3\Pi_{0+}$ の v=0 と v=1 との周波数差は $s_b - s_a$ で表される。準位 $\mathrm{X}^1\Sigma^+$ の v=0 と v=1 との周波数差は $s_a - s_c$ で表される。

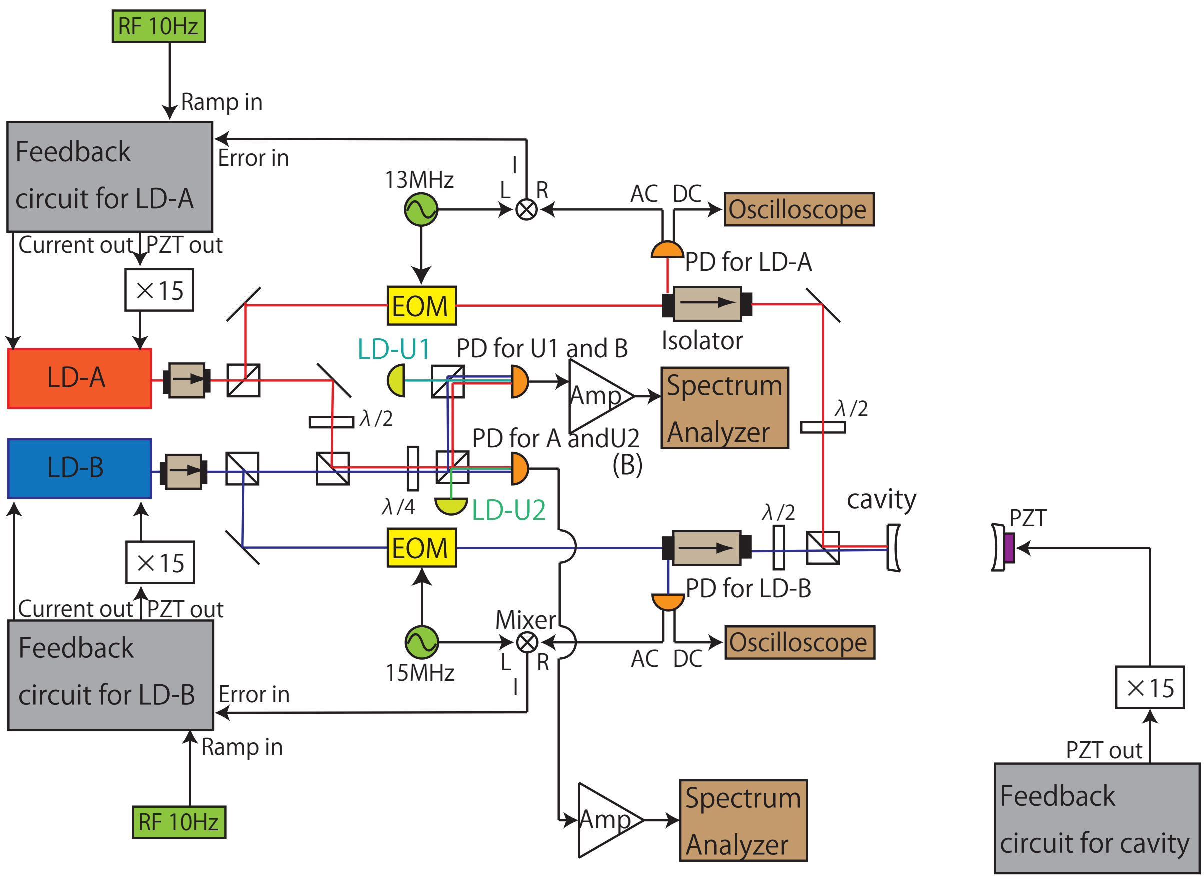


図 3.39　周波数差測定のための系の概略。LD-U1、LD-U2 は ULE cavity にロックしているレーザーで、別のテーブルから光ファイバーを用いて持ってきている。LD-U1 は cavity 長固定用であり、LD-U2 は周波数測定用である。

