

博士論文

極低温異核フエッシュバッハ分子の研究

加藤 宏平

要旨

本論文は、極低温 41K-87Rb フェッシュバッハ分子に関する実験的研究をまとめたものである。

外場によって原子の散乱状態のエネルギーと分子の束縛状態のエネルギーを近づけた時に原子状態と分子の束縛状態間に結合が生じ、共鳴的散乱を引き起こすことがある。この現象の事をフェッシュバッハ共鳴と呼び、この時原子状態と結合する、ゆるく束縛された分子状態の事をフェッシュバッハ分子という。フェッシュバッハ共鳴を用いることで、原子間の相互作用の強さを示すパラメータである散乱長を自由に制御することができ、かつこの現象を用いることで原子状態から分子状態を断熱的に生成することができる。

フェッシュバッハ共鳴近傍のような原子間の二体の相互作用が共鳴状態にあるところでは、エフィモフ状態と呼ばれる束縛エネルギーが無限の等比級数をなす三体束縛状態が出現することが知られている。エフィモフ状態の束縛エネルギーは原子間相互作用ポテンシャルの短距離の詳細を表現する三体パラメータに依存すると思われてきた。しかし、近年等核原子の実験において三体パラメータが実際は原子間の長距離での相互作用を特徴づけるファンデアワールス相互作用のみによって決定されているという事が見いだされた。一方異核原子の系においてもエフィモフ状態が出現することが知られているが、その性質は実験的にも理論的にも明らかにされていない。従って本研究で対象とする 41K-87Rb 混合系は異核原子のエフィモフ状態に関して新たな知見を与えることが期待できる。

本研究での成果として主に次の二つが挙げられる。一つは、41K-87Rb 間の二つのフェッシュバッハ共鳴近傍における三体ロス係数の精密な測定である。共鳴近傍での三体ロスはエフィモフ状態の性質によって決定される。しかし異核原子の系特にボーズ粒子の混合系では三体ロス係数の精密な測定は難しい。なぜなら三体衝突のチャンネルが複数ある為に粒子数の時間発展はそれぞれの粒子の初期原子数に強く依存するからである。本研究ではこの問題を非破壊イメージングの導入により解決した。同一原子集団の時間発展を直接観測することにより、初期原子数にほとんど依存しない三体ロス係数の測定が可能となった。これにより共鳴近傍全体に渡って十分な精度で三体ロス係数が決定できた。また測定結果から共鳴間/同位体間において測定範囲内では三体ロス係数が異ならないということが分かった。

もう一つの成果は、原子・フェッシュバッハ分子間 (87Rb 原子と 41K-87Rb 分子) の三体ロス係数における共鳴の観測である。原子と分子の混合状態のエネルギーとエフィモフ状態の束縛状態のエネルギーが一致する時に、二体ロス係数が増大することが知られているが、そのときの散乱長 a_* は三体パラメータと等価なパラメータである。従って a_* を決定することが非常に重要であるが、その時間問題となるのは、一般にフェッシュバッハ分子の生成効率には限界があり、またその寿命も短いことである。本研究では、まず特殊な波長の光トラップを用いることで 41K と 87Rb の同時縮退気体を空間的に完全に重ね合わ

せることで生成効率を向上し、さらに三次元光格子を用いることでフェッシュバッハ分子と原子との衝突を抑制することに成功した。これにより a_* の精密な測定が可能となった。測定された a_* の値を共鳴間/同位体間で比較した所、 a_* の値に有意な差が見られた。これは異核原子の系の三体パラメータがファンデアワールス相互作用のみでは決定できないことを示す。従ってこれを説明するにはフェッシュバッハ共鳴の性質を取り入れた、より詳細な理論が必要な事を示している。

謝辞

本論文は東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻井上研究室において博士課程に在籍中に行った研究をまとめたものです。本研究を進めるにあたり、多くの方々のご指導、ご協力を頂きました。ここに深く御礼申し上げます。

本博士論文は井上慎准教授、上田正仁教授、香取秀俊教授、小芦雅斗教授、三尾典克特任教授により審査されたものです。審査員の方々には有益な議論を頂いたことを感謝します。

指導教員である井上慎准教授には修士から六年間の間、実験の詳細から研究の進め方、研究発表の仕方等、研究全般にわたって非常に熱心に指導して頂きました。非常に充実した研究環境を与えて頂き、研究に打ち込む事ができたことを大変感謝しております。また様々な機会に先生の物理に関する深い知識や、それに基づく的確な洞察に触れることができ非常に感銘を受けました。この六年間の経験は私にとって大きな財産となりました。心よりお礼申し上げます。

当時井上研究室の助教であった小林淳特定准教授には、私が研究室に配属された当初から実験に関して基礎的なことから非常に熱心に指導して頂きました。当時、小林先生に与えてもらった 809nm 光トラップ光源の製作というテーマから、私の井上研での実験が始まった様に思います。本研究の最後まで 809nm 光トラップは活躍することになりました。また実験の基礎となる磁気トラップの製作時には多くの事を粘り強く指導して頂き、どうにか完成に至ることができました。実験グループが分かれた後にも、実験の詳細についての議論に毎日ように付き合ってもらい非常に感謝しております。本研究を完成させる際の多くの困難において、小林先生のアドバイスが鍵となりました。

電気通信大学准教授の岸本哲夫先生には、あらゆる実験技術について貴重なご指摘を頂きました。特に磁気トラップの設計においては貴重なアドバイスを頂き、本研究を行う上で多大な貢献をして頂きました。また、E1 グループの真空槽等の実験の基礎部分は岸本先生のご尽力により構築されたものです。電気通信大学に移られた後にも、実験の基礎部分について様々な事を教えて頂き非常に感謝しております。

現理化学研究所所属の福原武博士には、修士配属からの一年間同じ実験グループで実験を行ってきました。着任当初から精力的に実験を行う姿に非常に感銘を受けました。また、実験の進め方等に関しても、様々なご指導を頂きました。福原博士と最後に行った RF 会合の実験は本研究においても重要な役割を果たしております。井上研を離れた後にも、折に触れて様々なアドバイスを頂き、実験を進める上での大きな糧となりました。

当時井上研の修士の学生であった山陸芳之氏には、私の一年上の先輩として E1 グループの実験装置の使い方等を教えて頂きました。配属当初、何も分からなかった私に工作の仕方や回路の作り方等を丁寧に教えて頂き、非常に感謝しております。本研究で重要な役割を果たしている、光トラップや光格子の設計は山陸氏の設計を元にしております。氏と

一緒に夜遅くまで一緒に実験を行ったことも良い思い出です。

当時井上研の修士の学生であった齋藤裕介氏とは、磁気トラップ作成時からおよそ一年半程 E1 グループにて実験を行いました。齋藤氏には実験を進める上で幾度となく助けてもらいました。毎日精力的に実験を行い、かつ何度も議論に付き合ってもらい非常に感謝しています。本研究のメインテーマであるフェッシュバハ分子の最初の信号を見ることができたのも、齋藤氏の尽力のおかげです。本研究を完成させることができたのも、当時の実験あったの事です。本当にありがとうございました。

当時井上研の修士の学生であった長田有登氏とは、途中から別のテーマでしたが同じ E1 グループにておよそ二年間実験を行いました。氏の斬新な切り口で実験に臨む姿勢にしばしば刺激を受けました。また氏が構築した位相コントラストイメージングは本研究で重要な役割を果たしました。dual BEC のロスについての問題を解決することができたのも、氏のおかげであり、大変感謝しています。

現 ENS 所属の遠藤晋平博士には三体問題の理論について詳しく教えて頂きました。実験家の私にも非常に丁寧に教えて頂き、エフィモフ状態について理解を深めることができました。また実験結果についても興味をもって頂き、大変うれしく思っております。本研究の一つの成果である、三体ロス係数の共鳴間での比較も遠藤博士の指摘に刺激されて行われたものです。忙しい中実験結果の議論に何度も参加して頂き、大変感謝しております。

現理化学研究所所属の Pascal Naidon 博士には、Feshbach 分子の束縛エネルギーの計算や、散乱長の計算等、理論面でサポートして頂きました。また原子・分子散乱の解釈についての議論にも参加して頂き非常に感謝しています。

本研究は途中まで、ERATO 上田マクロ量子制御プロジェクトの支援を受けて行われてきました。

プロジェクトリーダーである上田正仁教授には ERATO を通して、研究費の面で多大な支援を頂いた事、多くの研究者の方々と触れ合う機会をくださった事を非常に感謝しております。また ERATO ミーティングの際には、研究に関する様々な助言に加えて、発表の仕方などを教えて頂き感謝しております。

ERATO グループリーダーであった上妻幹旺教授（東工大）、向山敬准教授（東工大）には ERATO ミーティングを通して様々な実験上の助言を頂きました。

現工学系研究科附属光量子科学研究センター助教の堀越宗一博士には、ERATO 終了後もセミナー等を通じて様々な助言を頂きました。セミナーにおいて、三体ロスの研究を発表したことが、実験の様々な問題点を浮き彫りにし、実験を進める上での大きな糧となりました。また広い分野に対して、貪欲に知識を吸収しようとする姿に感銘を受けました。

現京都大学所属の中島秀太博士には、実際に三体問題の実験を行っていたことから、実験や理論について教えて頂きました。また氏の実験に対する熱意には驚きを覚えるばかりです。

またその他にも ERATO を通して多くの方々にご支援・ご指導を頂きました。ここにまとめてお礼を申し上げます。

井上研究室の修士課程に在籍していた、上原城児氏、早川悠介氏は E1 グループにて実験作業を手伝って頂きました。特に光トラップの構築やイメージングの解析プログラムの作成等において多大な貢献をして頂きました。ここにお礼を申し上げます。

井上研究室の博士課程に在籍していた、相川清隆博士、藤掛陽輔氏にはミーティング等を通じて、様々な助言を頂きました。相川博士の実験を手際良く進めていく様や、完璧を目指す実験姿勢等を見ていて大きく刺激を受けました。また藤掛氏が残していった位相コントラストイメージングやRFアンテナに関するドキュメント、DDSによる蒸発冷却システム等は本研究を進める上で多大な貢献を果たしました事を深く感謝します。

当時同期であった、大麻浩平氏とは実験グループは別でしたが、隣で着実に実験を進めていく姿に非常に刺激を受けました。氏とは、物理に関することから他愛のない事まで、多岐に渡って話すことができ、非常に楽しい時間を過ごすことができました。修論提出後に語り合った事は良い思い出です。

井上研究室の修士課程・学部の学生であった福岡健太氏、大久保拓哉氏、松田太一氏、大久保弘樹氏、鈴木皓博氏、小野貴晃氏、赤羽健二氏とはミーティングや普段の研究生活における議論等を通して様々な刺激を受けさせて頂きました。

現井上研修士課程の荻野敦氏、藤本晃吉氏にはE2の実験の詳細や分子ポテンシャルについて教えて頂きました。

現井上研修士課程岡田彪利氏には、E1の実験の条件出し等を手伝って頂きました。またRFアンテナに対してより詳細に調べて頂きました。

現井上研学部学生の池田浩太氏、上東幹氏にはミーティング等で議論に参加して頂きました。特に上東氏には光格子の実験を一部手伝って頂きました。

物理工学専攻工作室の川端氏、佐藤氏には研究を進める上で必要な様々な部品の製作に際し、多くの助言・助力を頂き非常に感謝しております。

博士課程において一年目は、東京大学 GCOE「未来を拓く物理科学結集教育研究拠点」のRAとして、二年目から三年目は、日本学術振興会特別研究員DC2として、四年目は光量子科学研究センターのRAとして、それぞれ生活費等をサポートして頂きました。ここに感謝を表明いたします。

その他、ミーティングや議論を通して様々な方々に研究活動支えて頂きました。改めてお礼を申し上げます。

最後に研究生活を支えてくれた家族に心から感謝します。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	極低温原子の系	1
1.2	Feshbach 共鳴	1
1.3	極低温極性分子	2
1.3.1	Feshbach 分子の生成効率	3
1.4	小数多体系	5
1.4.1	エフィモフ状態	5
1.4.2	三体パラメータの普遍性	6
1.5	本研究の目的	9
1.6	本論文の構成	9
第 2 章	原子間相互作用	11
2.1	ファンデアワールス相互作用	12
2.1.1	ファンデアワールス長	12
2.2	散乱理論	13
2.2.1	リップマン・シュウィンガー方程式	13
2.2.2	Born 近似	15
2.2.3	部分波展開	16
2.2.4	S 波散乱と散乱長 a	17
2.2.5	同種粒子の散乱	19
2.2.6	モデルポテンシャルの散乱長	19
2.3	フェッシュバッハ共鳴	21
2.3.1	異なる内部状態間の散乱	21
2.3.2	Feshbach 共鳴の原理	22
2.3.3	Feshbach 共鳴の定式化	23
2.3.4	フェッシュバッハ共鳴の性質	24
2.3.5	Feshbach 分子の生成効率	26
2.3.6	Feshbach 分子の寿命	28
2.3.7	$^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$ の Feshbach 共鳴	29
2.4	小数多体系	31
2.4.1	二体問題の普遍性	31
2.4.2	The shallow dimer	33
2.4.3	エフィモフ効果	34
2.4.4	基礎方程式	34

2.4.5	hyper-angle equation	37
2.4.6	hyper-radial equation	38
2.4.7	三体パラメータ	39
2.4.8	エフィモフ状態の観測	40
第 3 章	極低温のボース粒子気体	44
3.1	単一原子気体の密度分布	44
3.1.1	グロス・ピタエフスキー方程式	44
3.1.2	トラップ中のボース粒子気体の基底状態	45
3.1.3	トーマス・フェルミ近似	45
3.2	ボース凝縮体の混合系	47
3.3	二原子種グロス・ピタエフスキー方程式	48
3.3.1	混合 BEC の安定性	48
3.3.2	調和ポテンシャル中の混合 BEC の密度分布	49
3.4	光格子中のボース粒子の振る舞い	51
3.4.1	光格子	51
3.4.2	ボース・ハバードモデル	52
3.4.3	Mott 絶縁体状態での Shell 構造	53
3.4.4	混合系の場合	55
第 4 章	実験装置	57
4.1	実験装置の概要	57
4.2	真空槽	58
4.3	computer control	59
4.4	レーザー冷却の為の光源	61
4.4.1	Injection locking	63
4.4.2	Tapered Amplifier	65
4.4.3	Lasers for K	66
4.4.4	Lasers for Rb	67
4.5	磁気光学トラップ	68
4.5.1	1st MOT	68
4.5.2	2nd MOT	73
4.5.3	Time dependent MOT	77
4.6	磁気トラップ	78
4.6.1	磁気トラップの設計	79
4.6.2	電流の制御回路	84
4.6.3	磁気トラップの性質	85
4.6.4	補助コイル	87
4.7	RF Antenna	89
4.8	蒸発冷却	91
4.8.1	optical pumping	92

4.8.2	原子の捕獲	92
4.8.3	microwave induced evaporation	93
4.8.4	二原子種蒸発冷却	94
4.9	光学系の設計	95
4.10	光トラップ・光格子	98
4.10.1	トラップ波長の選択	99
4.10.2	1080 nm 光源	100
4.10.3	809 nm 光源	101
4.10.4	光トラップ	102
4.10.5	Dual BEC の生成	103
4.10.6	809nm 光トラップ	105
4.10.7	光格子	106
4.11	イメージング	107
4.11.1	吸収イメージング	108
4.11.2	位相コントラストイメージング	108
4.11.3	イメージングの光学系	109
4.11.4	解像度の評価	110
第 5 章	^{41}K-^{87}Rb 混合系における三体ロス係数の決定	113
5.1	三体ロス係数の測定の概略	113
5.1.1	初期の試み	114
5.2	非破壊イメージングによる三体衝突係数の決定	115
5.2.1	解析手法	116
5.2.2	測定条件	119
5.3	^{41}K - ^{87}Rb 混合系における三体ロス係数の決定	120
第 6 章	フェッシュバハ分子の生成	124
6.1	Feshbach 分子の生成の要点	124
6.2	Feshbach 分子の生成手法	125
6.3	RF 会合による分子の観測	126
6.3.1	ロスによる測定	127
6.3.2	束縛エネルギーの決定	127
6.3.3	分子の生成・観測速度の高速化	128
6.3.4	分子の直接観測	129
6.3.5	会合係数の飽和	130
6.4	Dual BEC からの分子の生成	131
6.4.1	緩い光トラップ中からの分子の生成	132
6.4.2	原子雲のオーバーラップの向上	135
6.5	三次元光格子中での分子の生成	137
6.5.1	三次元光格子へのロード	137
6.5.2	三次元光格子中での分子生成	138

6.5.3	KRb 原子雲の重力方向の位置合わせ (with lattice)	140
6.5.4	原子の吹き飛ばし	140
6.5.5	分子の寿命測定	141
6.5.6	分子の磁気モーメントの測定	142
第 7 章	Rb 原子-KRb 分子間の二体ロス係数の決定	144
7.1	二体ロス係数の測定	146
第 8 章	まとめと今後の展望	149
8.1	本研究のまとめ	149
8.2	今後の展望	149
付 録 A	^{41}K、^{87}Rb の光学特性	151
付 録 B	原子と光の相互作用	152
B.1	光トラップ	152
B.1.1	誘起双極子と光電場の相互作用	152
B.1.2	原子の分極率	153
B.1.3	双極子ポテンシャルと散乱レート	153
B.1.4	ガウシアンビームによる光トラップ	154
B.1.5	重力ポテンシャルによるトラップ位置のシフト	155
B.2	光と原子の相互作用の半古典論	155
	参考文献	157

目 次

1.1	STIRAP の概要	3
1.2	極低温極性分子の生成方法	3
1.3	空間的オーバーラップの確保	4
1.4	三次元光格子による原子と分子の衝突の抑制	5
1.5	エフィモフ状態の束縛エネルギー	6
1.6	$a_{\perp}$ の実験値	7
1.7	質量比の違いによるエフィモフ状態の形成しやすさ	9
2.1	アルカリ原子間の相互作用ポテンシャルの模式図	11
2.2	s-wave 散乱の模式図	18
2.3	Feshbach 共鳴形成の様子	22
2.4	フェッシュバハ共鳴近傍での散乱長と束縛エネルギー	26
2.5	$^{41}\text{K} 1,1\rangle$ と $^{87}\text{Rb} 1,1\rangle$ の Feshbach 共鳴	30
2.6	ヤコビ座標の例	35
2.7	hyper-angle の例	36
2.8	エフィモフ状態の模式図	39
2.9	三体衝突の模式図 (散乱長負)	41
2.10	三体ロス係数・二体ロス係数とエフィモフ状態の関係	43
3.1	混合 BEC の分布の様子	50
3.2	共存領域に存在する原子の割合	51
3.3	二原子種のもット絶縁体状態	56
4.1	実験装置の概略図	57
4.2	制御用 LabVIEW プログラム	59
4.3	アナログ出力切り替え回路	60
4.4	AOM のセットアップ	61
4.5	AOM driver の回路図	62
4.6	ソレノイドシャッター	62
4.7	シャッタードライバー回路図	63
4.8	Slave Laser の電流値と出力パワーの関係	64
4.9	Fabry-Perot cavity	64
4.10	cavity 信号	65
4.11	TA の電流値と出力パワーの関係	66
4.12	K の準位図と冷却に用いる光の離長	67

4.13 Rb の準位図と冷却に用いる光の離長	68
4.14 1st MOT の為の光学系	69
4.15 1st MOT の光学系の外観	71
4.16 蛍光観測の為の PD の回路図	71
4.17 蛍光観測の様子 (1st MOT,K)	71
4.18 蛍光観測の様子 (1st MOT,Rb)	72
4.19 K の原子数の push 光の周波数依存性	72
4.20 2nd MOT の為の光学系	74
4.21 蛍光観測の様子 (2nd MOT,K)	75
4.22 蛍光観測の様子 (2nd MOT,Rb)	75
4.23 Light assisted collision (2nd MOT,K and Rb)	76
4.24 2nd MOT の蛍光による trigger 回路	76
4.25 商用電源周波数との同期回路	77
4.26 Time sequence of Time-dependent MOT	78
4.27 磁気トラップコイルの配置の模式図 (水平面)	82
4.28 磁気トラップコイルの配置の模式図 (鉛直面)	83
4.29 作成した磁気トラップ	84
4.30 Cloverleaf コイルの回路	85
4.31 Curvature 及び Anti-Bias コイルの回路	85
4.32 電流ノイズ	87
4.33 Stern-Gerlach 用コイル	88
4.34 Stern-Gerlach 用コイルの回路	89
4.35 共鳴アンテナ	90
4.36 共鳴アンテナの測定	91
4.37 アンテナの配置の模式図	91
4.38 磁気トラップのトラップ寿命の測定	93
4.39 Microwave induced evaporation	94
4.40 蒸発冷却のタイムシーケンス	94
4.41 蒸発冷却中の原子数と位相空間密度の関係	95
4.42 ガラスセル周辺の光学配置 (上面図)	97
4.43 ガラスセル周辺の光学配置 (正面図)	98
4.44 809nm と共鳴線の関係	100
4.45 809nm 光トラップの概要	102
4.46 TA の ASE の波長分布	102
4.47 1080 nm 光トラップ中の Dual BEC	105
4.48 809 nm 光トラップ中の Dual BEC	106
4.49 吸収イメージング	108
4.50 位相コントラストイメージング	108
4.51 TOP イメージングのセットアップの概要	111
4.52 Side イメージングのセットアップの概要	112

5.1	三体ロス係数の測定 (吸収イメージング、 $a = 250 a_0$)	114
5.2	原子数の時間発展の PCI による測定	116
5.3	三体ロス係数の決定	117
5.4	三体ロス係数の決定 (相互散乱長 $a_{\text{KRb}} = -1981 a_0$)	118
5.5	三体ロス係数の決定 (相互散乱長 $a_{\text{KRb}} = -818 a_0$)	118
5.6	三体ロス係数の決定 (相互散乱長 $a_{\text{KRb}} = -505 a_0$)	119
5.7	三体ロス係数 (KKRb) の散乱長依存性	120
5.8	三体ロス係数 (KRbRb) の散乱長依存性	121
5.9	"Broad"共鳴、散乱長負側の三体ロス係数 (KRbRb、KKRb) の磁場依存性	122
5.10	散乱長負側の三体ロス係数 (KRbRb) の散乱長依存性	123
6.1	光格子中の分子の模式図	124
6.2	磁場スイープによる分子の生成	125
6.3	RF 会合による分子の生成	125
6.4	RF 会合による分子の生成の観測方法	126
6.5	Feshbach 分子の束縛エネルギー	127
6.6	RF 会合による分子の直接観測	129
6.7	会合係数の RF 強度依存性	131
6.8	Dual BEC からの分子の生成	132
6.9	磁場スイープの様子	133
6.10	分子のフィッティングの比較	134
6.11	Stern-Gerlach のタイミングに対する生成分子数の変化	134
6.12	809 nm 光トラップの周波数に対する同時 BEC の相対位置の変化	135
6.13	光トラップの周波数に対する分子の生成数の変化	136
6.14	混合時の相互散乱長に対する分子の生成数の変化	137
6.15	二原子種同時バンドマッピング	138
6.16	光格子中での分子の生成	139
6.17	光格子中での分子の生成 (wide 809nm trap)	139
6.18	光トラップの周波数に対する分子の生成数の変化	140
6.19	光格子中での分子の生成 (原子吹き飛ばし後)	141
6.20	光格子中での分子の寿命測定	142
6.21	分子の磁気モーメント $\delta\mu$ の磁場依存性	143
7.1	二体ロス係数の決定	145
7.2	二体ロス係数の測定の手順	146
7.3	Rb 原子-KRb 分子間の二体ロス係数の磁場依存性	147