図 3.39 に示すように、ULE cavity にロックされたレーザーを 2 本用いている。1 本は図 3.35 の実験と同様に、cavity 長を固定するためのものである（LD-U1)。もう 1 本は u_a もしくは u_b にロックされており、LD-A とのビート周波数が測定できるようになっている（LD-U2)。ここで、LD-A を u_a や u_b に近い周波数になるように cavity に対してロックしておく。これらの周波数を f_a 及び f_b とする。f_a と f_b の波長計での値はそれぞれ 291.4185(3)THz、293.6340(3)THz である。$f_a - u_a$ や $f_b - u_b$ はビート周波数の観測により測定され、

$$f_a - u_a = 3.046813(1)\mathrm{GHz} \tag{3.32}$$
$$f_b - u_b = 2.378403(1)\mathrm{GHz} \tag{3.33}$$

となった。あとは図 3.36 で求めた共鳴周波数間隔の周波数依存を使って、$f_b - f_a$ を計算すればよい。

f_a、f_b はそれぞれ n_a、n_b 番目の櫛の共鳴周波数であるとし、その間の櫛の数 $n_b - n_a$ を N と書く。N は $N = \dfrac{293.6340(3)\mathrm{THz} - 291.4185(3)\mathrm{THz}}{1.52340667(4)\mathrm{GHz}} = 1454.3(4)$ から 1454 と決定した。すると、LD-A の周波数差は

$$f_b - f_a = \sum_{n=n_a}^{n_b-1} \Delta_n \tag{3.34}$$
$$= \sum_{n=n_a}^{n_a+N-1} \left[a(\nu_n - b)^2 + c\right] \tag{3.35}$$

と計算できる。その結果、$f_b - f_a = 2.215033295(3)\mathrm{THz}$ となった。この誤差は、Δ_n のフィッティングの誤差 1.2Hz を N 倍した 1.7kHz におよそ一致する。この値から式 (3.32)、(3.33）を用いて $u_b - u_a = 2.215701705(3)\mathrm{THz}$ と求まった。さらに式（3.30)、(3.31）を用いて $s_b - s_a$ は $s_b - s_a = 2.216363699(5)\mathrm{THz}$ と求めることができた。

同様にして、準位 $\mathrm{X}^1\Sigma^+$ の v=0 と v=1 との周波数差を求めた。分光実験 [14] から

$$s_c = u_c + 2.902174(6)\mathrm{GHz} \tag{3.36}$$

となることがわかっている。LD-A を u_c に近い周波数 f_c にロックする。f_c の波長計での値は 289.2023(3)THz である。ビート周波数から、

$$f_c - u_c = 1.991395(1)\mathrm{GHz} \tag{3.37}$$

となった。f_a と f_c の間の櫛の数 N は N=1455 と決定され、式 (3.35) と同様の計算で、$f_a - f_c = 2.216556721(2)\mathrm{THz}$ となった。この値から式（3.32)、(3.37）を用いて $u_a - u_c = 2.215501303(2)\mathrm{THz}$ と求まった。さらに式（3.30)、(3.36）を用いて $s_a - s_c$ は $s_a - s_c = 2.213853231(7)\mathrm{THz}$ と求めることができた。それぞれの周波数の関係を図 3.40 にまとめた。

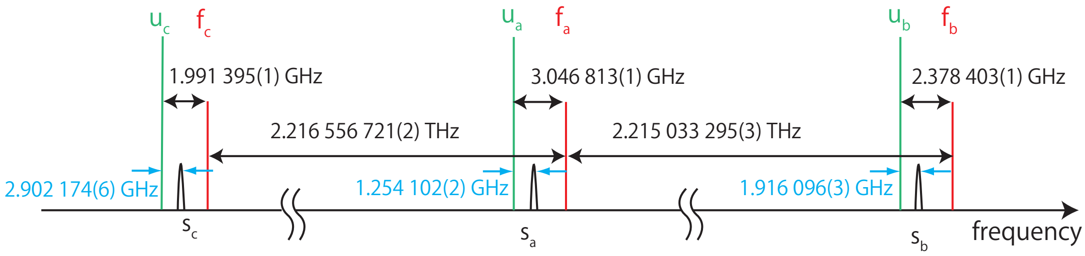


図 3.40　LD-A の周波数 f_a、f_b、f_c、LD-U2 の周波数 u_a、u_b、u_c、$^{41}K^{87}Rb$ 分子の遷移周波数 s_a、s_b、s_c の関係。

ただし、ULE 製の cavity には長期的な FSR のドリフトがあることを考慮しなければならない。分子の分光を行ったのは 2012 年の 7 月 4 日である。この測定までにおよそ 600 日の期間があるため、ULE cavity の共鳴周波数の変化を評価したうえで、先程の結果に補正をする必要がある。

2014 年 3 月 2 日に $X^1\Sigma^+(v=0) \to b^3\Pi_{0^+}(v=0)$ の遷移を再び分光したところ、$s_a - u_a$ は 1.246625(4)GHz であることが分かった。つまり、2012 年 7 月 4 日に分光を行ったときと比べて ULE cavity の共鳴周波数が 1.254102(2)GHz−1.246625(4)GHz=7.477(4)MHz 大きくなっていることが分かる。そのため、先程求めた値よりも実際の分子の遷移周波数は小さくなることが分かる。$u_b - u_a$、$u_a - u_c$ はそれぞれ 2.215701705(3)THz、2.215501303(2)THz である。従って、FSR のドリフトが周波数に対して均等であると仮定すると、ULE cavity の FSR のドリフトによる $s_b - s_a$、$s_a - s_c$ に対する補正は

$$7.477(4)\mathrm{MHz} \times \frac{2.215701705(3)\mathrm{THz}}{291.4159(2)\mathrm{THz}} = 56.85(3)\mathrm{kHz} \tag{3.38}$$

$$7.477(4)\mathrm{MHz} \times \frac{2.215501303(3)\mathrm{THz}}{291.4159(2)\mathrm{THz}} = 56.84(3)\mathrm{kHz} \tag{3.39}$$

である。

この補正を加えると、$b^3\Pi_{0^+}$ の v=0 と v=1、$X^1\Sigma^+$ の v=0 と v=1 の準位の周波数差はそれぞれ 2.216 363 642(5)THz、2.213 853 174(7)THz であることが求められた。結果を図 3.41 にまとめた。

図 3.41 より、[14] の実験で 4 桁の精度で求まった準位の周波数差を本実験によって 9 桁の精度で求めることができた。この測定方法は周波数差の高精度な測定に有効である。

(a)

f_a [THz]（波長計での測定）	291.418 5(3)	f_a-u_a[GHz]	3.046 813(1)
f_b [THz]（波長計での測定）	293.634 0(3)	f_b-u_b[GHz]	2.378 403(1)
f_c [THz]（波長計での測定）	289.202 3(3)	f_c-u_c[GHz]	1.991 395(1)

(b)

f_b-f_a[THz]	2.215 033 295(3)	f_a-f_c[THz]	2.216 556 721(2)
u_b-u_a [THz]	2.215 701 705(3)	u_a-u_c [THz]	2.215 501 303(2)

(c)

	s_b-s_a [THz]	s_a-s_c [THz]
本実験で得られた値	2.216 363 642(5)	2.213 853 174(7)
波長計での測定で得られる値	2.216 5(2)	2.213 9(2)

図 3.41　(a) は LD-A の周波数及び LD-A と LD-U2 とのビート周波数の測定値を表す。(b) は式 (3.35) から得られる LD-A の周波数差及び LD-U2 の周波数差の計算値を表す。(c) は本実験での ^{41}K^{87}Rb 分子の $b^3\Pi_{0+}$ の v=0 と v=1 との周波数差、$X^1\Sigma^+$ の v=0 と v=1 との周波数差の計算値及び波長計での測定値を表す。