表 目 次

2.1	K-Rb 間の Feshbach 共鳴	29
2.2	^{41}K 、 ^{87}Rb の散乱長	30
4.1	コイル間隔、コイルの巻き数、外径、内径。(設計値)	83
4.2	磁気トラップのトラップ周波数、電流値、バイアス磁場 B_0	86
4.3	補正コイルの設計値、実測値	88
4.4	Stern-Gerlach 用コイルの設計	89
4.5	Imaging 系の設計	111
6.1	RF 会合の分子数のフィッティング結果	129
7.1	二体ロス係数のフィッティング結果	148
A.1	^{41}K の D line の特性	151
A.2	^{87}Rb の D line の特性	151

第1章 序論

1.1 極低温原子の系

19世紀まで我々の自然観は"粒子"と"波動"という直観的な二つの概念を用いることによって形成され、古典力学と古典電磁気学という二つの理論の完成を導いた。これは多くの自然現象の理解という点で多大な成功を収めた。しかし20世紀初頭には、これらの概念では説明できない様々な実験事実が示された。即ちミクロの世界では"粒子"が"波動"性を持ち、"波動"が"粒子"性を持つといった我々の直観に反する事が起きることが示された。そこでこれらの二面性を説明する理論として、波動関数という抽象的な概念を軸にすえた量子力学が形成された。今日様々な物理現象が量子力学によって説明され、我々の新たな自然観の形成に欠かせないものとなっている。

粒子の波動性は粒子を極低温まで冷却することによって顕著に表れてくる。量子力学では粒子の存在確率は波動関数によって表現される。波動関数の広がりは熱的ドブロイ長 λ_{dB} で表される。低温になると熱的ドブロイ長は広がっていき、粒子間隔よりも大きくなると互いに干渉するようになる。その顕著な例が、ボースの着想 [1] を受けアインシュタインにより予言された [2, 3] ボース・アインシュタイン凝縮 (BEC: Bose-Einstein Condensation) である。BEC 状態ではマクロな数の粒子が最低基底状態に落ち込み、一つの波動として振る舞うようになる。

BEC の実現には冷却技術の進展が鍵となった。とりわけレーザー冷却 [4] の技術が多大な貢献を果たした。レーザー冷却により室温の原子気体を一瞬で数 $100\mu\text{K}$ まで冷却することが可能となった。そして続く磁気トラップの技術やそれに付随する蒸発冷却の技術の進展により、更なる冷却がなされ、ついに1995年にアルカリ原子気体によるBECが実現された [5, 6]。以来これらの極低温原子の系を用いた系の研究が盛んに行われてきた。

極低温原子の系の特徴はその制御性の高さにある。即ち磁場やレーザー光等の外場によって、原子の内部自由度（電子状態、微細構造、超微細構造等）及び外部自由度（原子の運動状態等）を量子力学レベルで制御することができる。極低温原子の系の研究の中で特に重要なものとして、Feshbach 共鳴の観測 [7]、BCS-BEC クロスオーバーの観測 [8]、超流動-Mott 絶縁体転移 [9] の観測等が挙げられる。本研究も極低温原子の系を用いた研究である。

1.2 Feshbach 共鳴

極低温原子の系の研究において重要な現象として Feshbach 共鳴という現象がある。Feshbach 共鳴は始め原子核物理の研究者である H. Feshbach によって理論的に提唱され [10]、

極低温原子の系では、1998年²³NaのBECにおいて観測が報告されている[7]。低エネルギーの散乱は散乱長という二体の相互作用を示す物理量によって特徴づけられる。散乱長は原子間ポテンシャルによって決定され、通常大きく変調されるものではない。しかし散乱状態のエネルギーと別の束縛状態のエネルギーが近くなった時、散乱状態と束縛状態間に結合が存在すると、共鳴的な散乱が起きる。結果として散乱長は大きく変調されることになる。この現象の事をFeshbach共鳴と呼ぶ。極低温原子の系で良く用いられる、アルカリ原子は最外殻に電子を一つ持ち、電子のスピン状態によって異なる複数の散乱ポテンシャルを持つ。スピン状態間のエネルギーは磁場によって、自在に調整できる。従ってFeshbach共鳴の利用に非常に適した系であると言える。実際、外部磁場によって原子間散乱長が正の無限大から負の無限大まで自在に制御できることがNaのBECにおける実験によって確かめられた[7]。

Feshbach共鳴の利用は極低温原子の系における実験の可能性を大きく広げた。Feshbach共鳴を用いることで二体の相互作用を系統的に変化させることができるようになった。二体の相互作用は、純粋な二体問題だけでなく、小数多体系の問題や多体の問題にも深く関わっている為、これを利用した様々な実験がこれまでに行われてきた。顕著な例としては、分子BECの達成[11]、エフィモフ状態の観測[12]、混合BECの相分離の制御[13]等が挙げられる。本研究ではFeshbach共鳴を用いて、極低温分子の生成、異核原子の小数多体系の研究に対して研究を行った。以下にそれぞれの研究の背景を述べる。

1.3 極低温極性分子

冷却原子の系は、前節で述べたように誕生以来様々な成果をあげてきているが、次なる研究対象として注目されているのが、極低温極性分子の系である。極性分子の大きな特徴は電場をかけることによって、電気双極子が誘起され、新たに双極子・双極子相互作用を持つことである。相互作用ポテンシャル U_{dd} は、以下の様に記述できる。

$$U_{dd}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_2)}{r^5} \right) \quad (1.1)$$

これは r^{-3} に比例する長距離の相互作用であり、かつ双極子の向きによって正か負が決まるといった異方性を持つ。原子系でも、磁気双極子を持つCrのBECが報告されているが[14]、電気双極子はかける電場によって相互作用の大きさが変えられるといった特徴をもっており、また磁気双極子と比べて非常に大きな双極子モーメントを誘起することができる。加えて、振動・回転といった原子系に比べて豊富な内部自由度を持っていることから、幅広い範囲の物性を研究できる対象として非常に期待できる。

極性分子は、新しい量子多体系の対象として非常に有望であるが、その豊富な内部自由度の為レーザー冷却の適用が困難であり、直接縮退領域まで冷却することは困難であった。しかし、近年直接的な手法にかわり、極低温混合原子気体を用意し、それを上述のFeshbach共鳴を用いることによって弱く束縛された分子(Feshbach分子)に断熱的に会合させ、さらに誘導ラマン断熱遷移(STIRAP)(図1.1)を用いて振動基底状態に落とすことで強く束縛された極性分子を高効率に生成するといった手法が開発された(図1.2)。振動基底状態に落とすことで、大きな双極子モーメントを誘起することができるようにな

る。実際に JILA ではフェルミ縮退付近まで冷却された、 ^{87}Rb - ^{40}K 極性分子（フェルミオン）の生成に成功している [15]。

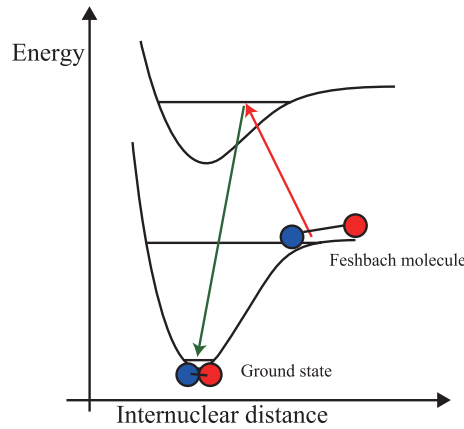


図 1.1: STIRAP の概要

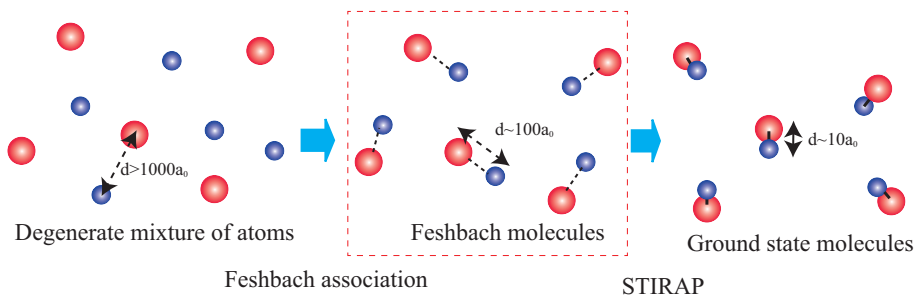


図 1.2: 極低温極性分子の生成方法:中間状態である Feshbach 分子が重要な役割を果たす

1.3.1 Feshbach 分子の生成効率

現在、異核の系では分子の縮退状態は達成されていない。低温・高密度な分子集団を生成する際に問題となることは、一般に Feshbach 分子の生成効率には限界があり、かつ原子及び分子との非弾性衝突の係数が高い為に高密度ではトラップ寿命が非常に短いことである。

Feshbach 分子の生成効率は原子集団の位相空間密度に依存することが等核原子の系の実験から確かめられている [16] (より詳しくは節 2.3.5 を参照の事)。従って原子集団を縮退状態にすることで生成効率の上昇が期待できる。これまでに縮退状態の ^{133}Cs [17]、 ^6Li [18, 19]、 ^{23}Na [20]、 ^{87}Rb [21] からの分子生成が報告されている。異核の系ではさらに原子雲同士の空間的オーバーラップが問題となる (図 1.3)。それぞれの原子の質量が異なる為に、重力サグの効果によりトラップ位置にずれが生じる。これは生成効率の低下をもたらす。またボソンとフェルミオンの混合系の場合、縮退領域では分布が大きく異なる為に生成効率には限界がある [22]。またボソンとボソンの混合系の場合には、縮退状態ではそれぞれの原子雲のサイズが小さいために空間的オーバーラップを確保するのは困難である。

Feshbach 分子の短いトラップ寿命は Feshbach 分子が緩く束縛された分子であることに由来する。従って原子や分子との衝突で容易に振動緩和が起き、トラップロスにつながる。特にボソンの系の場合にはパウリブロッキング等の衝突の抑制機構が無いため、トラップ寿命が短くなる可能性がある。実際に BEC から生成された Na_2 分子の寿命は高密度では非常に短い事が報告されている [23]。この問題を解決する方法としては分子のトラップ寿命よりも高速に分子を生成し観測する方法と、もしくは三次元光格子を用いて衝突自体を抑制する方法 (図 1.4) の二つの方法がある。

前者の方法として RF 会合による分子の生成がある [24]。これは原子対に RF を照射することによって直接原子状態から分子状態へと遷移させる方法で、生成速度は RF 強度に依存する。従って強い RF を用意することで、高速な分子の生成が期待できる。また RF の周波数から分子の束縛エネルギーを測定することができ、Feshbach 共鳴点の決定に利用できる。さらに光トラップ・光格子を切った状態で分子を生成できるという利点がある。分子は原子と比べて振動・回転の多数の準位を持つため、共鳴を直接たいてしまい、光散乱レートが高くなる危険性がある。従って初めにこの方法を用いて分子を生成し、光散乱レートが高くなっていないか確認することが重要であると考えられる。

後者の方法は実際に Rb の三次元光格子の系において、長寿命の分子を生成したという報告がある [25]。非常に有望である。また生成効率を上げる上でもこの方法は有効であることが期待でき、最終的にはこちらの方法による分子の生成を目指すべきである。実際に Cs の三次元光格子の系において、モット絶縁体状態を利用して充填率を上げることで、50% 以上の生成効率を達成したという報告されている [26]。従って最終的にはこちらの方法を採用したほうが、効率が上昇する可能性が高く、また衝突の制が可能になることでその後の実験が容易になる (実験の時間スケールを長く取れる) ことが期待できる。異核の系において同様の方法で生成効率を上げるには、両方の原子がボソンの系を用意し、かつ同時縮退状態を実現することで充填率を高めることが有効であると考えられる。しかし、異核の系では未だそのような実験は報告されていない。

以上の様に異核の系での分子生成は各原子雲同士の空間的オーバーラップの確保と三次元光格子による衝突の抑制が重要である。本研究では特殊な波長の光トラップを用いることで、空間的オーバーラップを確保し、また実際に三次元光格子を用いて分子を長寿命化することに成功した。

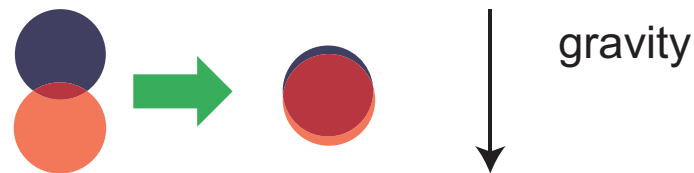


図 1.3: 空間的オーバーラップの確保:

異核の系では重力サグの効果によりトラップ位置にずれが生じ、重なりが減少する。Feshbach 分子の生成効率を上げるには、空間的オーバーラップを確保する必要がある。

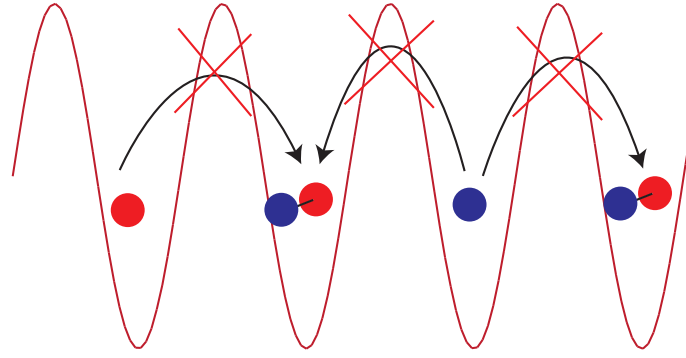


図 1.4: 三次元光格子による原子と分子の衝突の抑制

1.4 小数多体系

1.4.1 エフィモフ状態

Feshbach 共鳴の利用は小数多体系の物理にも重要な知見を与える。Feshbach 共鳴近傍のような二体の相互作用が共鳴状態にあるところでは、エフィモフ状態と呼ばれる三体束縛状態が出現することが知られている。エフィモフ状態は原子核物理の研究者である V. Efimov によって 1970 年に予言された状態である [27]。共鳴点付近でのエフィモフ状態の束縛エネルギーは図 1.5 の様になっている。共鳴点では散乱長が発散し、長さスケールが消失する。結果エフィモフ状態が無限に表れ、そこでの束縛エネルギーはパラメータ $\kappa_*^{(0)}, \kappa_*^{(1)}, \dots$ で表される。 $\kappa_*^{(0)}, \kappa_*^{(1)}, \dots$ は等比級数になっており、その比は e^{π/s_0} である。ここで s_0 は原子種に寄らないスケールパラメータで、 $s_0 \sim 1.00624$ すなわち $e^{\pi/s_0} \sim 22.7$ であることが知られている。また共鳴点以外でもエフィモフ状態は存在し、図 1.5 の様に三原子状態との交点での散乱長を $a_-^{(0)}, a_-^{(1)}, \dots$ 、分子 + 原子状態との交点での散乱長を $a_*^{(0)}, a_*^{(1)}, \dots$ で表す。すると a_-, a_* も等比級数になっており、その比はやはり $e^{\pi/s_0} \sim 22.7$ で原子種に寄らない一定値をとる。

この無限の等比級数的構造を特徴とするエフィモフ状態は、極低温原子の系の実験において初めてその存在が確認された [12]。実験は冷却された ^{133}Cs を対象に行われた。エフィモフ状態と原子状態の交点すなわち散乱長 a_- において三体の非弾性散乱が促進されることが知られている。すなわち三体ロス係数の散乱長依存性に現れる共鳴によって、エフィモフ状態は存在が確認された。さらに続く ^{39}K の実験においてエフィモフ状態の繰り返し構造が確認され、そのスケールは理論値 22.7 にほぼ一致することが確かめられた [28]。

その後も様々な原子種で実験が行われ、エフィモフ状態が原子種に寄らずに普遍的に存在することが確かめられてきた。一方エフィモフ状態の束縛エネルギーの大きさそのものは原子間相互作用の短距離の詳細に依存し、原子種や内部状態に寄って異なるものであると考えられてきた。原子間相互作用の短距離の詳細を表現するパラメータの事を三体パラメータ Λ と呼び、三体パラメータを仮定することで、エフィモフ状態の構造は理論的に完全に決定されることになる [29]。すなわち、基底状態のエフィモフ状態とエネルギー軸、三原子状態、分子 + 原子状態との交点を示すパラメータである $\kappa_*^{(0)}, a_-^{(0)}, a_*^{(0)}$ (図 1.5) は

全て三体パラメータ Λ と等価なパラメータである。三体パラメータを理論的に決定するのは難しいが、 $a_-^{(0)}, a_*^{(0)}$ は実験的に決定することが十分可能である。従って、各原子種、内部状態毎に $a_-^{(0)}, a_*^{(0)}$ を測定する必要があると考えられていた [30]。

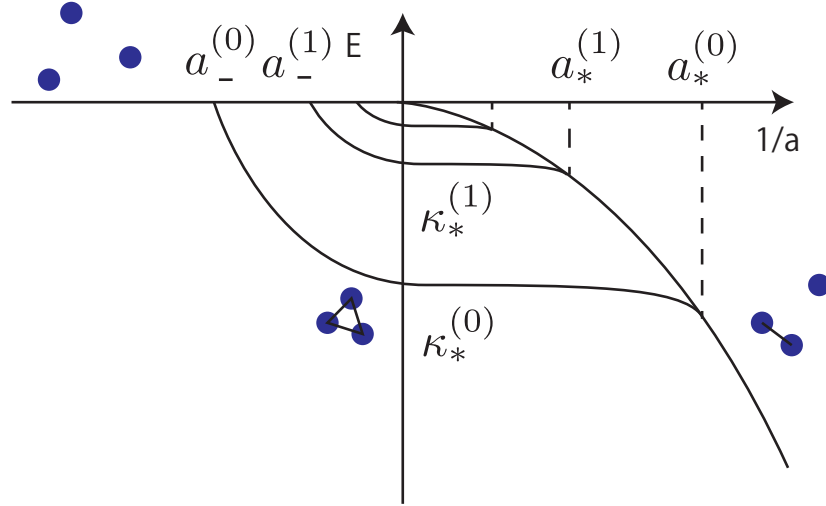


図 1.5: エフィモフ状態の束縛エネルギー

1.4.2 三体パラメータの普遍性

前記の様に三体パラメータは三体問題を解ける様にする為に、二体のパラメータとは独立に導入された量であった。しかし近年等核原子の系において、様々な原子種・内部状態に対して三体パラメータの測定が行われた結果、三体パラメータが実際は原子間の長距離での相互作用を特徴づけるファンデアワールス相互作用のみによって、決定されているという事が見いだされた。ファンデアワールス相互作用の長さスケールはファンデアワールス長 r_{vdW} (式 2.3) によって特徴づけられる。図 1.6 にこれまでに行われてきた三体パラメータ (a_-) の観測値を原子のファンデアワールス長 r_{vdW} に対してプロットした。図で示されるように概ね $|a_-|/r_{\text{vdW}} = 8-10r_{\text{vdW}}$ である。このように三体パラメータが原子間相互作用の短距離の詳細に依存しないという事を三体パラメータの普遍性という。

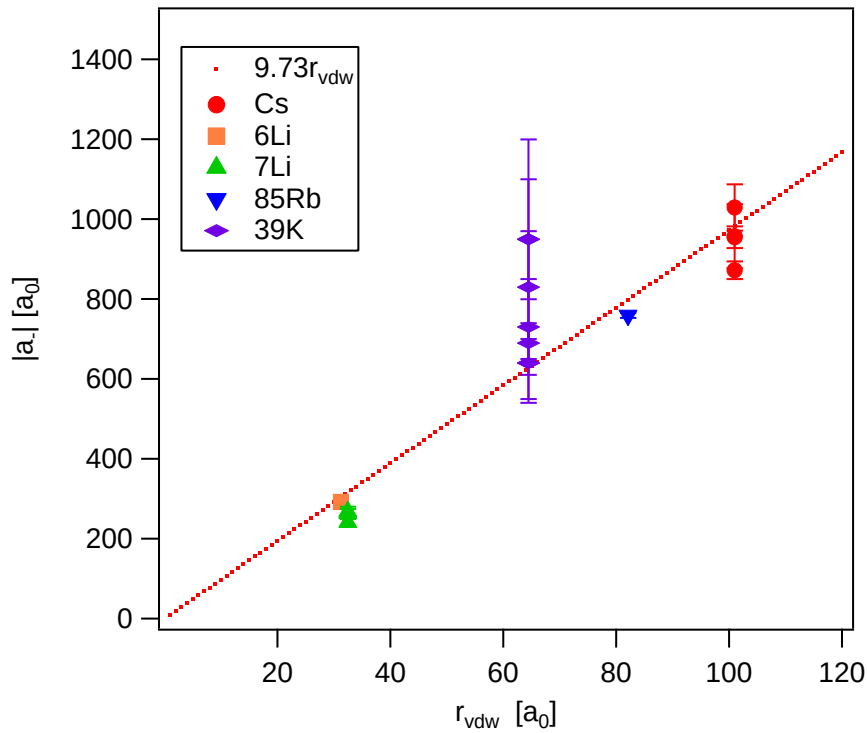


図 1.6: a_- の実験値：赤点線は $9.73r_{\text{vdW}}$ を示す。データは次の参考文献から引用した。
 ^6Li [31]、 ^7Li [32, 33]、 ^{39}K [34]、 ^{85}Rb [35]、 Cs [36]

最初に三体のパラメータの普遍性の存在を示唆した実験は、2010 年に ^7Li において行われた [37]。彼らの実験では核スピンの異なる状態の三体ロス係数が散乱長 a に対して、広い範囲で一致していることが示された。また 2011 年の Cs の実験 [36] によって、より明らかに普遍性の存在が分野に周知されることになった。彼らの実験では 4 つの異なるフェッシュバッハ共鳴に置いて三体パラメータ a_- が測定され、それらがほぼ一致していることが示された。これらの実験に触発され、J. Wang らは三体パラメータの普遍性が、三体の衝突チャンネルの $R \simeq r_{\text{vdW}}$ において斥力ポテンシャルが普遍的に存在する ("universal effective barrier") ことに由来することを理論的に示した [38]。彼らの計算では、 $|a_-|/r_{\text{vdW}} = 9.73(4)$ となり実験値に近い値を出している。また 2014 年には Naidon らは三体の universal effective barrier が三体の配置の変形に由来することを明らかにした [39]。

以上の様に三体パラメータ a_- には普遍性が存在することが、実験・理論の両面から確かめられてきた。三体問題に対して現在も議論が続いている事として、以下の二つの問題を挙げる。

Narrow フェッシュバッハ共鳴における三体パラメータ

現在までに多くの原子種で三体パラメータ a_- が測定され、それらの値がほとんど例外なく $|a_-|/r_{\text{vdW}} = 8-10r_{\text{vdW}}$ の領域に存在することは前述の通りである。しかし 2013 年の ^{39}K の実験では、ある特定のフェッシュバッハ共鳴において有意に三体パラメータ a_- が普遍的な値から外れている可能性が示された [34]。フェッシュバッハ共鳴の結合の強さを示

すパラメータとして s_{res} という無次元量が式 2.85 で定義される。今までのほとんどの実験は、 $s_{\text{res}} \gg 1$ の Broad フェッシュバッハ共鳴で行われていた。 ^{39}K の実験は、 $s_{\text{res}} \simeq 0.1$ の共鳴で三体パラメータ a_- が普遍的な値よりも有意にずれている可能性を指摘した。実際 $s_{\text{res}} \ll 1$ の Narrow フェッシュバッハ共鳴では、フェッシュバッハ共鳴の結合エネルギーがファンデアワールスのエネルギーに比べて充分小さくなる為 (s_{res} の定義式 2.85)、新たな長さスケールが現れることが理論的にも指摘されている [40]。しかし実験的には Narrow フェッシュバッハ共鳴では精密に三体パラメータを測定するのは難しく、また $s_{\text{res}} \simeq 1$ 付近ではファンデアワールスのエネルギーとフェッシュバッハ共鳴の結合エネルギーが同程度になる為、理論的な解析は難しい。

近年 Cs の実験において、 a_- よりも a_* の方がより s_{res} の影響を受けやすいことが示唆されている [41]。また、 s_{res} の影響を考慮した理論により、より広い範囲で三体パラメータの普遍性を説明できる可能性が、Yujun Wang らによって示された [42]。しかし三体パラメータの s_{res} に対する依存性は、まだ完全には理解されていない。

異核原子の系

異核の原子の系即ち、三粒子の質量が異なる系でもエフィモフ状態が存在することが予想されている。その際特徴的なことは、スケーリングパラメータが質量比と統計性によって異なるという事である。またどの粒子の間に共鳴が存在するかによっても変わる。例えば三粒子のうち、二つの粒子が同一のボソンで他の粒子が質量が異なる粒子の場合で ($m_1 = m_2 \neq m_3$)、質量が異なる粒子間の散乱長が共鳴状態 ($a_{13} = a_{23}$ is resonant) の場合スケーリングパラメータ s_0 を決める超越方程式 (同一粒子の場合、式 2.143) が次の様になることが理論的に示されている [43]。

$$\left[\cosh\left(s_0 \frac{\pi}{2}\right) - i \frac{2 \sinh\left[s_0 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right)\right]}{s_0 \sin(2\gamma_{12})} \right] \left[\cosh\left(s_0 \frac{\pi}{2}\right) + i \frac{2 \sinh\left[s_0 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right)\right]}{s_0 \sin(2\gamma_{12})} \right] = 0 \quad (1.2)$$

γ_{12} は質量比を示すパラメータで、

$$\tan \gamma_{ij} = \left(\frac{m_k(m_1 + m_2 + m_3)}{m_i m_j} \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

を満たす。式 1.2 によると重い原子二つ、軽い原子一つの場合スケーリングパラメータは小さくなり、エフィモフ状態の繰り返し構造が小さくなる、この状態のことを Efimov favored と呼び、逆に軽い原子二つ、重い原子一つの場合スケーリングパラメータが大きくなり、Efimov unfavored と呼ぶ。図 1.7 にその様子を模式的に示した。

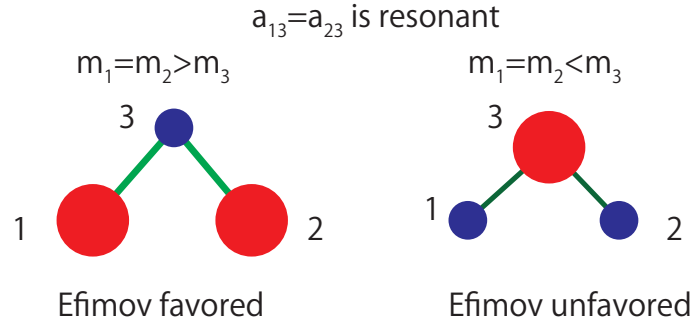


図 1.7: 質量比の違いによるエフィモフ状態の形成しやすさ

実験的には ^{41}K - ^{87}Rb の系で三粒子のエフィモフ共鳴の観測が主張された[44]。しかし続く ^{40}K - ^{87}Rb の実験では三粒子のエフィモフ共鳴は測定範囲では観測できず、原子・分子の二体散乱に共鳴を観測した[45]。二つの実験では、質量比がほんの少し異なるだけであるため、結果の違いについて議論されている。理論的にはスケーリングの周期 e^{π/s_0} が ^{40}K - ^{40}K - ^{87}Rb の場合 123、 ^{41}K - ^{41}K - ^{87}Rb の場合 131、 ^{41}K - ^{87}Rb - ^{87}Rb の場合 348,000 と比較的大きな値である為測定範囲に共鳴が存在する確率は低い[46]。また、三体パラメータの普遍性が異核の系でも存在するという主張がある[47]。異核の場合には、関与するパラメータが増える為この問題は複雑である。我々は ^{41}K - ^{87}Rb の系を持っており、この系は実験的に可能な領域に二つのフェッシュバハ共鳴を持つため、これを使って普遍性の検証へとつなげるのが本研究の目的の一つである。

異核の系では他に近年 ^6Li - Cs の系で質量比に依存したスケーリングの観測が行われており[48, 49]、現在議論がなされているところである。

1.5 本研究の目的

以上の背景を元に、本研究では以下の二つを目的とする。

1. 異核原子の系における小数多体系の研究
2. 極低温極性分子の生成・研究

研究の具体的な対象としては ^{41}K 及び ^{87}Rb の二つの原子種からなる極低温原子の系を用いる。上記の目的は互いに Feshbach 共鳴という現象を通じて密接に関わっている。なぜなら極低温極性分子の生成において、Feshbach 共鳴近傍での三体ロス等の非弾性のロスが大きな障害となるが、それに対処する為には小数多体系の物理に対する理解が必要不可欠であるからである。

本論文では ^{41}K - ^{87}Rb 混合系における Feshbach 分子に関する実験について報告する。

1.6 本論文の構成

本論文は全八章から構成される。構成は以下の通りである。

第二章では原子間相互作用について説明する。まず極低温原子の系で重要となる低エネルギー散乱について説明する。そして本研究の主な研究対象である Feshbach 共鳴について説明する。最後に Feshbach 共鳴近傍での小数多体系の物理、特にエフィモフ状態について説明する。

第三章では極低温のボース粒子気体の振る舞いについて述べる。特に外部ポテンシャル中で粒子の分布がどのように決定されるかについて述べる。本研究で対象とする混合系においては、粒子間相互作用によって粒子の分布が大きく変わるのでそれについて詳しく述べる。

第四章では本研究で用いた実験装置について説明する。実験装置の詳細は本研究で行われる、全ての実験の基礎となると共に、実験の精度や限界に深く関わってくる。

第五章では Feshbach 共鳴近傍での ^{41}K - ^{87}Rb 間の三体ロス係数の決定について述べる。これは続く Feshbach 分子の生成において、実験的に重要であると共に、エフィモフ状態の性質を明らかにする上で必要な情報を与える。

第六章では Feshbach 分子の生成について説明する。ここでは、本研究の主要な研究対象である Feshbach 分子を如何に生成するかについて述べる。特に Feshbach 分子の生成効率を高め、また長寿命化する実験的な技術について詳しく述べる。

第七章では原子・分子間の二体散乱について述べる。二体散乱の測定方法について述べ、そこに現れる共鳴について考察する。

第八章では本論文のまとめと今後の展望について述べる。

第2章 原子間相互作用

本章では冷却原子気体、特に冷却アルカリ原子気体中の原子間に働く相互作用について述べる。通常アルカリ原子気体は充分希薄である。すなわち原子間の相互作用の強さを特徴づける長さである散乱長 a に比べて平均原子間距離は充分大きい。従って相互作用は主に二粒子間に働き、原子気体の性質は二体散乱によってほぼ決定される。原子散乱について良く知っておくことが重要である。

アルカリ原子間の相互作用ポテンシャルは、図 2.1 のようになる。

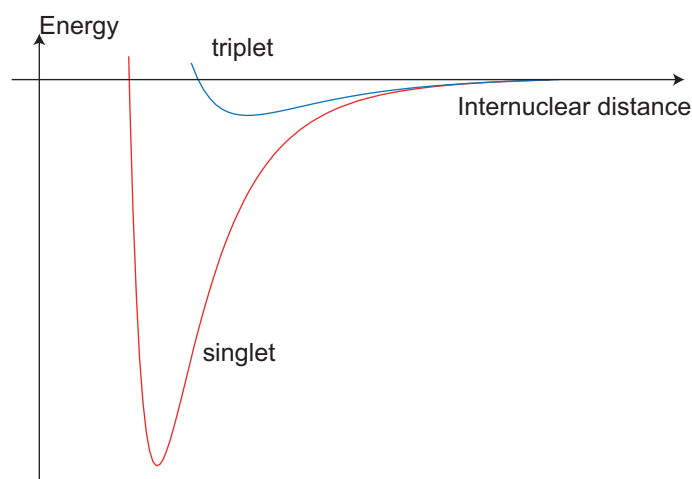


図 2.1: アルカリ原子間の相互作用ポテンシャルの模式図

原子間の相互作用ポテンシャルは、ボルン・オッペンハイマー近似を用いることで計算することができる。これは、原子核が電子に比べて十分重いということを利用した近似で、まず核間距離を固定した上で、電子の波動方程式を解き、電子の波動関数と固有エネルギーを求める。すると核間距離の関数として、固有エネルギーが求められるので、これを核運動に対するポテンシャル（ボルン・オッペンハイマーポテンシャル）であるとして、核の運動を考えるとこのような近似である。ヘリウムの基底状態の様な不対電子を持たないような原子の相互作用は、一つのボルン・オッペンハイマーポテンシャルで記述することができる。一方アルカリ原子の基底状態の特徴は、不対電子のスピンの組み合わせにより、相互作用が大きく変わるという事である。各不対電子のスピンを $\mathbf{s}_1$ 、 $\mathbf{s}_2$ としたとき電子対のトータルのスピンは $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ となるが、アルカリ原子の相互作用は図 2.1 トータルのスピンの大きさが $S = 0$ (singlet)、 1 (triplet) の場合の二つのボルン・オッペンハイマーポテンシャルで記述される。

以上のように原子間の相互作用は原子の内部状態によって大きく変わる。散乱過程において、始状態と終状態の原子の内部状態はスピン、原子種、励起状態等の量子数で表され

る。これらの量子数の組のことを”チャンネル (Channel)”という。アルカリ原子の散乱は多チャンネル問題であり、これはフェッシュバッハ共鳴が存在するという観点から重要である。

次節以降では、原子・原子散乱についての理論について記述する。2.1 節では、原子間の主な相互作用であるファンデアワールス相互作用について述べ、次元解析からその長さスケールを考える。続いて2.2 節では、低エネルギー散乱について定式化し、二体の相互作用を特徴づける散乱長 a を導入する。そして、散乱長 a がどのように決定されるかを述べる。2.1、2.2 節について、より詳しい議論は教科書 [50, 51] 参照されたい。2.3 節では、多チャンネルでの散乱を考え、そこでの重要な帰結である、フェッシュバッハ共鳴について述べる。フェッシュバッハ共鳴についての、より詳しい議論はレビュー [52, 53] にまとめられている。最後に2.4 節では、多体問題を考える。特にフェッシュバッハ共鳴近傍で出現する三体束縛状態であるエフィモフ状態について述べる。さらに詳しい議論は、レビュー [43] や書籍 [54] にまとめられている。

2.1 ファンデアワールス相互作用

アルカリ原子間の相互作用は、図 2.1 の様に singlet ポテンシャルと triplet ポテンシャルの二つのポテンシャルで表される。どちらのポテンシャルも短距離では電子雲の重なりによる強い斥力芯が支配的である。しかし、原子間隔が開いてくると singlet ポテンシャルの方に強い引力が現れる。これはスピンの異なる二つの電子は、同じ軌道を占有することができることに起因し、共有結合を生む効果に対応する。一方 triplet ポテンシャルは斥力のままである。triplet ポテンシャルの極小値はより核間距離が開いたところに浅くできる。さらに核間距離が開くとファンデアワールス相互作用による弱い引力が存在する。ファンデアワールス相互作用は共有結合に起因する引力に比べて非常に弱い、低エネルギー散乱を特徴づける散乱長の決定に大きく影響を与える。ファンデアワールス相互作用は原子間の電気的雙極子-雙極子相互作用に起因する。これは以下の形をしている。

$$U_{ed} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (2.1)$$

原子の基底状態は対称性が良いため、エネルギー固有値の一次摂動は 0 となる。二次の摂動から有限値が得られる。基底状態のエネルギー固有値に対する二次摂動は常に負の値をとり、かつ摂動エネルギーの二乗に比例する。従ってエネルギー固有値に対する二次摂動は以下の形でかける。

$$U_{vdW} = -\frac{C_6}{r^6} \quad (2.2)$$

これをファンデアワールス相互作用と呼び、核間距離の-6 乗に比例する相互作用である。

2.1.1 ファンデアワールス長

ファンデアワールス相互作用の長さスケールを特徴づける量として、ファンデアワールス長 r_{vdW} を導入する。ゼロエネルギーのシュレーディンガー方程式における長さのス

ケールを r_0 とする。次元解析の議論により、運動エネルギーは $\hbar^2/2m_r r_0^2$ のオーダーとなる。 m_r は原子対の換算質量である。これとファンデアワールス相互作用 C_6/r^6 が単純に等しいとくと、長さスケール r_0 が求まる。ファンデアワールス長は、 $r_0/2$ で定義される。すなわち、

$$r_{\text{vdW}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_r C_6}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.3)$$

となる。またこの時のエネルギースケールをファンデアワールスエネルギー E_{vdW} として定義する。

$$E_{\text{vdW}} = \frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{1}{r_{\text{vdW}}^2} \quad (2.4)$$

低エネルギー散乱の長さスケールを特徴づける散乱長 a は、このファンデアワールス長と、相互作用の短距離部分によって決まる。次節ではこれについて明らかにする。

2.2 散乱理論

本節では、低エネルギー散乱について定式化し、散乱長 a を導入する。

2.2.1 リップマン・シュウィンガー方程式

相互作用ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ による散乱を考える解くべきシュレーディンガー方程式は以下ようになる。

$$[\mathcal{H}_0 + V] |\phi\rangle = E |\phi\rangle \quad (2.5)$$

ここで、 $\mathcal{H}_0 = -\hbar^2 \Delta / 2m_r$ は自由粒子のハミルトニアンで、 m_r は粒子対の換算質量である。自由粒子の場合の解を $|\phi^{(0)}\rangle$ とすると、

$$\mathcal{H}_0 |\phi^{(0)}\rangle = E |\phi^{(0)}\rangle \quad (2.6)$$

を満たす。これを波数ベクトル $\mathbf{k}$ の入射平面を表すとして、

$$\langle \mathbf{r} | \phi^{(0)} \rangle \equiv \phi(\mathbf{r})^{(0)} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.7)$$

となる。解を（入射波）＋（散乱波）という形で示すことを考える。ここで考えるべき解は $V \rightarrow 0$ のとき、 $|\phi\rangle \rightarrow |\phi^{(0)}\rangle$ とならなければならないので、形式解は、

$$|\phi^{(\pm)}\rangle = |\phi^{(0)}\rangle + \frac{1}{E - \mathcal{H}_0 \pm i\epsilon} V |\phi^{(\pm)}\rangle \quad (2.8)$$

で与えられる。 ϵ は無限小の数であり、後の積分計算を可能にするための処方である。 $|\phi^{(+)}\rangle$ のみが意味のある解となる。式 2.8 をリップマン・シュウィンガー方程式と呼ぶ。

式 2.8 に左から $\langle \mathbf{r} |$ をかけると、

$$\langle \mathbf{r} | \phi^{(+)} \rangle = \langle \mathbf{r} | \phi^{(0)} \rangle + \int d^3 r' \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \mathcal{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | V \phi^{(+)} \rangle \quad (2.9)$$

ここで右辺の積分を計算する。まず積分内を以下の様に解く。

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \mathcal{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle &= \int d^3 p' \int d^3 p'' \langle \mathbf{r} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \frac{1}{E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_r} + i\epsilon} | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{r}' \rangle \\
 &= \int d^3 p' \int d^3 p'' \frac{\exp\left(\frac{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right)}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')}{E - \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_r} + i\epsilon} \frac{\exp\left(\frac{-i\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{r}'}{\hbar}\right)}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\exp\left[\frac{i\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\hbar}\right]}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} - \frac{p'^2}{2m_r} + i\epsilon} \\
 &= \frac{2m_r}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \frac{\exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{k^2 - q^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{2m_r}{\hbar^2} \left[-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$(\Delta + k^2)G_+(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \tag{2.11}$$

を満たすグリーン関数 G_+ を導入すると、解は

$$G_+(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{2.12}$$

となり、式 2.10 より

$$\langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \mathcal{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle = \frac{2m_r}{\hbar^2} G_+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.13}$$

となる。これは外向きの球面波を表す。一方 V が $\mathbf{r}'$ 表示で対角的、即ち

$$\langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r}'' \rangle = V(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \tag{2.14}$$

であるとする、

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r}' | V | \phi^{(+)} \rangle &= \int d^3 r'' \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r}'' \rangle \langle \mathbf{r}'' | \phi^{(+)} \rangle \\
 &= V(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \phi^{(+)} \rangle \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

となる。式 2.13、2.15、2.12 より、

$$\phi^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \phi^{(+)}(\mathbf{r}') \tag{2.16}$$

を得る。今、式 2.16 の右辺の積分は $V(\mathbf{r})$ が有意な値を持つ範囲内でだけ行えば良い。その様な範囲からずっと離れた位置 $\mathbf{r}$ での波動関数を考える、即ち $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ とする。この時 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cong r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'$ という近似が成り立ち、式 2.16 より、

$$\phi^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \phi^{(+)}(\mathbf{r}') \tag{2.17}$$

ここで散乱振幅 $f(\mathbf{k}')$ を以下の様に定義する。

$$f(\mathbf{k}') = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \phi^{(+)}(\mathbf{r}') \quad (2.18)$$

すると、散乱波の波動関数は、以下の様に表される。

$$\phi^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}') \quad (2.19)$$

従って散乱問題は、散乱波を上式のように（入射波）＋（球面波）で表した時の球面波の散乱振幅を求める問題に帰着する。微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ は入射粒子数に対する微小立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子数の比で定義され、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}')|^2 \quad (2.20)$$

で表される。また全断面積は全方向に積分して、

$$\sigma = \int |f(\mathbf{k}')|^2 d\Omega \quad (2.21)$$

で求められる。

2.2.2 Born 近似

式 2.18 の右辺の積分には、未知関数 $\phi^{(+)}(\mathbf{r}')$ が含まれており、このままでは計算することができない。そこで、入射波の振幅に対して、散乱波の振幅が十分小さいとして、積分の中に含まれる $\phi^{(+)}(\mathbf{r}')$ を入射波の波動関数で近似（Born 近似）をすると、

$$f(\mathbf{k}') = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \quad (2.22)$$

となる。式 2.22 より Born 近似の散乱振幅は、運動量の変化 $\Delta\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ に関するフーリエ変換に比例することが分かる。散乱ポテンシャル $V(\mathbf{r}')$ の広がりか、入射波の波長に比べて無視できるほど小さい時、 $e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}'} \cong 1$ と近似でき、

$$f(\mathbf{k}') \cong -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} V_0 \quad (2.23)$$

$$V_0 = \int d^3r' V(\mathbf{r}') \quad (2.24)$$

となる。散乱振幅は散乱方向に依存しなくなり、ポテンシャルの空間積分のみに依存するようになる。この状況は節 2.2.4 で説明する S 波散乱の状態に対応する。

2.2.3 部分波展開

低エネルギーの散乱問題を考える上で、角運動量状態を分解して考えた方が便利である。波数ベクトル $\mathbf{k}$ の入射平面波はルジャンドル多項式 $P_l(\cos(\theta))$ によって以下のように書ける。

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (2.25)$$

j_l は l 次の球ベッセル関数である。 $u_l(r) = r \cdot j_l(kr)$ は、動径方向の自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_r r^2} u_l(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} u_l(r) \quad (2.26)$$

の解である。 $j_l(kr)$ は r が大きいとき

$$j_l(kr) \cong \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \quad (r \rightarrow \text{大}) \quad (2.27)$$

と表すことができる。散乱ポテンシャルが球対称のとき、 $f(\mathbf{k}')$ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ のなす角 θ にのみ依存するので、ルジャンドル多項式によって、

$$f(\mathbf{k}') \equiv f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) \quad (2.28)$$

と書くことができる。 f_l を部分波振幅という。

式 2.18、2.28 より $\phi^{(+)}(\mathbf{r})$ もルジャンドル多項式によって級数展開できて、

$$\phi^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{1}{2ik} \left[(1 + 2ik f_l) \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} \right] P_l(\cos\theta) \quad (2.29)$$

となる。式 2.29 よりそれぞれの l について外向き球面波と内向き球面波の和に分解できるが、粒子の湧き出し、吸い込みはないのでこれらの振幅は等しくならなければならない。よって

$$1 + 2ik f_l = e^{2i\delta_l} \quad (2.30)$$

と表されなければならない。これを式 2.29 に代入すると、

$$\phi^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\theta) \quad (2.31)$$

となる。これは、式 2.27 の球ベッセル関数の位相を δ_l だけシフトさせたものである。つまり球対称のポテンシャルによって、動径方向の波動関数 $u_l(r)$ の位相が δ_l だけシフトしたと考えることができる。この位相シフトを計算するには、動径方向のシュレーディンガー方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m_r}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right] u_l(r) = 0 \quad (2.32)$$

を解かなければならない。位相のずれを求めることができれば、部分波振幅は式 2.30 より即座に、

$$f_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{k(\cot\delta_l - i)} \quad (2.34)$$

$$= \frac{e^{i\delta_l} \sin\delta_l}{k} \quad (2.35)$$

と求めることができ、断面積は、

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (2.36)$$

となる。

2.2.4 S波散乱と散乱長 a

式 2.32 より、 l 番目の動径波動関数 $u_l(r)$ に対する有効ポテンシャルは、

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \quad (2.37)$$

である。今、力の中心から入射運動量 $\mathbf{p}$ までの距離を b (衝突パラメータという) とすると、 b の最も確からしい値は、半古典的に考えると

$$\hbar \sqrt{l(l+1)} = \hbar k b_l \quad (2.38)$$

を満たす値の程度である。従ってポテンシャルの及ぶ領域 α のときは、 $b_l < \alpha$ のみ反応が起こるので、十分低いエネルギーの散乱では s-波の散乱のみを考えれば十分である。散乱断面積は、

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{\sin\delta_0}{k} \right)^2 \quad (2.39)$$