第 4 章

まとめと今後の展望

本研究において、我々は cavity の共鳴周波数間隔の制御を行った。実験に用いた cavity はスーパーインバー製であり、フィードバック用に PZT が取り付けられてある (3.2.1 節)。cavity は真空槽の中に置かれた (3.3 節)。

まず、我々は 2 つの LD(LD-A,B) をそれぞれ独立に cavity にロックし、相対線幅を 3.93(3)Hz まで細くすることに成功した (3.6 節)。この成功の要因には、LD のロック回路を改良したことが挙げられる。

その後、我々は cavity の PZT にフィードバックを行うことで、cavity の共鳴周波数間隔をマイクロ波にロックした (3.7 節)。もともと 11.8kHz/min でレーザーの周波数が動いていたが、その長期的な揺らぎを抑えることができた。このときのレーザー周波数の短期的な揺れは 500kHz であり、FSR に換算するとおよそ 2.5Hz である。はじめはレーザー周波数が数 MHz の揺れていたが、次の二つのアプローチによりその揺れを小さくすることができたと考えられる。一点目は、2 つのレーザーのビートをロックするのではなく、1 つのレーザーに fiber EOM で変調をかけ、そのサイドバンドをロックしたという点である。もう一点は、サイドバンドのロックの揺らぎを小さくするため、変調の強度をなるべく大きくしたことである。そして、それでも残った 500kHz の周波数の揺れは、LD をロックする時の精度によるものと考えられる。

最後には、cavity の共鳴周波数間隔の周波数依存を測定することで、KRb 分子の準位の共鳴周波数差を先行研究 [14] と比べて高精度で測定した (3.8 節)。ミラーの分散により cavity の縦モード間隔が一定になっていないことに注意し、その周波数依存を求めた。本実験で作製した cavity にロックしたレーザーと KRb の共鳴周波数のレーザーのビートを観測し、cavity の縦モード間隔の周波数依存のデータを用いることで KRb 分子の共鳴周波数差を求めた。その結果、共鳴周波数差は 9 桁の精度で求めることができた。これは周波数精度としては 3kHz に程度に相当し、分子分光の信号から決まる精度と同程度の精度である。これまでの波長計を使った測定が 4 桁の精度 (200kHz 程度) であったことに比べ

ると、5 桁程度の極めて大きな改善が得られた。

今後の展望としては以下のようなことが挙げられる。

まず、cavity の共鳴周波数の制御に関しては、共鳴周波数を長期的に見て安定させることはできたものの、短期的な揺らぎの幅が大きくなってしまった。これを改善するためには、ロックに用いる信号の S/N 比を改善することが重要であると考えられる。現在、ロック信号のノイズの原因として考えられるのは、ロック回路中のオペアンプの出す電圧、フォトダイオードの暗電流などが挙げられる。それらの微弱なノイズがオフセットとして積分回路を通ることで、ノイズが大きくなってしまっていると考えられる。

cavity の共鳴周波数間隔の測定については、今回は 290〜299THz で行った。今回測定した KRb 分子のエネルギー差を測定するのにはこの領域の周波数依存が測定してあれば十分であるが、この範囲を広げることで周波数差測定に活用できる機会が増えるはずである。このため、これより広い帯域を持ったフォトダイオードを使用し共鳴周波数間隔を測定するべきだと考えられる。

付録 A

ABCD 行列

ガウシアンビームの光線を追跡するためのパラメーターとして、ABCD 行列を考える。

ある光軸からの距離を y_1, 光軸に対する角度を γ_1 とし、と光線ベクトル $\begin{pmatrix} y_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ を考える。ただし、γ は小さいものとし、$sin\gamma \simeq \gamma$ を仮定する。ある光線が光学要素を通過した後の光線ベクトルが $\begin{pmatrix} y_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ であるとし、