となる。

散乱断面積を簡単に計算できる例として、半径 R の剛体球での散乱を考える。即ち、

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \quad (2.40)$$

による s-波散乱を考える。 $r = R$ で波動関数は必ず 0 になり、 $r > R$ で自由粒子の粒子のシュレーディンガー方程式に従う。従って、波動関数は単に原点が R だけずれたものになり (図 2.2)、

$$\delta_0 = -kR \quad (2.41)$$

となる。 R が入射波の波長 λ に対して十分小さいとき、 $\delta_0 \ll 1$ となり、式 2.39 より、

$$\sigma = 4\pi \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\delta_0}{k} \right)^2 = 4\pi R^2 \quad (2.42)$$

となる。これは剛体の幾何学的断面積 πR^2 の 4 倍である。

散乱長

ここで剛体球とのアナロジーで s-波の位相のずれ δ_0 が実行的に動径波動関数 $u_0(r)$ の原点をどれだけずらすかを考える。式 2.31 より、

$$u_0(r) \cong e^{i\delta_0} \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k} \quad (r \rightarrow \text{大}) \quad (2.43)$$

よって $k \rightarrow 0$ (低エネルギー極限) では、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} e^{i\delta_0} \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k} &= e^{i\delta_0} \cos \delta_0 \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kr}{k} + \frac{\tan \delta_0}{k} \cos kr \right) \\ &= e^{i\delta_0} (\cos \delta_0) (r - a) \\ &= C(r - a) \end{aligned} \quad (2.44)$$

C は定数である。ここで、

$$a \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0}{k} \quad (2.45)$$

とした。この a を散乱長とよぶ。式 2.44 より、 $u_0(r)$ は、 $r = a$ で軸を横切ることが分かる (図 2.2)。s-波散乱の散乱振幅 f_0 は散乱半径 a の符号を変えたものになる。

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k} \right) = -a \quad (2.46)$$

よって散乱断面積は、

$$\sigma = 4\pi a^2 \quad (2.47)$$

となる。これは剛体球での散乱断面積と同じ形をしている。

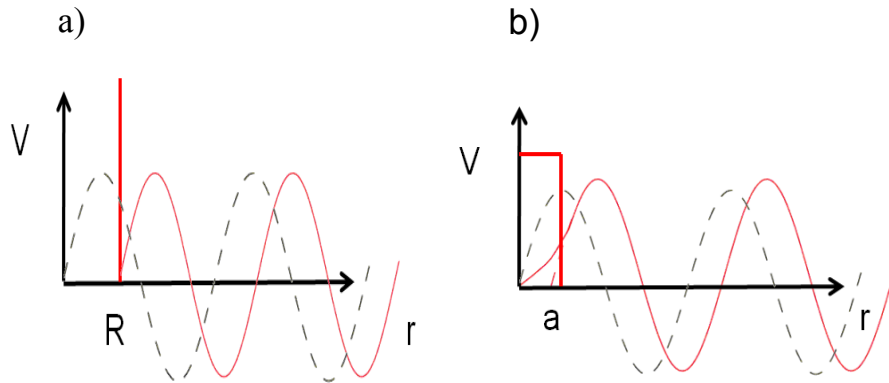


図 2.2: s-wave 散乱の模式図 : a) 剛体球での散乱、b) s-波散乱

ところで、Born 近似において $k \rightarrow 0$ とすると式 2.23 のように散乱振幅は表されることになる。式 2.23 と式 2.46 は仮定が同じなので一致するはずであり、それより、

$$V_0 = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_r} \quad (2.48)$$

これより斥力ポテンシャルの時は $a > 0$ 、引力ポテンシャルの時は $a < 0$ となることが分かる。

2.2.5 同種粒子の散乱

2つの同種粒子が散乱する場合、Pauliの原理によって2つの粒子の入れ替えに関して、波動関数は対称 (Boson) か反対称 (Fermion) でなければならない。従って波動関数の漸近形は式 2.19 に変わり、

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + [f(\mathbf{k}') \pm f(-\mathbf{k}')] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.49)$$

と書かれなければならない。特に s-波散乱の場合 $f(\mathbf{k}') = f(-\mathbf{k}') = -a$ なので、二粒子合わせた散乱断面積

$$\sigma_{12} = \begin{cases} 4\pi(-a-a)^2 = 16\pi a^2 & (\text{Boson}) \\ 4\pi(-a+a)^2 = 0 & (\text{Fermion}) \end{cases} \quad (2.50)$$

となる。即ち Boson の一粒子当たりの散乱断面積は $8\pi a^2$ となり異種粒子の場合の二倍となり、Fermion では s-波散乱は起こらない。

2.2.6 モデルポテンシャルの散乱長

原子の散乱長がどの様に決定されるか、明らかにする為、以下のモデルポテンシャルでの散乱を考える。

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{if } r \leq r_c \\ -\frac{C_6}{r^6} & \text{if } r > r_c \end{cases} \quad (2.51)$$

すなわち遠距離はファンデアワールスポテンシャル、短距離は半径 r_c の無限に硬い斥力ポテンシャルでカットオフされているモデルである。動径方向のシュレーディンガー方程式である式 2.32 より、低エネルギー散乱を考えると $k, l = 0$ として、 $r > r_c$ に対して

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m_r C_6}{\hbar^2 r^6} \right] u_0(r) = 0 \quad (2.52)$$

となる。 $r_0 = 2r_{\text{vdW}}$ (定義式 2.3) を用いて $x = r/r_0$ として書き直すと、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x^6} \right] u_0(x) = 0 \quad (2.53)$$

となる。これを解くには $u_0(x) = x^\beta f(x^\gamma)$ と置いて、良く知られた微分方程式に直す必要がある。天下りのあるが、 $\beta = 1/2$ 、 $\gamma = -2$ 、 $z = x^\gamma/2$ とし、 $f(x^\gamma) = g(z)$ とすると、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{1}{16z^2} \right) \right) g(z) = 0 \quad (2.54)$$

これはベッセル方程式である。この一般解はベッセル関数 $J_{1/4}(z)$ と $J_{-1/4}(z)$ の線形結合で書ける。即ち、

$$g(z) = AJ_{1/4}(z) + BJ_{-1/4}(z) \quad (2.55)$$

$$z = \frac{r_0^2}{2r^2} \quad (2.56)$$

である。 $u_0(r)$ は、 $r = r_c$ で 0 であるので、係数は条件

$$\frac{A}{B} = -\frac{J_{-1/4}(r_0^2/2r_c^2)}{J_{1/4}(r_0^2/2r_c^2)} \quad (2.57)$$

を満たす。アルカリ原子の場合、 $r_0 \gg r_c$ であるので、 z が大きい時のベッセル関数の漸近展開

$$J_p(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.58)$$

を用いて、

$$\frac{A}{B} = -\frac{\cos(r_0^2/2r_c^2 - \pi/8)}{\cos(r_0^2/2r_c^2 - 3\pi/8)} \quad (2.59)$$

となる。一方、変数を元に戻すと $u_0(r) = rR(r)$ は、

$$u_0(r) = A(r/r_0)^{1/2} \left[J_{1/4}(r_0^2/2r^2) - \frac{J_{1/4}(r_0^2/2r_c^2)}{J_{-1/4}(r_0^2/2r_c^2)} J_{-1/4}(r_0^2/2r^2) \right] \quad (2.60)$$

と表される。

散乱長を決定するには、遠方 ($r \gg r_0$) での波動関数を調べる必要がある。即ち z が十分小さい時、

$$J_p(z) \simeq \frac{z^p}{2^p \Gamma(1+p)} \quad (2.61)$$

となる為、 $u_0(r)$ は、

$$u_0(r) \simeq A \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(5/4)} + B \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(3/4)} \frac{r}{r_0} \quad (2.62)$$

となる。式 2.43、2.44、2.45 と比較して、

$$a = -\frac{r_0}{2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} \frac{A}{B} \quad (2.63)$$

式 2.59 及び、 $r_0/2 = r_{\text{vdW}}$ より、

$$\begin{aligned} a &= r_{\text{vdW}} \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2}\Gamma(5/4)} [1 - \tan(\Phi - 3\pi/8)] \\ &\simeq 0.956 r_{\text{vdW}} [1 - \tan(\Phi - 3\pi/8)] \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\Phi = \frac{2r_{\text{vdW}}^2}{r_c^2} \quad (2.65)$$

となる。式 2.64 が示すことは、散乱長 a はスケールはファンデアワールス長によって決まり、それに位相因子 $1 - \tan(\Phi - 3\pi/8)$ を掛けることによって決定される。 Φ は短距離ポテンシャルの詳細に依存する（今回は $\Phi = 2r_{\text{vdW}}^2/r_c^2$ ）為、これを計算によって決定するのは難しい。従って散乱長 a は実際の測定によって決定する必要がある。尚この議論は、式 2.51 の様な単純化されたポテンシャルではなく、一般的なポテンシャルでも同様の議論が成り立つ [55]。

また、この時の係数が1になるように、

$$\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} r_{\text{vdW}} \simeq 0.956 r_{\text{vdW}} \quad (2.66)$$

と定義したとき、この $\bar{a}$ のことを mean scattering length という。これを用いるとより式を単純に表すことができる。

2.3 フェッシュバッハ共鳴

前節までの議論により、散乱長 a はファンデアワールス長と短距離の斥力ポテンシャルの詳細によって決定される。従ってこれを大きく変えようとする、短距離ポテンシャルの形を変形させる必要があるが、これはエネルギースケールからして、現実的ではない。前節までの様に一つのチャンネルの散乱を考えている限り、低エネルギー散乱では散乱長は原子種によって決まっており、変化させることはできない。しかし、アルカリ原子は図 2.1 の様に複数の散乱チャンネルを持つため、これを利用して散乱長を大きく変化させることができる。本節では、多チャンネルの散乱を考える。そしてチャンネル間の結合によりフェッシュバッハ共鳴が現れ、それによって散乱長が大きく変化するということを見ていく。

2.3.1 異なる内部状態間の散乱

図 2.1 に示す様に、アルカリ原子は電子スピンの組み合わせによって散乱ポテンシャルが変化する。さらに、アルカリ原子は核スピンも持っている。本研究で対象とする、 ^{41}K 及び ^{87}Rb の核スピンは $3/2$ であり、合計 8 個の基底状態が存在する。散乱チャンネルは、二原子のスピン状態の組によって表現される。

異なる内部状態への遷移を起こすような散乱について考える。始めチャンネル $|\alpha\beta\rangle$ (α, β は二原子のスピン状態を示す。) にある二つの原子が相互作用によりチャンネル $|\alpha'\beta'\rangle$ へ散乱するとする。これは多チャンネル問題となるが、この時の相対運動のハミルトニアンは単一チャンネルの散乱を拡張して以下のように書ける。

$$\mathcal{H}_{\text{rel}} = \mathcal{H}_0 + V \quad (2.67)$$

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta + \mathcal{H}_{\text{spin}}(1) + \mathcal{H}_{\text{spin}}(2) \quad (2.68)$$

ここで $\mathcal{H}_{\text{spin}}(1)$ および、 $\mathcal{H}_{\text{spin}}(2)$ は原子 1 および 2 のスピン状態を指定するハミルトニアンでアルカリ原子の基底状態ではゼーマン相互作用と超微細相互作用からなる。 V は原子間相互作用を示す。 $\mathcal{H}_0$ の固有状態を $|\alpha\beta, \mathbf{k}\rangle$ ($\hbar\mathbf{k}$ は相対運動量) と表す。スピンハミルトニアン固有値が

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} |\alpha\rangle = \epsilon |\alpha\rangle \quad (2.69)$$

で与えられるとすると。 H_0 の固有状態のエネルギーは

$$E_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) = \frac{\hbar^2 k_{\alpha\beta}^2}{2m_r} + \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \quad (2.70)$$

となる。

散乱振幅は式 2.18 を一般化することで得られる。

$$|\phi\rangle = i^{\mathbf{k}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{r}} |\alpha\beta\rangle + \sum_{\alpha'\beta'} f_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}) \frac{e^{i\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}\cdot\mathbf{r}}}{r} |\alpha'\beta'\rangle \quad (2.71)$$

$\hbar\mathbf{k}_{\alpha\beta}$ は入射状態の相対運動量である。これを入射チャンネルとよぶ。散乱は別の内部状態 α', β' の成分をもつ。これを出射チャンネルとよぶ。

エネルギー保存より、

$$\frac{\hbar^2 k_{\alpha'\beta'}^2}{2m_r} = \frac{\hbar^2 k_{\alpha\beta}^2}{2m_r} + \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta} - \epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\beta'} \quad (2.72)$$

である。もし $k_{\alpha'\beta'}^2 < 0$ ならば、そのような散乱状態は存在できず、そのチャンネルは閉じているという (closed channel)。一方 $k_{\alpha'\beta'}^2 > 0$ ならば、そのチャンネルは開いているという (open channel)。

open channel 間の結合は、非弾性衝突につながり、トラップ損失になる。

2.3.2 Feshbach 共鳴の原理

チャンネル間の結合は Feshbach 共鳴も与える。あるチャンネルの弾性散乱はそのそばに分子の束縛状態を持った閉じたチャンネルがあると劇的に変わる。

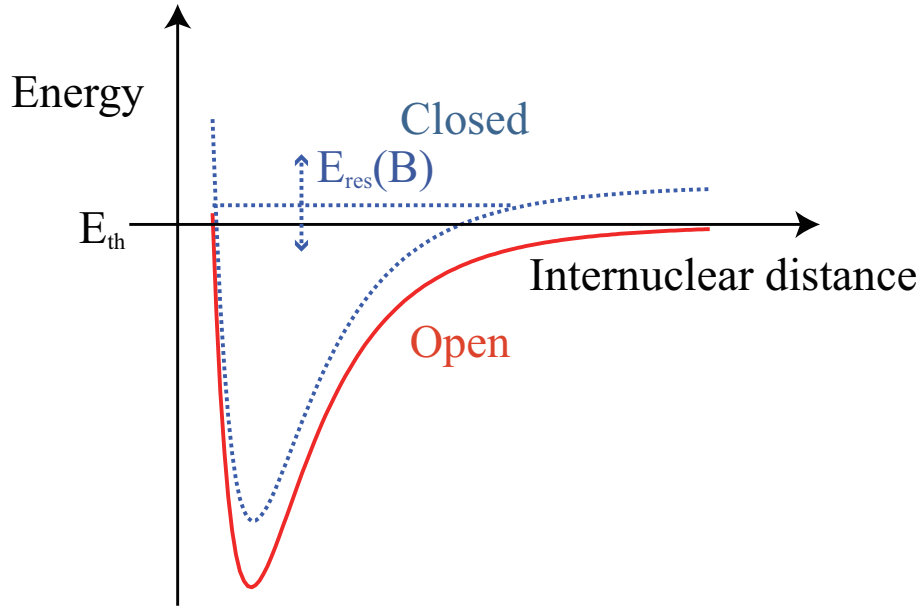


図 2.3: Feshbach 共鳴形成の様子

図 2.3 に示すように、開チャンネルの全エネルギー E_{th} が、閉チャンネルの束縛状態のエネルギーと一致した時、Feshbach 共鳴が現れる。閉チャンネルは散乱の終状態になりえないので、開と閉チャンネル間の結合について一次までのオーダーで散乱は変わらな

い。しかし二次の過程、すなわち開チャンネル → 閉チャンネル → 開チャンネルといった閉チャンネルを中間状態にとった散乱は起きうる。従って摂動論から

$$a \sim \frac{C}{E_{th} - E_{res}} \quad (2.73)$$

のタイプの項の和を持つ散乱長への寄与が期待できる。入射チャンネルのエネルギーが束縛状態のエネルギーに近いほど効果は大きくなる。エネルギー変化に対する二次摂動論から予測されるように、チャンネル間結合は散乱粒子のエネルギーが束縛エネルギーより大きければ斥力相互作用であり、散乱粒子のエネルギーが束縛エネルギーより小さければ引力相互作用である。状態のエネルギーは磁場の様な外部パラメータによって決定されるから、状態間のエネルギーは外部パラメータによって調整可能である。従って上述の様な共鳴を用いることによって、粒子間の相互作用を外部パラメータによって調整することができる。

2.3.3 Feshbach 共鳴の定式化

Feshbach 共鳴を一般的に定式化する為には、開チャンネルと閉チャンネルの結合を考えなければならない。状態空間を開チャンネルを含む P と閉チャンネルを含む Q に分割して考える。状態ベクトル $|\phi\rangle$ は二つの部分空間の射影の和

$$|\phi\rangle = |\phi_P\rangle + |\phi_Q\rangle \quad (2.74)$$

で書くことができる。ここで $|\phi_P\rangle = \mathcal{P}|\phi\rangle$ 、 $|\phi_Q\rangle = \mathcal{Q}|\phi\rangle$ であり、 $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$ は二つの部分空間の射影演算子であり、 $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = 1$ 、 $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$ を満たす。シュレーディンガー方程式は次のような連立方程式になる。

$$(E - \mathcal{H}_{PP})|\phi_P\rangle = \mathcal{H}_{PQ}|\phi_Q\rangle \quad (2.75)$$

$$(E - \mathcal{H}_{QQ})|\phi_Q\rangle = \mathcal{H}_{QP}|\phi_P\rangle \quad (2.76)$$

ここで、 $\mathcal{H}_{PP} = \mathcal{P}\mathcal{H}\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{H}_{QQ} = \mathcal{Q}\mathcal{H}\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{H}_{PQ} = \mathcal{P}\mathcal{H}\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{H}_{QP} = \mathcal{Q}\mathcal{H}\mathcal{P}$ 、であり上式を解くことに帰着する。

ここでは結果のみを示す [50, 52]。散乱長は共鳴項のエネルギー依存性を考慮して、

$$\frac{2\pi\hbar^2}{m_r}a = \frac{2\pi\hbar^2}{m_r}a_{bg} + \frac{|\langle\phi_{res}|\mathcal{H}_{QP}|\phi_0\rangle|}{E_{th} - E_{res}} \quad (2.77)$$

と書ける。ここで $|\phi_{res}\rangle$ 、 $|\phi_0\rangle$ はそれぞれ、共鳴している分子的束縛状態と相対速度 0 の散乱状態を示す。 a_{bg} は非共鳴時の散乱長である。上式のエネルギー依存性は Feshbach 共鳴特有のエネルギー依存性である。

原子間相互作用は状態のエネルギーが外部パラメータに依っているという事実を用いて調節可能である。ここでは、外部磁場を考える。式 2.77 のエネルギー分母が $B = B_0$ でゼロになるとする。この点の周りで展開すると、

$$E_{th} - E_{res} \sim \delta\mu(B - B_0) \quad (2.78)$$

$$\delta\mu = \mu_F - \mu_\alpha - \mu_\beta \quad (2.79)$$

を得る。ここで $\mu_\alpha = -\partial\epsilon_\alpha/\partial B$, $\mu_\beta = -\partial\epsilon_\beta/\partial B$, $\mu_F = -\partial E_{res}/\partial B$ はそれぞれ開チャンネル二つの原子の磁気モーメントと分子的束縛状態の磁気モーメントであり、 $\delta\mu$ は束縛状態と原子対の磁気モーメントの差を示す。従って散乱長は

$$a = a_{bg} \left(1 + \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (2.80)$$

で与えられる。幅パラメータ Δ は

$$\Delta = \frac{m_r}{2\pi\hbar^2 a_{bg}} \frac{|\langle \phi_{res} | \mathcal{H}_{QP} | \phi_0 \rangle|^2}{\delta\mu} \quad (2.81)$$

である。

また分子の束縛エネルギーは、

$$E_b = -\frac{\hbar^2}{2m_r[-a_{bg}\Delta/(B - B_0)]^2} \quad (2.82)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_r[a_{bg} - a(B)]^2} \quad (2.83)$$

のように書ける。

2.3.4 フェッシュバッハ共鳴の性質

前小節では、フェッシュバッハ共鳴について定式化した、フェッシュバッハ共鳴の性質を特徴づけるパラメータとして、以下の二つの無次元量を定義する。まず一つは、open channel におけるバックグラウンドの散乱長 a_{bg} を無次元化したもので、mean scattering length $\bar{a}$ (式 2.66) を用いて、

$$r_{bg} = a_{bg}/\bar{a} \quad (2.84)$$

で定義する。これを dimensionless background scattering length という。尚文献によっては、 $r_{bg} = a_{bg}/r_{vdW}$ で定義される場合もあるので注意すること。フェッシュバッハ共鳴のエネルギースケールは、束縛状態と原子対の磁気モーメントの差 $\delta\mu$ とフェッシュバッハ共鳴の幅 Δ を用いて、 $\Gamma_0 = \delta\mu\Delta$ で表される。従って共鳴の強さを表す無次元量として、ファンデアワールスエネルギー E_{vdW} (式 2.4) を用いて次のパラメータを定義する。

$$s_{res} = r_{bg} \frac{\Gamma_0}{E_{vdW}} = \frac{a_{bg}}{\bar{a}} \frac{\delta\mu\Delta}{E_{vdW}} \quad (2.85)$$

フェッシュバッハ共鳴は $s_{res} \gg 1$ であるか、 $s_{res} \ll 1$ であるかによって大きく二つに分類される。 $s_{res} \gg 1$ の共鳴のことを、entrance channel dominated resonance とよび、 $s_{res} \ll 1$ の共鳴のことを closed channel dominated resonance と呼ぶ。ここで問題となるのは、フェッシュバッハ共鳴近傍で、open channel と closed channel の割合がどのように変化するかである。フェッシュバッハ共鳴状態 $|\phi_{res}\rangle$ は、open channel の波動関数 $|\phi_b^{bg}\rangle$ と closed channel の

波動関数 $|\phi_b^{\text{cl}}\rangle$ の和で表され、規格化条件は、 $\langle \phi_{\text{res}} | \phi_{\text{res}} \rangle = \langle \phi_b^{\text{bg}} | \phi_b^{\text{bg}} \rangle + \langle \phi_b^{\text{cl}} | \phi_b^{\text{cl}} \rangle = 1$ である。規格化定数として以下の量を導入する。

$$\langle \phi_b^{\text{cl}} | \phi_b^{\text{cl}} \rangle = N_b^{-2} 4\pi \int_0^\infty r^2 dr |\phi_{\text{res}}(r)|^2 = N_b^{-2} \quad (2.86)$$

N_b^{-2} は、フェッシュバッハ共鳴近傍での closed channel の割合を示す規格化定数で、closed channel fraction といい、 $Z(B)$ で表される。共鳴状態は $|\phi_{\text{res}}\rangle = \sqrt{Z} |\phi_b^{\text{bg}}\rangle + \sqrt{Z-1} |\phi_b^{\text{cl}}\rangle$ と表される。 $Z(B)$ はある磁場でのフェッシュバッハ分子状態と原子対状態の磁気モーメントの差 ($\partial E_b / \partial B$) によって表すことができる。

$$Z(B) = \frac{1}{\delta\mu} \frac{\partial E_b}{\partial B} = \frac{\delta\mu(B)}{\delta\mu} \quad (2.87)$$

$\delta\mu(B) = \partial E_b / \partial B$ とおいた。共鳴点近傍では $Z(B)$ は、式 2.4、2.85、2.82、2.87 より、

$$\begin{aligned} Z(B) &= \frac{2}{s_{\text{res}} |r_{\text{bg}}|} \frac{|B - B_0|}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\zeta} \frac{|B - B_0|}{\Delta} \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} s_{\text{res}} |r_{\text{bg}}| \quad (2.89)$$

となる。 ζ はフェッシュバッハ分子状態のエネルギー準位がどのくらいの領域で非線形に変化しているかを示すパラメータで、おおよそ磁場が共鳴点から $\zeta\delta$ 程度離れると、フェッシュバッハ分子状態のエネルギーの変化は直線となる。すなわち Closed channel fraction がほぼ 1 となり、ほぼ束縛状態 $|\phi_b^{\text{cl}}\rangle$ で表される状態となる。

以上の議論を元にフェッシュバッハ共鳴を特徴づける二つの量である、 r_{bg} 及び s_{res} について再び考える。 r_{bg} は非共鳴時の散乱長 a_{bg} を $\bar{a}$ で規格化したものである。散乱長は式 2.64、2.66 をみれば分かるように、 $\bar{a}$ 及び位相因子 Φ で書けるから、 r_{bg} は open channel の位相項を示したものであると分かる。一方 s_{res} はフェッシュバッハ共鳴の強さを表すパラメータであるが、式 2.88 を見れば分かるように、 ζ を通して Closed channel fraction の変化に強く影響を与える。

$s_{\text{res}} \gg 1$ の時 (entrance channel dominated resonance)、フェッシュバッハ分子状態は図 2.4 左図の様に、幅 Δ を超える広い範囲で $Z \ll 1$ であり、ほぼ Open channel で記述できることが分かる。 s_{res} は、幅 Δ に強く依存する為この時の共鳴を broad resonance と呼ぶ。

一方 $s_{\text{res}} \ll 1$ の時 (closed channel dominated resonance)、フェッシュバッハ分子状態は図 2.4 右図の様に、幅 Δ よりも狭い範囲で、すぐに $Z \sim 1$ となる。従ってフェッシュバッハ分子状態はほぼ closed channel で記述できる。こちらは Broad resonance に対して、narrow resonance と呼ぶ。

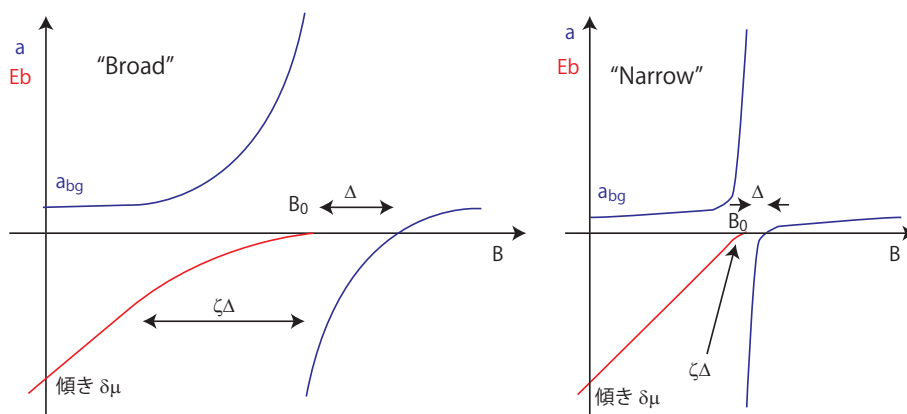


図 2.4: フェッシュバッハ共鳴近傍での散乱長と束縛エネルギー:

左図が Broad フェッシュバッハ共鳴、右図が Narrow フェッシュバッハ共鳴を示す。

共鳴点から離れることで、 Z が 0 から 1 まで連続的に変化するということは、原子対から断熱的に分子状態へと変換できるということを示す（フェッシュバッハ会合）。これは極低温の分子を作る上で、非常に有用な手段である。フェッシュバッハ会合を行う際に s_{res} の値は重要となる。すなわち、 $s_{\text{res}} \gg 1$ であれば、原子対と分子状態の結合が強いため断熱条件が満たしやすい。ただし、幅 Δ を超える広い範囲で $Z \ll 1$ である為、完全な分子状態に変換するのは難しい。これは例えば誘導ラマン遷移等の分子-分子遷移を適用する際に効率が上がらないといった問題がある。一方 $s_{\text{res}} \ll 1$ では逆の利点と不利点がある。我々が用いてる ^{41}K - ^{87}Rb は、 $s_{\text{res}} = 25.8$ と $s_{\text{res}} = 0.81$ の共鳴を持っている（後述）。 $s_{\text{res}} = 0.81$ の共鳴は $s_{\text{res}} \sim 1$ で Broad resonance と Narrow resonance の中間で、分子生成の実験的には利点、不利点がちょうど良いバランスである。従って本研究でのフェッシュバッハ会合の研究は $s_{\text{res}} = 0.81$ の共鳴を用いている。

2.3.5 Feshbach 分子の生成効率

Feshbach 共鳴を用いることによって分子を生成することができるが、分子の寿命が無視できる状況では、分子の生成効率は以下の要素で決定される。

1. 位相空間密度
2. 断熱条件
3. 空間的重なり（異種原子）

Feshbach 分子の生成効率は磁場スイープによる生成方法において詳しく調べられている [16]。磁場のスイープが速い条件、すなわち非断熱過程では分子の生成確率は Landau-Zener の現象論的遷移確率 [56, 57] に従うことが知られている。Landau-Zener の公式から原子状態 $|\phi_0\rangle$ から分子状態 $|\phi_{\text{res}}\rangle$ への遷移確率は以下の様に書ける [52]。

$$p_{0,\text{res}} = 1 - e^{-2\pi\delta LZ} \quad (2.90)$$

ここで δ_{LZ} は Landau-Zener パラメータと呼ばれ、結合の強さと共鳴を通過する速さを用いて以下の様に書ける。

$$\delta_{LZ} = \frac{|\langle \phi_{res} | W | \phi_0 \rangle|^2}{\hbar |\dot{E}_{res}|} \quad (2.91)$$

従ってトラップ中の原子集団から磁場スイープにより分子を生成する場合、生成した分子の個数を N_{mol} とすると以下の様に書ける [16]。

$$N_{mol} = N_{max}(1 - e^{-\beta/\dot{B}}) \quad (2.92)$$

ここで N_{max} は十分ゆっくり磁場をスイープした時の分子数の収束値であり、 $\dot{B}$ は磁場のスイープ速さである。Landau-Zener パラメータ $2\pi\delta_{LZ,trap} = \beta/\dot{B}$ は、原子集団の平均密度 n 、Feshbach 共鳴の幅 Δ 、バックグラウンドの散乱長 a_{bg} 、 $\dot{B}$ 及び定数 α を用いて直感的に以下の様に書ける。

$$2\pi\delta_{LZ,trap} = \alpha n \Delta a_{bg} / \dot{B} \quad (2.93)$$

Landau-Zener の公式に当てはまる振る舞いをする為には値 $n/\dot{B}_{1/e}$ ($1/e$ スイープ速度) は密度に依存せず一定値になるはずである ($\dot{B} = \dot{B}_{1/e}$ の時、 $2\pi\delta_{LZ,trap} = 1$ となり、 $N_{mol}/N_{max} = 63\%$ となる [16])。この値は原子種やフェッシュバッハ共鳴の性質によって決まっており、 ^{85}Rb の 155 G の Feshbach 共鳴において α は実験的に決定され、 $\alpha = 4.5(4) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ と報告されている [16]。

さらに以上の条件は ^{40}K - ^{87}Rb の実験にてより詳細に調べられている [22]。そこでは、フェッシュバッハ分子の生成効率 f は、

$$f = f_0(1 - e^{-\Gamma/f_0|\dot{B}|}) \quad (2.94)$$

と表されている。 f_0 は最大変換効率である。速いスイープでは、 $f = \Gamma/|\dot{B}|$ となる。Landau-Zener パラメータはフェッシュバッハ共鳴のパラメータに依存し、 f は結局 [58]、

$$f = \langle n_{>} \rangle 2\pi \frac{2\pi\hbar}{m_r} \left| \frac{a_{bg}\Delta}{\dot{B}} \right| \quad (2.95)$$

と表される。ここで

$$\langle n_{>} \rangle = \frac{1}{N_{<}} \int n_1(\mathbf{r})n_2(\mathbf{r})d^3r \quad (2.96)$$

であり、 $N_{<}$ は 1 原子と 2 原子の内少ない方を示す。式 2.95 は実験結果と良く一致している [22]。

また、三次元光格子の各サイトの基底状態に原子が二つずつ入っていると仮定すると Landau-Zener パラメータは、理論的に求めることができ、

$$\delta_{LZ,Lattice} = \frac{\sqrt{6}\hbar}{\pi m a_{ho}^3} \left| \frac{a_{bg}\Delta}{\dot{B}} \right| \quad (2.97)$$

となる [59]。ここで $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega_{ho}}$ であり、 m は換算質量 ω_{ho} は光格子の各サイトのトラップ周波数である。これは既に実験的に確かめられている [25]。

磁場スイープによる断熱条件は以上の式から見積もることができる。十分ゆっくりな磁場スイープでは、変換レート N_{mol}/N は N_{max}/N に収束する。それでは収束値は、何に

よって決まるのであろうか。これは、密度が非常に高い状況等 [60, 61, 62] を除いて位相空間密度のみで決まると考えて良いということが分かっている [16]。これは断熱過程では、原子対の波動関数は滑らかに変化していくが、位相空間における位置は変化しない為、断熱過程が開始された時に位相空間上で十分近いところにある原子対のみが分子になると考えることで理解できる。Monte Carlo シミュレーションによるとその距離はボゾンでは $0.44h$ 、フェルミオンでは $0.38h$ 程度である [16]。この観点から考えると縮退状態では、断熱条件を満たしている限りは分子の変換効率は 100% となる。また光格子の各サイトの基底状態に原子を二つずつ入れることで理論的には 100% の変換効率が得られると考えられる。実際に $^{87}\text{Rb}_2$ の系三次元光格子を用いることで 100% に近い変換効率が達成されている [25]。

磁場スイープによる Feshbach 分子の生成方法の他に近年 RF 会合による Feshbach 分子の生成が行われている [24, 63]。RF 会合は、高速に分子を観測でき、かつ束縛エネルギーを正確に測定する手法として有用である。RF 会合による分子の生成効率は、照射する RF の周波数をスイープすることにより断熱過程となり、磁場スイープによる時と同様の手法で生成効率を評価できることが確かめられている [63]。この場合の Landau-Zener パラメータの分子はラビ周波数となる為、照射する RF の強度及び原子状態と分子状態の波動関数の重ね合わせの程度に依存すると考えられる。実際に RF 会合時の磁場での原子状態と分子状態の波動関数の関数の重ね合わせを計算し、生成効率を評価した実験が行われている [24, 64]。

また、RF 会合による方法に似た方法として Feshbach 磁場自体に変調をかけることにより、分子を生成するといった手法があり [65, 66]、理論的にも研究されている [67]。分子の生成効率は、原子ペアの相対運動エネルギーに依存する。

以上の要素の他に異種原子の場合には、重力サグによって原子雲の重なりが減少する為、それも生成効率に関わってくることが知られている [68, 63]。

2.3.6 Feshbach 分子の寿命

Feshbach 分子は浅く束縛された分子であるので、低エネルギー側に多数の振動状態を持っている。従って衝突の際に振動緩和により、下の振動状態に移ると同時に、束縛エネルギーの差分の分だけ運動エネルギーを得て、トラップから外れていってしまう。従って、Feshbach 分子の寿命は非常に短くなる。 ^{40}K と ^{87}Rb の分子の場合、寿命は 100 ms 程度であるが [69]、我々の使用する原子はボソンの為更に短くなる可能性がある。 Na_2 の Feshbach 分子の場合、特定の状況下において寿命が 106 μs になるという報告がある [23]。単純には比較できないが、寿命が非常に短くなる可能性がある。

三次元光格子による長寿命化

フェッシュバツハ分子を長寿命化する方法に三次元光格子を用いる方法がある。これは三次元光格子の各サイトに分子を一つずつ入れることによって分子を衝突から保護する方法である。実際に $^{87}\text{Rb}_2$ の系で三次元光格子を用いることにより、分子の長寿命化が成功している [25]。この時の分子の寿命は原子もしくは分子のトンネリングレートによって決

まる。光格子を十分高くし、さらに原子を吹き飛ばすことによって 700 ms 以上の寿命を得ている。ボゾンの場合モット絶縁体状態にすることで強くトンネリングを抑制することができると思われる。

2.3.7 $^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$ の Feshbach 共鳴

ここでは、本研究で用いる ^{87}Rb と ^{41}K の Feshbach 共鳴の特性について説明する。本研究では ^{87}Rb 、 ^{41}K 共に $|F = 1, m_F = 1\rangle$ 状態を用いることにした。この共鳴の利点は以下のとおりである。

1. 原子の基底状態であり、混合系において 2 体の非弾性散乱がなく安定である。

$^{87}\text{Rb}|1,1\rangle + ^{41}\text{K}|1,1\rangle$ から他の状態への散乱チャンネルは存在しない。

2. Feshbach 共鳴点が実験的に比較的にアクセスしやすい位置にある。

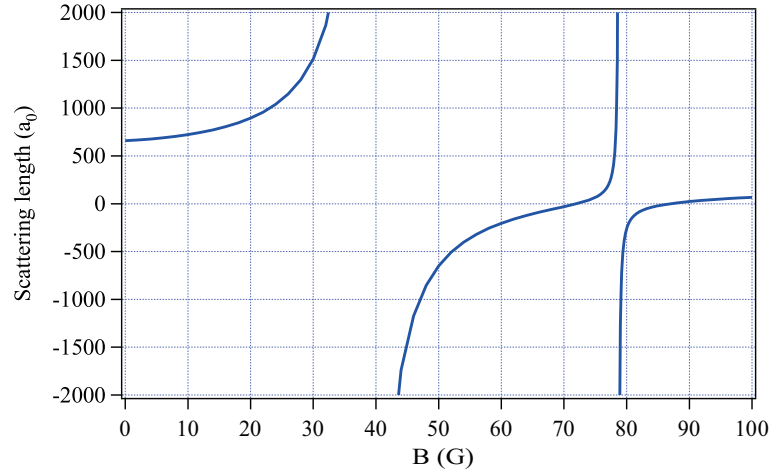
$^{87}\text{Rb}|1,1\rangle - ^{41}\text{K}|1,1\rangle$ の Feshbach 共鳴は、G. Thalhammer らの先行研究によって観測されている [70, 52, 71]。図 2.5 に $^{87}\text{Rb}|1,1\rangle$ と $^{41}\text{K}|1,1\rangle$ の間の散乱長の理論計算を示す [72]。これらの先行研究の結果から、100 G 以下の領域では、35 G 付近に幅 37 G 程度の幅の広い共鳴があり、79 G 付近に幅 1.2 G 程度の幅の狭い共鳴がある。表 2.1 にフェッシュバッハ共鳴の性質をまとめる。参考の為、同位体である $^{40}\text{K}|F = 9/2, m_F = -9/2\rangle - ^{87}\text{Rb}|1,1\rangle$ 間のフェッシュバッハ共鳴についても、載せておく。 $\bar{B}$ は、散乱長が 0 となる磁場であり、その時の散乱長の変化率 da/dB を示した。尚多くの原子種のフェッシュバッハ共鳴の性質については文献 [73] にまとめられており便利である。

また、表 2.2 に ^{87}Rb と ^{41}K の散乱長をまとめる。 ^{87}Rb と ^{41}K の BEC を混合させる為には、相互の散乱長を 0 付近に調整する必要がある。これについては、次章で詳しく述べる。

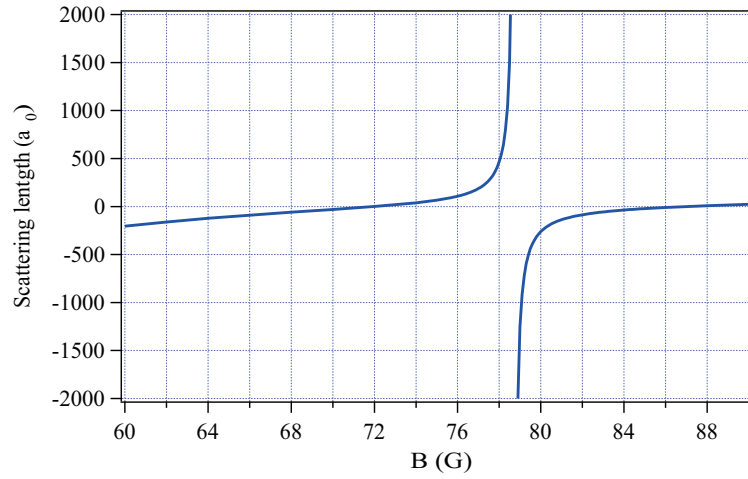
表 2.1: K-Rb 間の Feshbach 共鳴:

$^{41}\text{K}-^{87}\text{Rb}$ の共鳴は文献 [66, 72] を $^{40}\text{K}-^{87}\text{Rb}$ の共鳴は文献 [74, 72] を参照した。

Species	B_0 (G)	Δ (G)	a_{bg} (a_0)	$\bar{B}$ (G)	$\frac{da}{dB}$ (a_0/G)	$\delta\mu$ (μ_B)	s_{res}	r_{bg}	ζ
$^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$	38.4	37	284	72.18	16.8	1.65	25.8	4.11	53.0
	78.67	1.2	284	87.19	8.9	1.59	0.81	4.11	1.66
$^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$	546.9	-3.10	-189			2.30	1.96	-2.75	2.70



(a) 0~100 G



(a) 60~90 G

図 2.5: $^{41}\text{K} |1,1\rangle$ と $^{87}\text{Rb} |1,1\rangle$ の Feshbach 共鳴 : (a) 0 ~ 100 G (b) 60 ~ 90 G表 2.2: ^{41}K 、 ^{87}Rb の散乱長

State	Scattering length (a_0)	Ref.
$^{87}\text{Rb} 2,2\rangle + ^{87}\text{Rb} 2,2\rangle$	109 ± 10	[75]
$^{41}\text{K} 2,2\rangle + ^{41}\text{K} 2,2\rangle$	$25 < a < 60$	[76]
$^{87}\text{Rb} 2,2\rangle + ^{41}\text{K} 2,2\rangle$	163^{+57}_{-12}	[77]
$^{87}\text{Rb} 1,1\rangle + ^{87}\text{Rb} 1,1\rangle$	100.4	[78, 79]
$^{41}\text{K} 1,1\rangle + ^{41}\text{K} 1,1\rangle$	60 ± 2	[80]
$^{87}\text{Rb} 1,1\rangle + ^{41}\text{K} 1,1\rangle$	$a_{bg} = 284a_0$	[72, 70]

2.4 小数多体系

本節では、小数多体系の問題特に三体問題について記述する。前節までは二体の問題について議論し、二体の低エネルギー散乱は散乱長 a によって特徴づけられるということを見た。さらに散乱チャンネル間の結合がフェッシュバッハ共鳴を出現させ、それによって散乱長 a が外場によって $+\infty$ から $-\infty$ まで変化され得ることをみた。冷却原子気体の振る舞いのほとんどは、平均原子間距離が散乱長 a より十分大きい二体の相互作用によって記述できる。しかし原子の冷却・トラップ技術の向上により、より高密度な原子気体が得られる様になってきた。さらにフェッシュバッハ共鳴によって散乱長の絶対値が大きくなると、三体以上の非弾性の衝突の影響がより顕著に表れてくる。三体以上の非弾性の衝突は原子のトラップからのロスにつながる為冷却原子の実験を行う上で、その振る舞いを調べることは重要である。さらに、1970 年のエフィモフ (V. Efimov) の予言 [27] により三体問題自体がより注目されるようになった。すなわち、フェッシュバッハ共鳴近傍のような粒子間の相互作用が共鳴状態にあるとき、三体の束縛状態が普遍的に表れるといった予言である。この三体の束縛状態のことをエフィモフ状態と呼び、エフィモフ状態は実際に冷却原子の系において観測され [12]、実在が証明された。エフィモフ状態の性質は原子の三体ロスを調べることで明らかにすることができる。

以下では、エフィモフ状態の理論的背景と冷却原子の系における実験の進展状況についてまとめる。

2.4.1 二体問題の普遍性

有効レンジ展開

第 2.2.3、2.2.4 節の議論により、低エネルギー極限 ($k \rightarrow 0$) での散乱振幅は散乱長 a のみで表されることが示された。しかし、これはフェッシュバッハ共鳴近傍の様に、散乱長 a の絶対値が無大に発散するようなところでは修正を受ける。なぜなら ka の値が有限値になり、この影響も無視できなくなるからである。従って、共鳴付近での散乱を記述できるように理論を以下の様に修正する。

s 波の散乱振幅は位相のずれ δ_0 を用いて式 2.34 より以下の様に書ける。

$$f_0(k) = \frac{1}{k(\cot\delta_0 - i)} \quad (2.98)$$

k が有限値の時、位相のずれ $\delta_0(k)$ は k^2 のべきで展開できる [81]。よって

$$\frac{1}{a(k)} \equiv -k \cot\delta_0(k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} r_s k^2 + O(k^4) \quad (2.99)$$

と展開できる [43]。ここで、 r_s は s-wave での有効レンジ (effective range) と呼び、この展開を有効レンジ展開 (effective range expansion) と呼ぶ [43]。従って散乱振幅 $f_0(k)$ は

以下の様に見える。

$$f_0(k) = -\frac{1}{a(k)^{-1} + ik} \quad (2.100)$$

$$= -\frac{1}{a^{-1} - r_s k^2/2 + ik} \quad (2.101)$$

k の高次の項は無視した。この時散乱断面積 $\sigma(k)$ は式 2.21 の定義より、

$$\sigma(k) = \int |f_0(k)|^2 d\Omega \quad (2.102)$$

$$= \int \left| -\frac{1}{a^{-1} - r_s k^2/2 + ik} \right|^2 d\Omega \quad (2.103)$$

$$= \frac{4\pi a^2}{1 + k^2 a^2} \left[1 + \frac{r_s}{a} \frac{a^2 k^2}{1 + a^2 k^2} + O\left(\left(\frac{r_s}{a}\right)^2\right) \right] \quad (2.104)$$

となる。ここで $k \ll 1/|r_s|$ を仮定した。式で見ると、散乱振幅及び散乱断面積は有効レンジ r_s に依存する。有効レンジは相互作用の詳細によって決まっており、その意味で k が有限値の時、散乱断面積は普遍的に書けない。しかし次の二つの極限では有効レンジの影響を無視できる。[43]。

1. resonant limit: $|a| \rightarrow \infty$ with r_s fixed.

2. scaling limit: $r_s \rightarrow 0$ with a fixed.