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

と表されるとき、この $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ のことを ABCD 行列という。ABCD 行列は、表 A.1 のように表される。

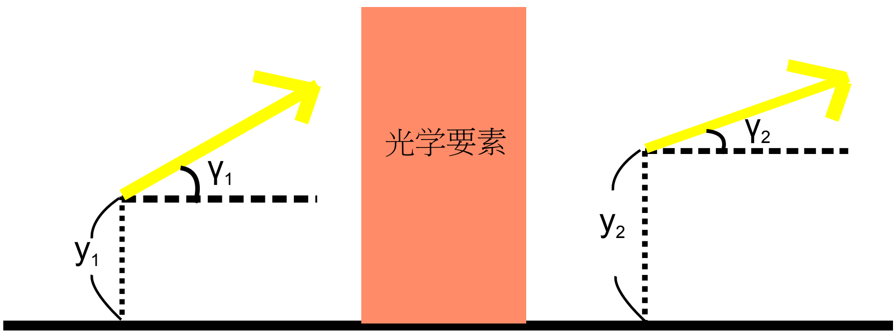


図 A.1　光線ベクトル。光の軸からの位置を y、軸に対する向きを γ で表している。

ABCD 行列をガウシアンビームに応用するために、ビームパラメーター

$$q \equiv z + z_R \tag{A.2}$$

表 A.1　ABCD 行列

均一な媒質中での長さ l の伝播	$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
焦点距離 f のレンズ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
屈折率 n_1, n_2 の界面 (平面)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$
屈折率 n_1, n_2 の界面 (曲率半径 r の球面)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{r} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$
曲率半径 r の球面ミラー	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix}$

を考える。ビームパラメーター q_1 で表される光がある ABCD 行列で表される光学要素を通過し、その後ビームパラメーターが q_2 となるとすれば、

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{A.3}$$

が成り立つ [16]。これを ABCD 則という。また、ビームパラメーター q の逆数は

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n \omega(z)^2} \tag{A.4}$$

と表される。

参考文献

[1] Novelprize.org ホームページ http://www.nobelprize.org/

[2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, Sience, **269**, 198 (1995)

[3] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969—3973 (1995)

[4] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, Observation of Interference Between Two Bose Condensates, Science **31**, 637-641 (1997)

[5] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hnsch and Immanuel Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, Nature **415**, 39-44 (2002)

[6] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004)

[7] Masao Takamoto, Feng-Lei Hong, Ryoichi Higashiand Hidetoshi Katori, An optical lattice clock, Nature **435** 321-324 (2005)

[8] Thorsten Khler, Krzysztof Gral, and Paul S. Julienne, Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances, Rev. Mod. Phys. **78**, 1311—1361 (2006)

[9] John Weiner, Vanderlei S. Bagnato, Sergio Zilio,Paul S. Julienne, Rev. Mod.Phys**71**, 1 (1991)

[10] Steven T. Cundiff and Jun Ye, Colloquium: Femtosecond optical frequency combs, Rev. Mod. Phys. **75**, 325—342 (2003)

[11] Ian Coddington, William C. Swann, and Nathan R. Newbury, Coherent Multi-heterodyne Spectroscopy Using Stabilized Optical Frequency Combs, Phys. Rev. Lett. **100**, 013902 (2008)

[12] B. Bernhardt, A. Ozawa, P. Jacquet, M. Jacquey, Y. Kobayashi, T. Udem, R.