どちらの極限でも、 $r_s/|a|$ のべきで表される項は 0 に近づき、散乱断面積 $\sigma(k)$ は相互作用の詳細に寄らない普遍的な形で表されるようになる。式 2.100 より、散乱振幅は

$$f_0(k) = -\frac{1}{a^{-1} + ik} \quad (2.105)$$

式 2.104 より散乱断面積は、

$$\sigma(k) = \frac{4\pi a^2}{1 + k^2 a^2} \quad (2.106)$$

となる。1 の状況を resonant limit もしくは unitary limit と呼ぶ。この極限では、散乱長 a は長さスケールとして機能しなくなり、散乱断面積は $4\pi/k^2$ に飽和する。これは s 波の散乱断面積の最大値であり、散乱振幅の保存則に由来する（式 2.30）。

一方 2 の状況を scaling limit もしくは zero-range limit と呼ぶ。この極限では a が有限値であるので、節 2.2 で議論したような低エネルギー極限が良く成り立つ。散乱断面積は $4\pi a^2$ となり a のみに依存する（式 2.47）。この極限では二体の観測量に関して、次の continuous scaling symmetry が成り立つことが知られている。すなわち、散乱長 a 、座標 $\mathbf{r}$ 、時間 t に関して正の実数 λ を用いて、

$$a \rightarrow \lambda a, \quad \mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}, \quad t \rightarrow \lambda^2 t \quad (2.107)$$

の変換に対して、二体の観測量は λ のべきで変換される。

理論的解析手法

上記の様な極限的状況では系の振る舞いは相互作用の詳細に寄らない。scaling limit では、散乱長 a に相互作用の影響が全て集約されている。即ち、散乱長 a を与えるどのような相互作用を考えても結果は同じということである。このような問題を考える上でいくつかの理論的手法がある。

一つ目は束縛条件による方法 (boundary condition method) である。これは相互作用の及ぶ範囲より十分遠方では自由粒子のシュレーディンガー方程式を考え、一方短距離の波動関数と接続できるように束縛条件を定める方法である。すなわち短距離では波動関数がある長さ r_0 において、

$$r\Phi(r)|_{r \rightarrow r_0} = C(r_0 - a) \quad (2.108)$$

となるような条件である。これは、

$$\left. \frac{d}{dr} \log[r\Phi(r)] \right|_{r \rightarrow r_0} = \frac{1}{r_0 - a} \quad (2.109)$$

の条件と等価である。 $r_0 \rightarrow 0$ とすることで scaling limit (zero range limit) での束縛条件は、

$$\left. \frac{d}{dr} \log[r\Phi(r)] \right|_{r \rightarrow 0} = -\frac{1}{a} \quad (2.110)$$

となる。式 2.110 のことを Bethe-Peierls の条件と呼ぶ [82]。

二つ目の方法は、擬ポテンシャルによる方法 (Pseudopotential method) である。すなわち散乱長 a が同じになる様なモデルポテンシャルを考える方法である。擬ポテンシャルとして、次の Huang- Yang の擬ポテンシャル [83] がある。

$$V_{HY}(r) = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_r} \delta^3(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.111)$$

式 2.111 のポテンシャルで、シュレーディンガー方程式を書くと、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}) = \mathcal{H} \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_r} \delta^3(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.112)$$

となり、これは式 2.107 の変換に対して不変である。

2.4.2 The shallow dimer

scaling limit では、shallow dimer 状態が普遍的に現れる。"shallow" の意味は短距離相互作用のエネルギースケールよりも十分小さい束縛エネルギー E_D を持つという事である。束縛状態は、 $a > 0$ の時一つ持ち、 $a < 0$ の時存在しない。束縛状態の解は、正の波数 κ を用いて

$$\Phi(r) = C \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad (2.113)$$

と書ける。 κ が十分小さい時、波動関数は式 2.108 の形に漸近するはずなので、束縛状態の波動関数、および束縛エネルギーは、

$$\Phi(r) = \frac{1}{r} e^{-r/a}, \quad E_D = -\frac{\hbar^2}{2m_r a^2} \quad (2.114)$$

となる。

2.4.3 エフィモフ効果

前小節の様な、2粒子の相互作用が共鳴状態にある時、エフィモフ状態と呼ばれる三体束縛状態が普遍的に現れる [27] ことは、節の冒頭で述べたとおりである。この現象の事をエフィモフ効果 (Efimov effect) と呼ぶ。

エフィモフ効果に密接に関連する現象として、トーマス効果 (Thomas Effect) があり、これは 1935 年にトーマス (Thomas) によって理論的に導かれた [84]。トーマスは一つの束縛状態を持ち (束縛エネルギー E_2)、深さ V_0 で有効レンジ r_0 の二体の相互作用をもつ粒子について考えた。この時 $r_0 \rightarrow 0$ 、 $V_0 \rightarrow \infty$ 、 E_2 : fixed の条件で定義される zero-range limit を考えた。彼はこの条件の元で、三体問題を解き、最も深い三体束縛状態の束縛エネルギー E_T が負の無限大に発散するという異常な結果を導いた。これは、たった一つの束縛状態をもつ二体の相互作用が、無限に大きい三体の束縛状態を作り出すという意味で直観に反する結果である。この効果をトーマス効果という。

トーマス効果の異常な結果は、zero-range limit を多体の問題に安易に適用してはいけないということを示している。何故なら相互作用のレンジが r_0 で表される時、そのエネルギーは $\hbar^2/2mr_0^2$ の様にスケールする。従って zero-range limit を適用するということは無限に大きいエネルギーを考えるということになるからである。すなわち相互作用の詳細が三体の束縛エネルギーに影響を与えているという事である。

3体問題を考える上で以上のような状況を回避する為には、散乱長 a 以外の新たな三体の束縛条件を導入する必要がある。これは、式 2.110 の Bethe-Peierls の束縛条件と似た形で、

$$\left. \frac{d}{dR} \log[Rf(R)] \right|_{R=R_0} = \Lambda \quad (2.115)$$

$$R^2 = \frac{2}{3}(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2) \quad (2.116)$$

と表される [29]。ここで R は hyper-radius といい、三粒子の全体のサイズを示す。 $f(R)$ は、hyper-radius に関する波動関数である。 Λ を三体パラメータと呼び、これが三体の散乱を支配する新たなパラメータである。

エフィモフは式 2.115 の元、様々な三体問題に関する普遍的な現象を示した [27, 29, 85]。散乱長 a が大きい極限では、三体束縛状態の繰返し構造が現れ、resonant limit ではその数は無限大に発散する。resonant limit での周期構造は、

$$E_T^{(n+1)}/E_T^n = e^{-2\pi/s_0} \quad (2.117)$$

で表され、ボソンの同種原子の場合 $s \sim 1.00624$ と原子種によらない定数となる。他にも様々な三体の観測量が e^{π/s_0} のべきで表される、離散的スケーリング則が成り立つことが示された。より詳細な議論を文献 [43] に沿って、次小節以降に示す。

2.4.4 基礎方程式

三体問題を解くには、次の定常状態のシュレーディンガー方程式を解けば良い。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \Delta_i + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = E \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \quad (2.118)$$

ここで相互作用 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ は、二体の相互作用の和で置き換える、

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = V(r_{12}) + V(r_{12}) + V(r_{12}) \quad (2.119)$$

ここで $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ は相対座標を示す。 $V(r_{ij})$ としては、Huang-yang の擬ポテンシャル（式 2.111）を使っても良い。なぜなら相互作用の詳細は、散乱長 a と三体パラメータ Λ に束縛条件を通して、集約されるからである。

三体問題を解く上で次のヤコビ座標（Jacobi coordinate）、Hyper-radius、Hyper-angle を導入すると便利である。ヤコビ座標は、

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (2.120)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{k,ij} = \mathbf{r}_k - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \quad (2.121)$$

で表される（図 2.6）。また次の hyper-radius、hyper-angle を導入する。

$$R^2 \equiv \frac{2}{3}[r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2] = r_{ij}^2 + \frac{4}{3}\rho_{k,ij}^2 \quad (2.122)$$

$$\alpha_k = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}r_{ij}}{2\rho_{k,ij}}\right) \quad (2.123)$$

本論文では hyper-radius の定義にエフィモフと同じ定義を用いた [27]。逆にヤコビ座標は hyper-radius、hyper-angle を用いて

$$r_{ij} = R \sin \alpha_k \quad (2.124)$$

$$\rho_{k,ij} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \alpha_k \quad (2.125)$$

と表される。hyper-radius は三体の全体の大きさを特徴づける。一方 hyper-angle は粒子の相対的な位置関係を示す。図 2.7 に hyper-angle の様子を示した。

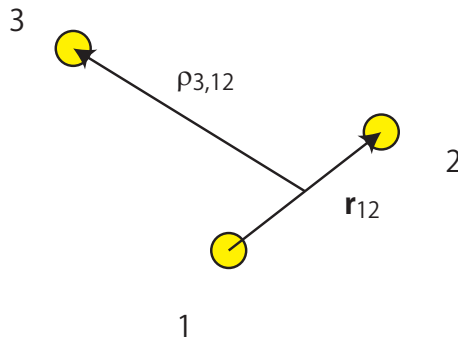


図 2.6: ヤコビ座標の例

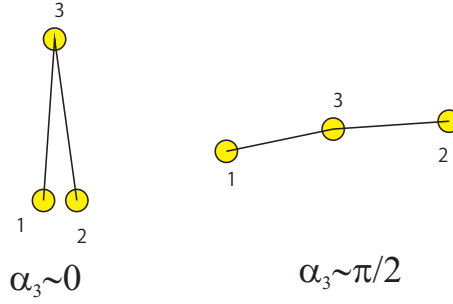


図 2.7: hyper-angle の例

hyper-radius、hyper-angle を用いるとシュレーディンガー方程式 2.118 は以下の様に書き換えられる。

$$\left(T_R + T_{\alpha_k} + \frac{\Lambda_{k,jj}^2}{mR^2} + V(R, \Omega) \right) \Psi(R, \Omega) = E \Psi(R, \Omega) \quad (2.126)$$

$$T_R = -\frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{1}{R^{5/2}} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{15}{4R^2} \right] R^{5/2} \quad (2.127)$$

$$T_{\alpha} = -\frac{\hbar^2}{mR^2 \sin(2\alpha)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 4 \right] \sin(2\alpha) \quad (2.128)$$

$$\Lambda_{k,jj}^2 = \frac{\mathbf{L}_{ij}^2}{\sin^2 \alpha_k} + \frac{\mathbf{L}_{k,jj}^2}{\cos^2 \alpha_k} \quad (2.129)$$

Ω は、 $(\alpha_k, \mathbf{r}_{ij}, \boldsymbol{\rho}_{k,jj})$ の組を示す。ここで、 T_R は hyper-radius に関する運動エネルギー演算子、 T_{α} は hyper-angle に関する運動エネルギー演算子、 $\Lambda_{k,jj}^2$ は一般化された角運動量演算子であり、 $\mathbf{L}_{ij}$ 、 $\mathbf{L}_{k,jj}$ はそれぞれ $\mathbf{r}_{ij}$ 、 $\boldsymbol{\rho}_{k,jj}$ に関する運動量演算子である。

式 2.126 の三体の運動方程式を解く上で、二体問題の時に動径方向の運動と回転運動を分離して解くのと同様に同様に hyper-radius に関する運動方程式と他の自由度に対する運動方程式を分離するのが便利である。三体問題の場合には一般的にはそのような分離はできないが、もし仮に以下の様に波動関数を展開した時、

$$\Psi(R, \Omega) = \frac{1}{R^{5/2}} \sum_n f_n(R) \Phi_n(R, \Omega) \quad (2.130)$$

式 2.126 は、hyper-angle に関するシュレーディンガー方程式

$$\left[T_{\alpha_k} + \frac{\Lambda_{k,jj}^2}{mR^2} + V(R, \Omega) \right] \Phi(R, \Omega) = V_n(R) \Psi(R, \Omega) \quad (2.131)$$

及び、hyper-radius に関するシュレーディンガー方程式

$$\left[\frac{\hbar^2}{m} \left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{15}{4R^2} \right) + V_n(R) \right] f_n(R) + \sum_m \left[2U_{nm}(R) \frac{\partial}{\partial R} + W_{nm}(R) \right] f_m(R) = E f_n(R) \quad (2.132)$$

で書き換えられる。ここで $U_{nm}(R)$ 、 $W_{nm}(R)$ は結合ポテンシャルで

$$U_{nm}(R) = -\frac{\hbar^2}{m} \int d\Omega \Phi_n(R, \Omega)^* \frac{\partial}{\partial R} \Phi_m(R, \Omega) \quad (2.133)$$

$$W_{nm}(R) = -\frac{\hbar^2}{m} \int d\Omega \Phi_n(R, \Omega)^* \frac{\partial^2}{\partial R^2} \Phi_m(R, \Omega) \quad (2.134)$$

となる。Hyper-angle 関数 $\Phi(R, \Omega)$ は、

$$\int d\Omega \Phi_n(R, \Omega)^* \Phi_m(R, \Omega) = \delta_{nm} \quad (2.135)$$

を満たす。積分は、

$$\int d\Omega = \int_0^{\pi/2} d\alpha_k \sin^2(2\alpha_k) \int d\Omega_{i,j} \int d\Omega_{k,jj} \quad (2.136)$$

で実行される。

式 2.131、2.132 は分離が完全でない為解くのは難しいが、adiabatic hyperspherical approximation を適用すると、それぞれの方程式に分離することができる [86]。これは、 $\Phi(R, \Omega)$ が R に対して十分ゆっくり変化しているという近似で、これを用いると $U_{nm}(R)$ 、 $W_{nm}(R)$ は 0 に近似でき、式 2.131 と式 2.132 を独立に解くことができるようになる。以下この近似の元で、それぞれの式について見ていく。

2.4.5 hyper-angle equation

Faddeev equation

式 2.131 を解くために次の Faddeev decomposition を行う [87]。

$$\Phi_n(R, \Omega) = \chi_n(R, \alpha_1, \mathbf{r}_{23}, \boldsymbol{\rho}_{1,23}) + \chi_n(R, \alpha_2, \mathbf{r}_{31}, \boldsymbol{\rho}_{2,31}) + \chi_n(R, \alpha_3, \mathbf{r}_{12}, \boldsymbol{\rho}_{3,12}) \quad (2.137)$$

下位構造の角運動量が 0 の項だけを考える、即ち $\chi_n = \chi_n(R, \alpha)$ と書ける場合のみを考える。実際そのような状態が支配的である。結局式 2.131 は以下の様に書き換えられる。

$$T_{\alpha_1} \chi_n(R, \alpha_1) + V(r_{23})[\chi_n(R, \alpha_1) + \chi_n(R, \alpha_2) + \chi_n(R, \alpha_3)] = V_n(R) \chi_n(R, \alpha_1) \quad (2.138)$$

ここで $V(r_{23}) = V(R \sin \alpha_3)$ は Huang-yang の擬ポテンシャルである (式 2.119)。従って、これは $\alpha_3 = 0$ で有限値をとる。従って相互作用なしの方程式と束縛条件に置き換えられる。従って式 2.138 は、

$$-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sin 2\alpha \chi_n(R, \alpha) = \lambda_n(R) \sin 2\alpha \chi_n(R, \alpha) \quad (2.139)$$

と、 $\alpha = 0$ での束縛条件と等価である。ここで

$$V_n(R) = \frac{\hbar^2}{mR^2} (\lambda_n(R) - 4) \quad (2.140)$$

とした。 $\lambda_n(R) = -s_n^2(R)$ と置くと、式 2.139 の解は、

$$\chi_n(R, \alpha) = \frac{1}{\sin 2\alpha} [c_1 \sinh(s_n(R)\alpha) + c_2 \cosh(s_n(R)\alpha)] \quad (2.141)$$

となる。適用すべき束縛条件は二つある。まず一つは、 $\alpha = \pi/2$ で解が発散しないようにすることである。これにより、 c_1, c_2 の比率が決まり、解は

$$\chi_n(R, \alpha) = \frac{C}{\sin 2\alpha} \sinh \left[s_n(R) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (2.142)$$

となる。もう一つの束縛条件は、式 2.138 の相互作用ポテンシャルが $\alpha = 0$ で有限値をとることによるものである。式 2.142 を式 2.138 に代入し、 $\alpha_3 = -0$ 、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/3$ とすることで、以下の超越方程式を得る [29, 43]

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \sinh \left[s_n(R) \frac{\pi}{6} \right] - s_n(R) \cosh \left[s_n(R) \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{R}{a} \sinh \left[s_n(R) \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.143)$$

$R/a \rightarrow 0$ としたとき、一つの実数解を持ち $s_0 \sim 1.00624$ となる。また無限の数の純虚数の解を持ち、 $s_1 = \pm 4.5i, s_2 = \pm 6.8i, \dots$ となる。実数解は引力ポテンシャルを示し、純虚数解は斥力ポテンシャルを示す（式 2.140）。これによって動径方向のシュレーディンガー方程式が決定され、エフィモフ状態が出現することになる。以下ではそれについて見る。

2.4.6 hyper-radial equation

$V_n(R)$ の具体的な形が分かったので、式 2.132 は adiabatic hyperspherical approximation [86] の元で $|a|/R \rightarrow 0$ の時以下の様に見える。

$$\frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{s_0^2 + 1/4}{R^2} \right] f_0(R) = E f_0(R) \quad (2.144)$$

この解は、変形ベッセル関数 K_n を用いて、

$$f(R) = \sqrt{x} K_{is_0}(x) \quad (2.145)$$

となる。ここで $x = \kappa R = \sqrt{m|E|/\hbar^2} R$ エネルギースケールの hyper-radius である。これは小さい x に対して、次の漸近形をもつ。

$$K_{is_0}(x)|_{x \rightarrow 0} = \sin \left[s_0 \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \Delta \right], \quad \Delta = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\Gamma(is_0) + 1}{\Gamma(-is_0) + 1} \right) \quad (2.146)$$

この関数は、スケール変換 $x \rightarrow x e^{n\pi/s_0}$ (n : integer) に関して不変である。これはエフィモフ状態の離散的スケールリング則を導いている。束縛条件、式 2.115（三体パラメータ Λ の定義）を適用すると、無限の数の三体の束縛状態が現れ、

$$|\kappa_n| = \sqrt{\frac{m|E_n|}{\hbar^2}} = \frac{2}{R_0} \exp \left(-\frac{n\pi}{s_0} \right) \exp \left(\frac{1}{s_0} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{\Lambda R_0 - 3/2}{s_0} \right) + \Delta \right] \right) \quad (2.147)$$

となる。 n は任意の整数である。束縛エネルギーは、離散的スケールリング則を満たし、

$$\frac{|E_n|}{|E_{n+1}|} = \exp \left(\frac{2\pi}{s_0} \right) \quad (2.148)$$

となる。以上の議論は resonant limit のみで成り立つが、エフィモフ状態の重要な特徴を表している。

2.4.7 三体パラメータ

前小節の議論により resonant limit での三体の束縛エネルギーは

$$E_n = -(e^{-2\pi/s_0})^{n-n_*} \frac{\hbar^2 \kappa_*^2}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.149)$$

と書ける。 κ_* はある整数 n_* での波数を示す。離散的スケールリング則により、 κ_* が一つ決まれば、無限の数の全ての束縛エネルギーが決定される。従ってその意味で κ_* は三体パラメータ Λ と等価であり、 κ_* も三体パラメータと呼ぶ。

式 2.149 を見ると、 $n \rightarrow -\infty$ とすると束縛エネルギーが負の無限大に発散するという異常な振る舞いを示してしまう。これは 2.4.3 で紹介したトーマス効果に由来するものである。この状況は $R_0 \rightarrow 0$ とすると起きる現象である。二体の有効レンジ r_0 に対して、 $R_0 \gtrsim r_0$ となるはずである。従って基底状態の束縛エネルギーは $\sim \hbar^2/mr_0^2$ となり、その時 $R = R_0$ 、 $\kappa_0 = \kappa_*$ とすれば、

$$E_n = -e^{-2\pi n/s_0} \frac{\hbar^2 \kappa_*^2}{m}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \quad (2.150)$$

$$|\kappa_*| = \frac{2}{R_0} \exp \left(\frac{1}{s_0} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{\Lambda R_0 - 3/2}{s_0} \right) + \Delta \right] \right) \quad (2.151)$$

となり、 κ_* は基底状態のエネルギーを表し、通常はこの定義を用いる。

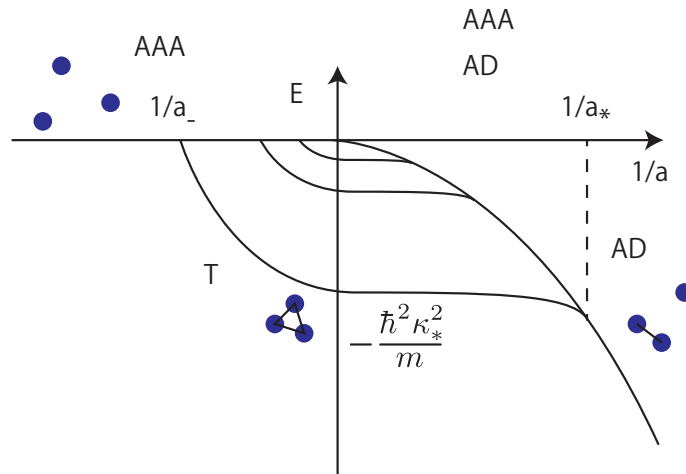


図 2.8: エフィモフ状態の模式図:AAA は三原子状態、AD は原子+分子状態、T は三体束縛状態を示す

resonant limit では無限の三体束縛状態が存在する。これは式 2.143 が R の値に関わらず常に、実数解 s_0 を持ち、 $1/R^2$ に比例する引力相互作用が存在することに由来する。 a が

有限値の時 $s_n(R)$ は R に依存し、 $R \gtrsim |a|$ の時引力相互作用がなくなり、斥力相互作用となる。従って三体束縛状態の数は有限値となり、その数はおおよそ

$$N \sim \frac{s_0}{\pi} \log(\kappa_* |a|) \quad (2.152)$$

となる [27] ことが知られている。これは、resonant limit から離れていくと三体束縛状態が、 $a < 0$ ならば三粒子の自由粒子の状態へと解離していき、 $a > 0$ ならば原子と分子 (shallow dimer: 節 2.4.2) 状態に解離していき、束縛状態の数が減っていくことを示す。resonant limit の周りでのエフィモフ状態の振る舞いを図 2.8 に示す。離散的スケーリング則は、resonant limit から離れても成り立つ。三体の観測量は、以下の変換に関して $\lambda_0 = e^{\pi/s_0}$ のべきで変換される。

$$\kappa_* \rightarrow \kappa_*, \quad a \rightarrow \lambda_0^n a, \quad \mathbf{r} \rightarrow \lambda_0^n \mathbf{r}, \quad t \rightarrow \lambda_0^{2n} t, \quad (2.153)$$

図 2.8 で示す様に、resonant limit 近傍では等比級数の構造が現れる。この構造は三体パラメータ κ_* が決まることによって、一意に決まることになる。従って、 κ_* 以外の構造を決定づけるパラメータは三体パラメータとして等価である。図 2.8 で示す様に、基底状態のエフィモフ状態と三粒子状態及び原子・分子状態の交点での散乱長をそれぞれ a_- 、 a_* とよび、これらも三体パラメータと呼ぶ。三体パラメータの間には次の関係がある [43]。

$$a_- \simeq -1.56\kappa_*^{-1}, \quad a_* \simeq 0.0708\kappa_*^{-1} \quad (2.154)$$

2.4.8 エフィモフ状態の観測

エフィモフ状態は冷却原子の系において初めて観測された。観測方法として原子の三体衝突によるロスの観測と、原子・分子の二体衝突によるロスの観測が主にある。以下ではそれについて説明する。