Holzwarth, G. Guelachvili, T. W. Hansch, and N. Picque, Cavity-enhanced dual-comb spectroscopy, Nat. Photonics **4**, 55 (2009)

[13] F. Pereira Dos Santos, H. Marion, S. Bize, Y. Sortais, and A. Clairon, Controlling the Cold Collision Shift in High Precision Atomic Interferometry, Phys. Rev. Lett. **89**, 233004 (2002)

[14] J. Kobayashi, K. Aikawa, K. Oasa, S. Inouye, Prospects for Narrow-line Cooling of KRb Molecules in Rovibrational Ground State, Phys. Rev. A **89**, 021401 (2014)

[15] 大麻　浩平　修士論文　極低温極性分子の超微細構造に関する研究, 東京大学 (2011)

[16] A.Yariv, 多田邦雄, 神谷武志共訳, 光エレクトロニクスの基礎, 丸善 (1988)

[17] E. D. Black,An Introduction to Pound-Drever-Hall Laser Frequency Stabilization, AM. J. Phys. **69**, 79 (2001)

[18] 長田有登　卒業論文　フェッシュバッハ分子の誘導ラマン断熱遷移による振動回転基底状態への遷移のための光源開発, 東京大学 (2012)

[19] 林正泰　修士論文　光会合された分子の誘導ラマン断熱遷移, 東京大学 (2009)

[20] 株式会社富士セラミックス ホームページ http://www.fujicera.co.jp/index_j.html

[21] 大久保弘樹、荻野敦　卒業論文 電子・陽子質量比の変化に敏感な分子準位の分光，東京大学 (2013)

[22] M. J. Lawrence, B.Willke, M. E. Husman, E. K. Gustafson, and R. L. Byer, Dynamic response of a Fabry-Perot interferometer, J. Opt. Soc. Am. B **16**, 523-532 (1999)

[23] 斉藤　祐介、福岡　健太　卒業論文 混合ボース気体の共振器増幅光トラップに向けた単一モード DPSS レーザーの開発，東京大学 (2010)

[24] 鈴木 皓博　卒業論文 光会合用レーザーシステムの開発，東京大学 (2013)

[25] 株式会社 浜松ホトニクス ホームページ
http://www.hamamatsu.com/jp/ja/index.html

謝辞

本研究は多くの方々のお力添えなしには有り得ませんでした。ここで感謝の意を述べたいと思います。

井上慎准教授には、時には優しく時には厳しく常に親切にご指導していただきました。とりわけグループミーティングで、実験の進捗状況や自分の考えをまとめて人前で述べる際に大切なことをご指導いただき大変勉強になりました。先生が話される物理のお話は非常に鋭い観点からなされていて深く感銘致しました。

小林淳助教には、不出来な我々に対して本実験に関することを何から何までご指導していただきました。予期していた結果が出なかった場合にその原因及び対処法を即座に考え提案する姿に、実験とはどういうものかということ、そして実験家として大切な根気強さを教わりました。

三尾研究室の森脇成典主任研究員は、同じ居室で過ごしていたので何度もお話をさせていただきました。TeX や gnuplot の操作で困っているときにたくさんアドバイスをくださいました。我々の研究内容にも興味を持って聞いてくださってうれしかったです。

博士課程三年の加藤宏平氏には実験に関する様々な問題や疑問が生じた際に非常に丁寧にお答えしていただきました。こちらからは質問せず悶々と悩んでいる場合でも、優しくお声をかけてくださることが何度もありました。また、夜遅くまでご自身の実験をしている姿をしばしば見かけ、熱心に研究に打ち込む姿が非常に印象的でした。

修士課程 2 年の長田有登氏には、研究の合間を縫っては我々の面倒を見ていただきました。氏が我々のことを気にかけてよく話しかけてくださったので、私たちもちょっとした疑問などについて気軽に質問することができました。我々も、将来の後輩にこのように接していきたいと思います。

修士課程 1 年の荻野敦氏には、昨年井上研究室の B4 として実験なさってたこともあり、基本的な実験の手順やロック回路の仕組みなど多くのアドバイスをいただきました。氏が実験室で夜遅くまで実験している姿を何度も見かけ、氏の実験へのひたむきさを実感しました。

修士課程 1 年の早川悠介氏は、ミーティング中に積極的に発言している様子が印象深いです。実験の内容についてよく加藤氏と議論しているところを見かけ、その実験に対する

積極性を見習いたいと思っています。

その他、研究生活を支えてくださった多くの方々に感謝を伝えたいと思います。