原子の三体衝突によるロス

三体衝突では、三原子が衝突し二原子分子と原子を形成する。その際束縛エネルギーの分だけ運動エネルギーを獲得する為、トラップから外れて原子のロスにつながる。散乱長が負 ($a < 0$) の領域では終状態の分子としては $\hbar^2/mr_0^2$ 程度かそれ以上の束縛エネルギーを持った強く束縛された分子 (deep dimer) のみが存在し、一方散乱長が正 ($a > 0$) の場合は束縛エネルギー $E_D = \hbar^2/ma^2$ の浅く束縛された分子 (shallow dimer) も終状態として存在する。従ってそれらのロスチャンネルへの遷移確率を求めれば、三体衝突がどの程度起きるかが分かる。

三体衝突の頻度は同一原子の場合、一般に以下の式に現れる三体ロス係数 L_3 で表される。

$$\left(\frac{d}{dt} n_A \right)_{\text{Three-body}} = -3L_3 n_A^3 \quad (2.155)$$

n_A は原子の密度である。式で表されるように三体衝突による原子のロスは密度の 3 乗に比例し、同時に 3 個の原子がロスすることになる。その比例係数のことを三体ロス係数

L_3 と呼ぶ。本論文では原子の統計性は三体ロス係数に含まれているものとする。従ってボソンの同一原子の場合、縮退状態の原子集団と熱的原子集団では、因子6だけ三体ロス係数が異なることになる。以下三体衝突係数が共鳴近傍で即ちエフィモフ状態が存在する領域でどのように振る舞うか考える。

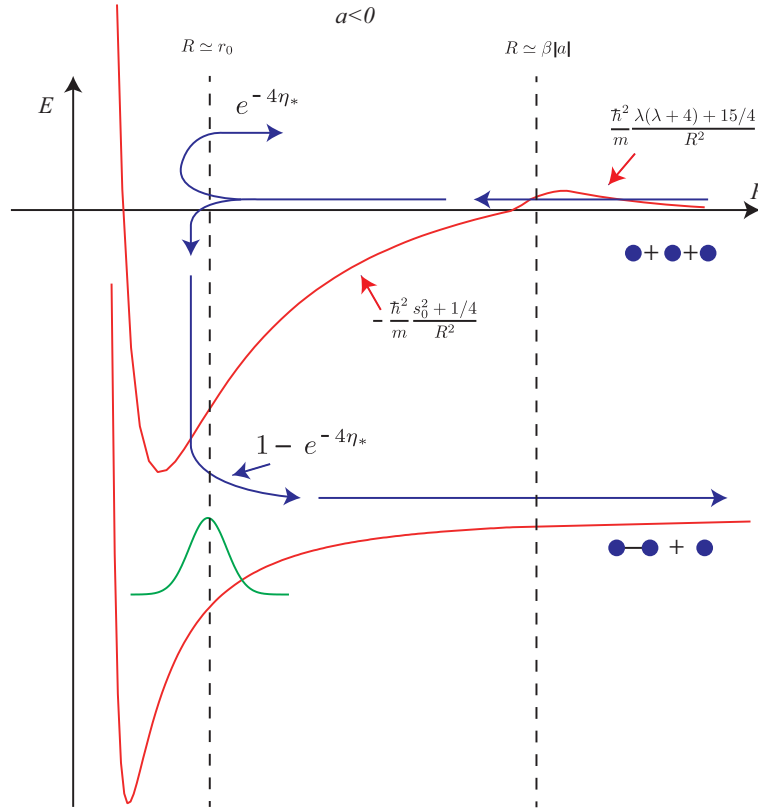


図 2.9: 三体衝突の模式図（散乱長負）

$a < 0$ の時の三体衝突の様子を図 2.9 に示す。 $a < 0$ では終状態は deep dimer のみである。まず充分遠方にある原子は $R \sim |a|$ 程度のところで、斥力ポテンシャル

$$\frac{\hbar^2 \lambda(\lambda+4) + 15/4}{m R^2} \quad (2.156)$$

にぶつかる。 λ は角運動量の固有値である。ボソンの同一原子の場合 $\lambda = 0$ の最低角運動量状態 $\lambda = 0$ は、ほとんどトンネルする [88]。その後、 $r_0 < R < a$ の領域では普遍的な引力ポテンシャル、

$$-\frac{\hbar^2 s_0^2 + 1/4}{m R^2} \quad (2.157)$$

に接続する。ポテンシャルが $1/R^2$ に比例する領域では、hyper-radius の波動関数はベッセル関数で表される。その後 $R \simeq r_0$ の領域は非普遍的なポテンシャルが存在する。ここで強い斥力ポテンシャルがあり、原子は跳ね返されることになるが、その時一部は deep dimer へと緩和する。 $R \sim r_0$ 付近での波動関数の振幅が始状態と終状態にどれだけあるかが緩和の頻度を決めることになるが、実際大きな振幅が $R \sim r_0$ の短距離の領域に存在することが知られている [89]。この緩和の頻度は短距離ポテンシャルの詳細を含んでいる為、厳密

に解くのは難しいが、これをパラメータ η_* で表すことで、三体衝突係数を計算することができる [43]。 η_* は三体衝突の短距離ポテンシャルの詳細を集約しているという意味で、三体パラメータに類するものである。しかしこれはその他の三体パラメータ (κ_{ast}, a_*, a_-) とは別に決定されるものであるため、他とは区別し η_* を非弾性パラメータと呼ぶ。非弾性パラメータを用いて、そのまま三原子状態に跳ね返ってくる割合を $e^{-4\eta_*}$ で表す。即ち緩和の割合は $1 - e^{\eta_*}$ となる。

ボソンの同一原子の $a < 0$ での三体ロス係数は結局

$$L_3 = \frac{4590 \sinh(2\eta_*)}{\sin^2[s_0 \ln(a/a_-)] + \sinh^2 \eta_*} \frac{\hbar a^4}{m} \quad (a < 0) \quad (2.158)$$

となる [43]。三体ロス係数の散乱長依存性を図 2.10 に示した (後述)。式 2.158 を見れば分かる様に三体ロス係数は大きな傾向としては、散乱長 a の 4 乗に比例する。そして、分母に、 $\sin^2[s_0 \ln(a/a_-)]$ の項があることにより、 $a = a_-$ において共鳴的にロス係数が増大することが分かる。対数の依存性により $a_-^{(n)} = e^{n\pi/s_0} a_- \simeq 22.7^n a_-$ の散乱長において共鳴を観測できる。即ちエフィモフ状態と三原子状態の交点での共鳴を観測することで、エフィモフ状態の存在を直接的に確認することができる。 η_* は共鳴の鋭さを決定する。実験により a_- 、 η_* を決定することが重要となる。

同様に $a > 0$ での三体ロス係数の振る舞いについても知られている。 $a > 0$ では、緩和先が shallow dimer と deep dimer の二つがあるが、それぞれの三体ロス係数は、

$$L_3^{\text{shallow}} = \frac{128\pi^2(4\pi - 3\sqrt{3})(\cos^2[s_0 \ln(a\kappa_*) + \gamma] + \sinh^2 \eta_*)}{\sinh^2(\pi s_0 + \eta_*) + \sin^2[s_0 \ln(a\kappa_*) + \gamma]} \frac{\hbar a^4}{m} \quad (2.159)$$

$$L_3^{\text{deep}} = \frac{128\pi^2(4\pi - 3\sqrt{3})\cosh(\pi s_0)\cosh \eta_* \sinh \eta_*}{\sinh(\pi s_0)(\sinh^2(\pi s_0 + \eta_*) + \sin^2[s_0 \ln(a\kappa_*) + \gamma])} \frac{\hbar a^4}{m} \quad (2.160)$$

となり、 γ は定数である [43]。通常三体パラメータとして a_+ を定義して、

$$s_0 \ln(a\kappa_*) + \gamma = s_0 \ln(a/a_+) \quad (2.161)$$

を満たすようにする。すると $L_3(a > 0) = L_3^{\text{shallow}} + L_3^{\text{deep}}$ より、

$$L_3 = C_{\max} \left(\frac{\sinh^2(\pi s_0)(\cos^2[s_0 \ln(a/a_+)] + \sinh^2 \eta_*)}{\sinh^2(\pi s_0 + \eta_*) + \sin^2[s_0 \ln(a/a_+)]} + \frac{\cosh(\pi s_0) \sinh(\pi s_0) \cosh \eta_* \sinh \eta_*}{\sinh^2(\pi s_0 + \eta_*) + \sin^2[s_0 \ln(a/a_+)]} \right) \frac{\hbar a^4}{m} \quad (2.162)$$

$$C_{\max} = \frac{128\pi^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{\sinh^2(\pi s_0)}, \quad a > 0 \quad (2.163)$$

となる [43] (図 2.10)。これは大まかな傾向としては a^4 に比例し、 $a < 0$ と等しい振る舞いを示すが $a < 0$ と違い、 a_+ において極小値をとる関数になる。 $a_+ \simeq 0.32\kappa_*^{-1}$ となり [43]、 a_*^n と a_*^{n+1} の間に a_+^n が存在する。関係式 2.154 より、

$$a_-^{(n)} \simeq -4.9a_+^{(n)}, \quad a_-^{(n)} \simeq -22a_*^{(n)} \quad (2.164)$$

の関係が成り立つ。 η_* は $a < 0$ と同様に共鳴の鋭さを示す。

原子・分子の二体衝突によるロス

フェッシュバッチ共鳴を用いることにより、原子から浅く束縛された分子である、shallow dimer 状態を作ることができる。shallow dimer と原子が衝突して、deep dimer と原子になると、束縛エネルギーの差の分だけ運動エネルギーを獲得し、これもトラップからのロスとして検出できる。二体衝突によるロスの頻度は二体ロス係数 β_{AD} を用いて、

$$\frac{d}{dt}n_A = \frac{d}{dt}n_D = -\beta_{AD}n_A n_D \quad (2.165)$$

と書ける。二体ロス係数もエフィモフ状態と関係があり、

$$\beta_{AD} = \frac{20.3 \sinh(2\eta_*)}{\sin^2[s_0 \ln(a/a_*)] + \sinh^2 \eta_*} \frac{\hbar a}{m} \quad (2.166)$$

と三体パラメータを用いて書ける [43] (図 2.10)。大まかな傾向としては a に比例し、散乱長が $a_*^{(n)} = e^{n\pi/s_0} a_*$ において共鳴的に係数が増大する。二体係数の測定は実験的には a_* を直接観測する手段として有用である。なぜなら $a > 0$ において三体ロス係数の $a_+^{(n)}$ での極小値を実験で検出するのは、極小値付近の三体ロス係数の変化があまり鋭くないため検出が困難であるからある。また a_+ はエフィモフ状態と原子・分子状態の交点そのものではないため、より直接的な検出として二体ロス係数の測定は有用である。

エフィモフ状態と三体・二体ロス係数の関係

エフィモフ状態と三体・二体ロス係数の関係を図 2.10 に示した。図 2.8 と違って横軸が $\log|a|$ になっていることと、散乱長が負の領域を右側、正の領域を左側に示して（即ち共鳴点に対して図 2.8 と比べて左右反転している）ことに注意する。図に示す様に三体ロス係数・二体ロス係数にエフィモフ状態の構造即ち三体パラメータの値が反映される為、実験によってこれを検出することが可能である。

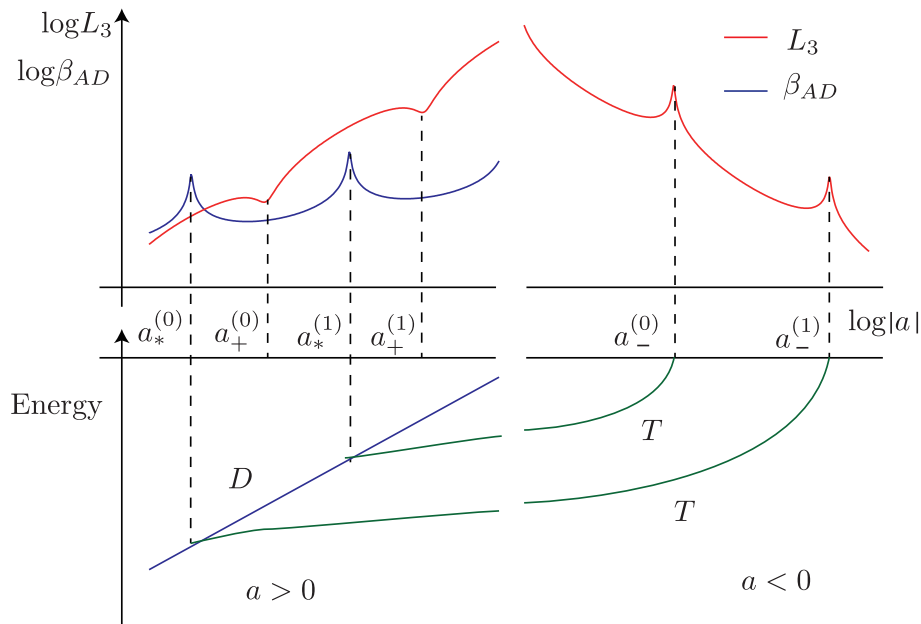


図 2.10: 三体ロス係数・二体ロス係数とエフィモフ状態の関係

第3章 極低温のボース粒子気体

本章では、極低温のボース粒子気体の振る舞いについて述べる。特にボース粒子気体が調和トラップ中や光格子ポテンシャル中でどのように分布するか述べる。本研究で対象としている異核原子の混合気体の場合、粒子の分布は単一粒子の場合と比べてより複雑になる為、それについて議論する。なおここでの議論は文献 [50, 90] を参考にしている。

3.1 単一原子気体の密度分布

3.1.1 グロス・ピタエフスキー方程式

外部ポテンシャル $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ に閉じ込められた N 個のボース粒子の系を考える。粒子間の相互作用は密度が十分低い時、二体衝突が支配的であり、その相互作用ポテンシャルは散乱長 a を用いて $U(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = 2\pi\hbar^2 a/m_r \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ と書けることは前章において示された通りである ($|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \gg r_0$)。系の温度 T が十分小さく、熱的ドブロイ長 $\lambda_{\text{dB}} = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ が平均原子間距離を超えるようになるとボース粒子はボース凝縮 (BEC) を起こすようになる。完全な BEC では、全ての粒子は同一の一粒子状態 $\phi(\mathbf{r})$ にある。従って N 粒子系の波動関数は

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \quad (3.1)$$

$\phi(\mathbf{r}_i)$ は規格化条件

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (3.2)$$

を満たす。状態 3.1 のエネルギーは、

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{m_r} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (3.3)$$

で与えられる。尚 $U_0 = 2\pi\hbar^2 a/m_r$ と置いた。ここで凝縮状態の波動関数を導入する。

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \phi(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

とする。粒子の密度は、

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad (3.5)$$

で得られる。1/ N のオーダーを無視して式 3.3 は、

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{m_r} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (3.6)$$

と書き換えられる。これを粒子数一定の条件の下、変分法によりエネルギーを最小化する。即ち $E - \mu$ (μ は化学ポテンシャル) を変分してゼロとおくと。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m_r} \Delta + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

を得る。これが時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式 (GP 方程式) である。これは運動エネルギー項、トラップポテンシャル項、相互作用項の三つの項からなる。

3.1.2 トラップ中のボース粒子気体の基底状態

式 3.7 の解を定性的に考える。トラップは等方的な調和トラップ $V_{\text{trap}} = m\omega_0^2 r^2/2$ を考える。まず相互作用がない場合を考える。気体の空間的広がりを $\sim R$ とする。するとトラップのエネルギーは大体 $m\omega_0^2 R^2/2$ 程度である。運動エネルギーは不確定性関係から大体 $\hbar^2/mR^2$ 程度になる。両者が一致するときがエネルギーが最小になるのでその時の半径は、

$$a_{\text{osc}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad (3.8)$$

となる。これを調和振動子長と呼び、調和振動子の特徴的な長さである。

次に相互作用がある場合を考える。粒子密度がおおよそ $N \sim N/R^3$ である為相互作用エネルギーは $U_0 N/R^3$ 程度になる。斥力相互作用の場合は R^{-3} の依存性により、半径 R を増大させる効果を持つ。 Na が大きくなると、運動エネルギーの寄与はほとんど効かなくなっていき、トラップポテンシャルと相互作用のみで決まる様になる。この時の半径 R は

$$R \sim a_{\text{osc}} \left(\frac{Na}{a_{\text{osc}}} \right)^{1/5} \quad (3.9)$$

程度になる。即ち $(Na/a_{\text{osc}})^{1/5}$ 程度相互作用により広がることになる。

引力相互作用を考える。引力の場合は短距離で相互作用が負に発散する為、基本的には不安定である。原子数が少量であれば a_{osc} より小さいところに準安定状態を持つが、粒子数が多くなると崩壊する。準安定に存在できる原子数は

$$N_c = k \frac{a_{\text{osc}}}{|a|} \quad (3.10)$$

で表されることが知られている [91, 92, 93]。 k は安定定数と呼ばれ、JILA のグループの実験では 0.46 である [92]。これはトラップ形状に強く依存することが知られている [94]。

3.1.3 トーマス・フェルミ近似

斥力相互作用を持つ充分大きな気体に対しては、GP 方程式の運動エネルギー項を無視することができる。この近似の事をトーマス・フェルミ近似と呼ぶ。トーマス・フェルミ近似の下で式 3.7 を書き換えると、

$$[V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

となる。従って右辺が正の領域で、解は

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = [\mu - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})]/U_0 \quad (3.12)$$

となる。気体の境界は、

$$\mu = V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

で与えられ、領域外では $\psi = 0$ である。気体の密度分布は式 3.12 を規格化条件、

$$\int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N \quad (3.14)$$

を満たす様に解くことで得られる。

調和ポテンシャル中の BEC の密度分布

トラップポテンシャルが

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (3.15)$$

で表される非等方調和ポテンシャルの時の BEC の密度分布を考える。m は粒子の質量である。 $m_r = m/2$ となる。各軸上の気体の境界は半径 R_i で表され、

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} \quad (3.16)$$

となる。これをトーマス・フェルミ半径と呼ぶ。 μ の具体的な表式は、規格化条件を解くことにより得られる。従って密度積分を実行する。

$$\begin{aligned} \int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \int \frac{\mu - V_{\text{trap}}(\mathbf{r})}{U_0} d\mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{U_0} \int \left[1 - \left(\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{z^2}{R_z^2} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (3.17)$$

変数変換 $X = x/R_x, Y = y/R_y, Z = z/R_z$ を行い。次いで $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$ を満たす様に極座標変換を行うと、簡便に積分が実行できる。

$$\begin{aligned} \int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \frac{\mu}{U_0} R_x R_y R_z \int [1 - (X^2 + Y^2 + Z^2)] dX dY dZ \\ &= \frac{\mu}{U_0} R_x R_y R_z \int_{R^2 \leq 1} [1 - R^2] R^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{8\pi}{15} \frac{\mu}{U_0} R_x R_y R_z \end{aligned} \quad (3.18)$$

これが全原子数 N に一致するので、

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na}{\bar{a}_{\text{osc}}} \right)^{2/5} \hbar \bar{\omega} \quad (3.19)$$

となる。ここで $\bar{\omega}$ は平均トラップ周波数、 $\bar{a}_{\text{osc}}$ は平均調和振動子長で、

$$\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \quad (3.20)$$

$$\bar{a}_{\text{osc}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}} \quad (3.21)$$

で定義される。化学ポテンシャル μ が分かったので、原子の密度分布は、

$$n(\mathbf{r}) = n_{\text{peak}} \left[1 - \left(\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{z^2}{R_z^2} \right) \right] \quad (3.22)$$

$$n_{\text{peak}} = \frac{\mu}{U_0} \quad (3.23)$$

と調和型の分布になることが分かる。 n_{peak} は気体のピーク密度である。

熱的原子集団

原子気体の温度が転移温度より高い時は、粒子はマクスウェル・ボルツマン分布に従う。従って調和振動子中の密度分布は、

$$n(\mathbf{r})_{\text{Thermal}} = N \omega_x \omega_y \omega_z \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\beta \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \right] \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right) \right] \quad (3.25)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega_i^2}} \quad (3.26)$$

$$n_{\text{peak}} = N \omega_x \omega_y \omega_z \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} \quad (3.27)$$

となる。幅 σ_i を測ることでトラップ周波数を知っていれば、温度を測定できる。

3.2 ボース凝縮体の混合系

粒子が熱的原子集団であれば、混合原子気体であっても粒子間の相互作用の影響は殆ど無視できる為、単一の場合と同じ分布をとると考えても特に問題はない。また分布は広く広がっている為、空間的に原子気体を重ねるのは容易である。しかし BEC の混合系の場合粒子間の相互作用の影響を受けて劇的に分布が変わる為、混合系の問題を解かなければならない。以下では二種の原子からなる BEC の混合系について述べる。

3.3 二原子種グロス・ピタエフスキー方程式

二原子種の BEC の密度分布を調べるには以下の二原子種の GP 方程式を考える必要がある。尚トーマス・フェルミ近似を適用し、運動エネルギーは無視する。

$$\left[V_1(\mathbf{r}) + U_{11}|\psi_1(\mathbf{r})|^2 + U_{12}|\psi_2(\mathbf{r})|^2 \right] \psi_1(\mathbf{r}) = \mu_1 \psi_1(\mathbf{r}) \quad (3.28)$$

$$\left[V_2(\mathbf{r}) + U_{22}|\psi_2(\mathbf{r})|^2 + U_{12}|\psi_1(\mathbf{r})|^2 \right] \psi_2(\mathbf{r}) = \mu_2 \psi_2(\mathbf{r}) \quad (3.29)$$

これが時間に依存しない二原子種の GP 方程式になる。 μ_i は粒子 i の化学ポテンシャル、 V_i は粒子 i が感じるトラップポテンシャルである。また、相互作用項 U_{ij} は、

$$U_{ij} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{ij}} a_{ij} \quad (3.30)$$

であり、 m_{ij} は粒子 i と j の換算質量、 a_{ij} は粒子 i と j の間の散乱長である。

式 3.28 より、二成分の密度は $n_i(\mathbf{r}) = |\psi_i(\mathbf{r})|^2$ であり、

$$\mu_1 = V_1 + U_{11}n_1 + U_{12}n_2 \quad (3.31)$$

$$\mu_2 = V_2 + U_{22}n_2 + U_{12}n_1 \quad (3.32)$$

となる。

3.3.1 混合 BEC の安定性

まず一様気体を考える ($V_1 = V_2 = 0$)。系の安定条件は密度の変化によるエネルギーの変化を考えれば良い。その条件は、

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial n_1} > 0, \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial n_2} > 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial n_1} \frac{\partial \mu_2}{\partial n_2} - \frac{\partial \mu_1}{\partial n_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial n_1} > 0 \quad (3.34)$$

となる。これは結局

$$U_{11} > 0, \quad U_{22} > 0 \quad (3.35)$$

$$U_{11}U_{22} > U_{12}^2 \quad (3.36)$$

となる。我々が用いる $^{41}\text{K}|F=1|m_F=1\rangle$ - $^{87}\text{Rb}|F=1|m_F=1\rangle$ の混合系の場合、同一原子間の散乱長は正でそれぞれ $a_{\text{KK}} = 60 a_0$ 、 $a_{\text{RbRb}} = 100 a_0$ (表 2.2) であるので式 3.35 を満たしており、単体で安定である。従って混合状態が安定かどうかは相互の散乱長 a_{KRb} によって決まる。これはフェッシュバハ共鳴を用いることにより調整可能である。質量比 41 : 87 及び散乱長の比から、安定条件は決まり、相互の散乱長により次の様に場合分けできる。

$$75 a_0 < a_{\text{KRb}} \quad (\text{immiscible}) \quad (3.37)$$

$$-75 a_0 < a_{\text{KRb}} \leq 75 a_0 \quad (\text{miscible}) \quad (3.38)$$

$$a_{\text{KRb}} \leq 75 a_0 \quad (\text{collapse}) \quad (3.39)$$

境界条件は $|a_{\text{KRb}}| = 75 a_0$ であり、miscible は混合状態、immiscible は分離状態、collapse は引力相互作用による崩壊を示す。

3.3.2 調和ポテンシャル中の混合 BEC の密度分布

次に調和ポテンシャル中での混合 BEC の密度分布を考える。興味があるのは、式 3.38 の混合状態である。K を原子種 1、Rb を原子種 2 と考えて議論を続ける。トラップは等方の調和トラップを考える。即ち $V_i(r) = m_i \omega_i^2 r^2$ とする。式 3.31 より、密度分布は共存領域では、

$$n_1 = \frac{\mu_1}{U_{11}} \frac{1}{1 - U_{12}^2/U_{11}U_{22}} \left[1 - \frac{U_{12}}{U_{22}} \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{r^2}{R_1^2} \left(1 - \frac{\xi U_{12}}{U_{22}} \right) \right] \quad (3.40)$$

$$n_2 = \frac{\mu_2}{U_{22}} \frac{1}{1 - U_{12}^2/U_{11}U_{22}} \left[1 - \frac{U_{12}}{U_{11}} \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{r^2}{R_2^2} \left(1 - \frac{U_{12}}{\xi U_{11}} \right) \right] \quad (3.41)$$

となり、非共存領域では

$$n_1 = \frac{\mu_1}{U_{11}} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) \quad (3.42)$$

$$n_2 = \frac{\mu_2}{U_{22}} \left(1 - \frac{r^2}{R_2^2} \right) \quad (3.43)$$

となる。これを規格化条件

$$N_1 = \int n_1 dr \quad (3.44)$$

$$N_2 = \int n_2 dr \quad (3.45)$$

を満たす様に解くと μ_1 、 μ_2 の値が分かり、密度分布が分かる。ここで ξ は、

$$\xi = \frac{m_2 \omega_2^2}{m_1 \omega_1^2} = \frac{m_{\text{Rb}} \omega_{\text{Rb}}^2}{m_{\text{K}} \omega_{\text{K}}^2} = \begin{cases} 1.96 & \text{for } \lambda = 809 \text{ nm} \\ 1.08 & \text{for } \lambda = 1080 \text{ nm} \end{cases} \quad (3.46a)$$

$$(3.46b)$$

の様に粒子 1 と粒子 2 が感じるポテンシャルの広がりを示す。我々の用いている光トラップは波長 809 nm 及び波長 1080 nm であり（次章にて説明）、K（粒子 1）と Rb（粒子 2）の共鳴線の波長と質量から式 3.46a、3.46b の様に決まる。二つの粒子気体は条件によって、共存領域と非共存領域に分かれることになるが、 ξ はどちらの粒子が外側に分布するかに関わってくる。節 3.1.2 の議論の様に、単一の原子からなる BEC に対して気体の半径を R 程度と考えるとトラップポテンシャルは $m\omega^2 R^2/2$ 程度、相互作用エネルギーは

$4\pi\hbar^2 N/mR^3$ 程度になる。従って、異なる粒子間の相互作用を無視すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_{\text{Rb}}}{R_{\text{K}}}\right)^5 &\sim \frac{\frac{N_{\text{Rb}} a_{\text{Rb}}}{m_{\text{Rb}}} \frac{1}{m_{\text{Rb}} \omega_{\text{Rb}}^2}}{\frac{N_{\text{K}} a_{\text{K}}}{m_{\text{K}}} \frac{1}{m_{\text{K}} \omega_{\text{K}}^2}} \\ &\sim 0.79 \frac{1}{\xi} \frac{N_{\text{Rb}}}{N_{\text{K}}} \\ &= \eta \frac{N_{\text{Rb}}}{N_{\text{K}}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\eta = \begin{cases} 0.40 & \text{for } \lambda = 809 \text{ nm} \\ 0.73 & \text{for } \lambda = 1080 \text{ nm} \end{cases} \quad (3.48a)$$

$$(3.48b)$$

となる。即ち我々の **K-Rb** の組み合わせでは原子数が等しい時は、**K** が外側に分布しやすい、**Rb** が内側に分布しやすい。特に波長が 809 nm の光トラップでそれは顕著である。ただし、**Rb** の原子数の方が多かったり、また非等方なトラップを使用している場合 **Rb** が外側に分布することがあり、実際に当研究室の修士論文でそれは観測されている [95]。

しかしほとんどの場合 **K** が外側に現れる為、図 3.1 の I, II の様な解の形を考えれば良い。

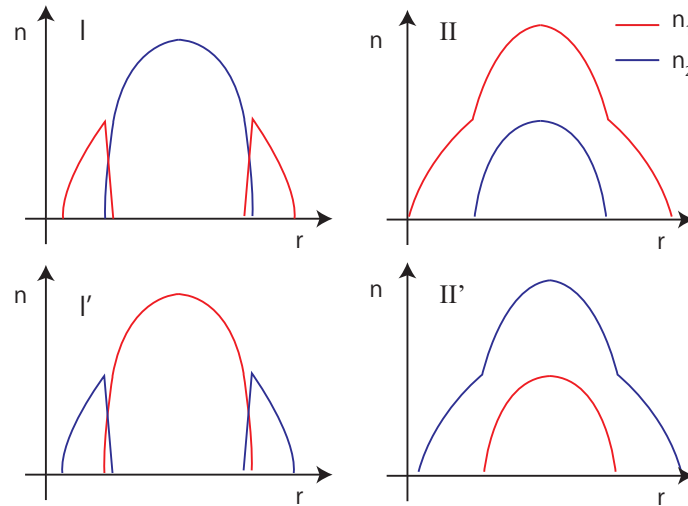


図 3.1: 混合 BEC の分布の様子

実際にどの程度の原子が共存領域に存在するか計算してみる。 $N_{\text{Rb}} = N_{\text{K}} = 4 \times 10^4$ 、 $(\omega_{\text{K}}, \omega_{\text{Rb}}) = (427, 383) \text{ (1/s)}$ の時の共存領域に存在する原子の割合を相互散乱長 a_{KRb} の値毎に計算すると図 3.2 の様になる。

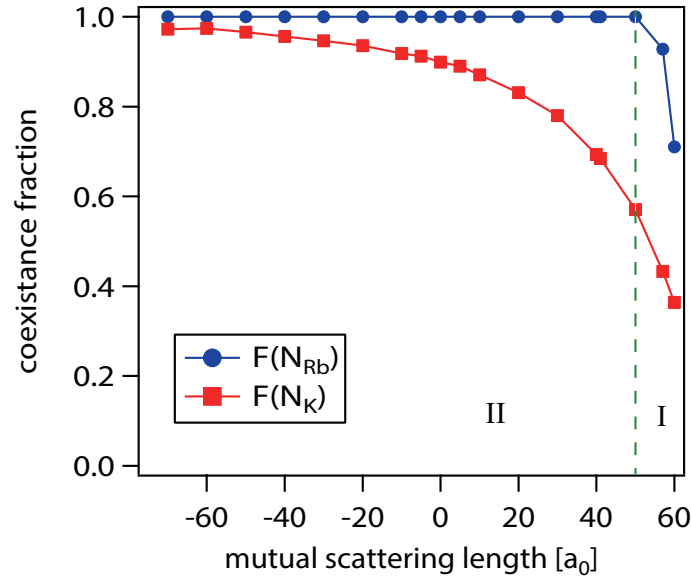


図 3.2: 共存領域に存在する原子の割合

図 3.2 の様に散乱長が正の値から、負の値に変化していくにつれて共存領域の原子が増えていくことが分かる。散乱長 $a_{\text{KRb}} = 0 \text{ a}_0$ 付近で 90 % 以上の原子が共存領域に存在し、十分二つの BEC は重なっていると言える。

3.4 光格子中のボース粒子の振る舞い

光を打ち返して、定在波を立てることによって周期ポテンシャルが形成される。これを光格子と呼ぶ。光格子を用いて各サイトに原子や分子を一つずつ導入することで、原子や分子の衝突の制御ができ有用である。本節では、まず光格子について簡単に説明した後、光格子中のボース粒子の振る舞いについて述べる。

3.4.1 光格子

一次元光格子

もっとも簡単な周期ポテンシャルの作り方は、ガウシアンビームを打ち返す事によって干渉させ、定在波をたてることである。この時のポテンシャルは以下ようになる。

$$V(r, z) = -V_{\text{lat}} e^{-2r^2/w_0^2} \cdot \sin^2(kz) \simeq -V_{\text{lat}} \cdot \left(1 - 2 \frac{r^2}{w_0^2} \cdot \sin^2(kz)\right) \quad (3.49)$$

中心付近では調和ポテンシャル近似が成り立つ。ここで $k = 2\pi/\lambda$ である。 V_{lat} は光格子のポテンシャル深さである。これは、光トラップの時の 4 倍になる。光格子の深さは、リコイルエネルギー $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$ を単位に表わすと便利である。

三次元光格子

三次元光格子は三つの定在波を直交させることで形成できる。この際互いに偏光を直交させ、波長をずらすことで干渉させないようにする。トラップポテンシャルは以下の様になる。

$$V(x, y, z) = -V_x \cdot e^{-2\frac{y^2+z^2}{w_x^2}} \cdot \sin^2(kx) - V_y \cdot e^{-2\frac{z^2+x^2}{w_y^2}} \cdot \sin^2(ky) - V_z \cdot e^{-2\frac{z^2+x^2}{w_z^2}} \cdot \sin^2(kz) \quad (3.50)$$

ここで V_x, V_y, V_z は一次元光格子の時のポテンシャル深さである。中心付近（ビーム半径よりも十分小さい範囲）では、ポテンシャルは一樣な周期ポテンシャルと調和型の外部コンファインメントで近似できる。

$$V(x, y, z) \simeq V_x \cdot \sin^2(kx) + V_y \cdot \sin^2(ky) + V_z \cdot \sin^2(kz) + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (3.51)$$

ここで、外部コンファインメントのトラップ周波数 ω_i ($i = x, y, z$) は以下の式で与えられる。

$$\omega_x^2 = \frac{4}{m} \left(\frac{V_y}{\omega_y^2} + \frac{V_z}{\omega_z^2} \right) = \frac{2\hbar^2 k^2}{m^2} \left(\frac{V_y/E_r}{\omega_y^2} + \frac{V_z/E_r}{\omega_z^2} \right) : \omega_{y,z} = (\text{cycl.perm.}). \quad (3.52)$$

全ての軸のビームウェスト及びポテンシャル深さが等しい時は、

$$\omega_{ext} = \sqrt{2 \cdot \frac{4V_{lat}}{mw_0^2}} = \sqrt{2 \cdot \frac{2\hbar^2 k^2}{m^2 w_0^2} \frac{V_{lat}}{E_r}} \quad (3.53)$$

となる。

光格子の深さが十分深い時は、光格子の各サイトは調和ポテンシャルで近似できる。その時の各サイトのトラップ周波数は、

$$\omega_{lat}^2 = V_{lat} \frac{2k^2}{m} = \frac{V_{lat}}{E_r} \frac{\hbar^2 k^2}{m^2} \quad (3.54)$$

となる。

トラップ中心から遠くなるとこれらのトラップ周波数は修正を受ける [96]。

3.4.2 ボース・ハバードモデル

光格子中の原子の振る舞いはボース・ハバードモデルで記述することができる [97]。

光格子ポテンシャルの空間不均一性まで含めたモデルで考えると、ハミルトニアンは以下の様に書ける [98]。

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \sum_i [V(r_i) - \mu] \hat{n}_i + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \quad (3.55)$$

ここで、 $\hat{a}_i^\dagger (\hat{a}_i)$ は i サイトへの生成（消滅）演算子、 $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ は i サイトでの個数演算子、 $V(r_i)$ は光格子の外部コンファインメントによるサイト i でのエネルギーオフセット、 μ は化学ポテンシャルである。

ここでハミルトニアン第1項はサイト間のトンネリングを表わす項であり、トンネリングの強さを表わす行列要素 J はサイト i に極在した一粒子ワニエ関数 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ を用いて、

$$J = \int d^3x w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\mathbf{x}) \right] w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (3.56)$$

と書ける。一方第3項は、同一サイトにある粒子間のオンサイト相互作用を表わし、その強さ U は

$$U = \frac{2\pi a_s \hbar^2}{m_r} \int d^3x |w(\mathbf{x})|^4 \quad (3.57)$$

と書ける。 a_s は散乱長である。以上の様に J 及び U はワニエ関数をバンド計算により求めることによって得られるが、通常は以下の近似式 [99] で十分である。

$$\frac{J}{E_r} \simeq 1.43 \left(\frac{V_{lat}}{E_r} \right)^{0.98} \exp \left(-2.07 \sqrt{\frac{V_{lat}}{E_r}} \right) \quad (3.58)$$

$$\frac{U}{E_r} \simeq 5.97 \left(\frac{a_s}{\lambda_{lat}} \right) \left(\frac{V_{lat}}{E_r} \right)^{0.88} \quad (3.59)$$

上式は、 $V_{lat}/E_r = 8 \sim 30$ の間で誤差が1%以下となる近似式である。

相転移点

ボーズ・ハバードモデルにおいてトンネリングの項が支配的な場合 ($J \gg U$)、原子はサイト間に渡って非局在化した超流動状態になり、オンサイト相互作用が支配的な場合 ($J \ll U$)、原子は各サイトに局在化した Mott 絶縁体状態となる。これが、超流動-Mott 絶縁体転移と呼ばれるもので光格子の系で実現できることが予測され [97]、実際に観測された [9]。超流動-Mott 絶縁体転移の転移点は J と U の比が以下を満たす点である [99, 100]。

$$\frac{U}{zJ} = 2n_0 + 1 + 2\sqrt{n_0(n_0 + 1)} \quad (3.60)$$

ここで、 z は最近接サイト数で、 n_0 は Mott 絶縁体状態における各サイトの粒子数である。式 3.58、3.59、3.60 から光格子のビームの波長が 1080 nm の時の相転移点での光格子のポテンシャル深さは $V_{lat}/E_r = 14(^{87}\text{Rb}), 16(^{41}\text{K})$ となる [101]。

3.4.3 Mott 絶縁体状態での Shell 構造

光格子のポテンシャルが外部コンファインメントによる不均一性を持つ為に、光格子中での原子の分布は、光格子の深さに応じて n 個/サイトの Mott 絶縁体状態が共存した Shell 構造をとることが知られている [98, 102, 103, 104]。

実際の粒子数の分布を求めるには、節 3.1.3 の議論と同様に、式 3.55 から運動エネルギーを無視して、

$$E_n = -\tilde{\mu}n + \frac{U}{2}n(n-1) \quad (3.61)$$

ここで $\tilde{\mu} \equiv \mu - V(r_i)$ は局所的な化学ポテンシャルである。エネルギー最小化条件は一時的に n が連続数であると思うと、 $\partial E_n / \partial n = 0$ より、

$$-\tilde{\mu} + \frac{U}{2}(2n-1) = 0 \quad (3.62)$$

となる。これより n は整数であるので、最小化条件は

$$n-1 < \frac{\tilde{\mu}}{U} \leq n \quad (3.63)$$

となる。 $\tilde{\mu}/U$ が整数値を超えるたびに粒子数が1ずつ増えることが分かる。外部コンファインメントが $V(r) = m\omega^2 r^2/2$ の調和振動子の場合、粒子数が n 個のサイトの半径は、

$$R_n = R_0[1 - n/(\mu/U)]^{1/2} \quad (3.64)$$

$$R_0 = \left(\frac{2\mu}{m\omega^2} \right)^{1/2} \quad (3.65)$$

となる。ここから規格化条件、

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{d^3} \int n(r) d^3r \\ &= \frac{4\pi}{3d^3} (R_0^3 + R_1^3 + R_2^3 + \dots) \\ &= \frac{4\pi}{3d^3} \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{2(\mu - nU)}{m\omega^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

が得られる [98]。 $d = \lambda/2$ はサイト間隔である。から化学ポテンシャル μ を求めれば実際の分布が分かる。

上記の方法は、モット絶縁体状態を仮定して基底状態の分布を求める方法である。一方トーマス・フェルミ近似から、即ち超流動状態を仮定して密度分布を求めると、

$$n_{TF}(r) = \frac{1}{U} \left(\mu - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \right) \quad (3.67)$$

となるので、規格化条件は

$$N = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \frac{\mu_{TF}^{5/2}}{d^3 U (m\omega^2)^{3/2}} \quad (3.68)$$

となる [9]。

光格子を立ち上げていくと徐々に式 3.68 から式 3.66 の条件に移り変わっていくと思われる。Mott 絶縁体になった以降は粒子数の分布はトンネリングが抑制される為、ほとんど変わらないと思われる。従って転移点での式 3.66 の条件をモット絶縁体の粒子数分布を決める式であると考え。本研究では、粒子数が一つのサイトを最大化することが重要である。粒子数が一つのサイトの最大個数 N_2 は、 $\mu/U = 1$ の時の原子数から得られる。

光格子の外部コンファインメントが非等方な時も同様の議論が成り立つので、平均トラップ周波数 $\bar{\omega}_{ext} = (\omega_{ext,x} \cdot \omega_{ext,y} \cdot \omega_{ext,z})^{1/3}$ を用いて

$$N_2 = \frac{4\pi}{3d^3} \left(\frac{2U}{m\bar{\omega}_{ext}^2} \right)^{3/2} \quad (3.69)$$

となる [98]。この数よりも大きい原子数を導入しても、2 個以上のサイトが増えてしまい実験に使用できる原子数は逆に減少する。 N_2 を最大化すると同時に、適切な数に原子数を制御することが重要である。

3.4.4 混合系の場合

混合系の場合は、節 3.3.2 の議論の様に次の二原子種のボース・ハバードモデルを考える必要がある。ホッピングは無視して、

$$\mathcal{H}_1 = \sum_i [V_1(r_i) - \mu_1] n_{1,i} + \frac{U_{11}}{2} \sum_i n_{1,i}(n_{1,i} - 1) + U_{12} \sum_i n_{1,i} n_{2,i} \quad (3.70)$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_i [V_2(r_i) - \mu_2] n_{2,i} + \frac{U_{22}}{2} \sum_i n_{2,i}(n_{2,i} - 1) + U_{12} \sum_i n_{1,i} n_{2,i} \quad (3.71)$$

となる。二原子が混合する条件は、節 3.3.1 と同様に、

$$U_{11}U_{22} - U_{12}^2 > 0 \quad (3.72)$$

となる。なおオンサイト相互作用は二粒子の場合に拡張して

$$U_{ij} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{ij}} a_{ij} \int w_i(\mathbf{x})^2 w_j(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \quad (3.73)$$

と書ける。ワニエ関数を調和振動子で近似すると、

$$U_{ij} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{ij}} a_{ij} \frac{1}{(a_{osc,i}^2 + a_{osc,j}^2)^{3/2}} \quad (3.74)$$

となる。 $a_{osc,i}$ はそれぞれの原子の調和振動子長である。

n 個サイトのエネルギーは、

$$E_{1,n} = [V_1 - \mu_1] n_1 + \frac{U_{11}}{2} n_1(n_1 - 1) + U_{12} n_1 n_2 \quad (3.75)$$

$$E_{2,n} = [V_2 - \mu_2] n_2 + \frac{U_{22}}{2} n_2(n_2 - 1) + U_{12} n_1 n_2 \quad (3.76)$$

であるから、エネルギー最小化条件は結局

$$n_1 - 1 < \frac{1}{\Delta} \left[U_{22}(\mu_1 - V_1) - U_{12} \left(\mu_2 - V_2 - \frac{U_{12}}{2} (U_{12} - U_{22}) \right) \right] < n_1 \quad (3.77)$$

$$n_2 - 1 < \frac{1}{\Delta} \left[U_{11}(\mu_2 - V_2) - U_{12} \left(\mu_1 - V_1 - \frac{U_{12}}{2} (U_{12} - U_{11}) \right) \right] < n_2 \quad (3.78)$$

となる。この条件から規格化条件を満たす様に μ_1 、 μ_2 を決定することで実際の分布を求めることができる。

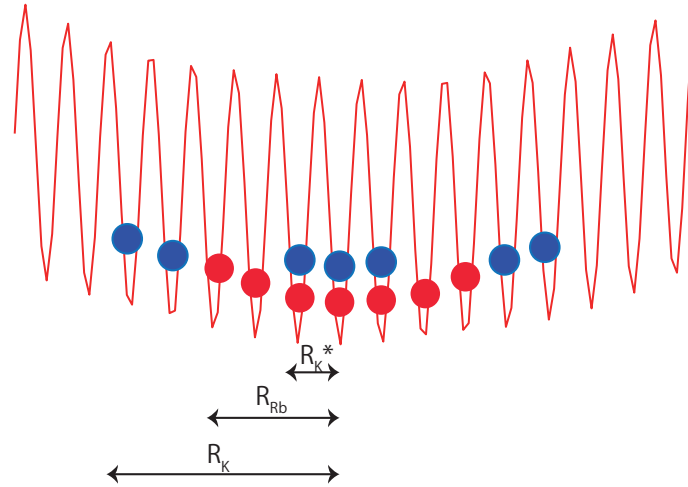
K 1 個-Rb 1 個サイトの最適化

図 3.3: 二原子種のモット絶縁体状態：青は K 原子、赤は Rb 原子を表す。

実用上は K 原子 1 個・Rb 原子 1 個のサイトを最大化することが、分子の生成・衝突の抑制において重要である。式 3.77、3.78 を一般的に解くのは難しいので図 3.3 の様な状況を考える。即ち中心部のサイトに K 原子、Rb 原子が一つずつ存在し、Rb 単体のみのサイトが周辺部に存在し、更に外側に K 原子が存在するといった状況である。実際この状況が出現しやすいのは、調和ポテンシャルの時（節 3.3.2）と同様である。

例えば原子数 $N_K = N_{Rb} = 1 \times 10^4$ 、相互散乱長 $a_{RbK} = 44 a_0$ 、平均トラップ周波数 $(\omega_{Rb}/2\pi, \omega_K/2\pi) = (54, 80)$ Hz の時、1 個サイトの割合は 73 % で充分である。

第4章 実験装置

本章では、原子・分子集団の冷却・トラップ・内部状態の制御に必要な実験装置について述べる。

4.1 実験装置の概要

本研究は極低温の原子を用いた研究である。レーザー冷却によって原子を冷却し、磁気トラップや光トラップの技術を用いれば、原子集団を長時間トラップ中に留めておくことができる。しかし、大気中では多くの原子・分子が常温で飛び回っている為、衝突を介して冷却された原子は加熱され、トラップから外れて行ってしまう。従って、実験は真空槽内で行われる。本研究では ^{41}K 及び ^{87}Rb の二原子種を冷却・トラップし、実験に用いた。

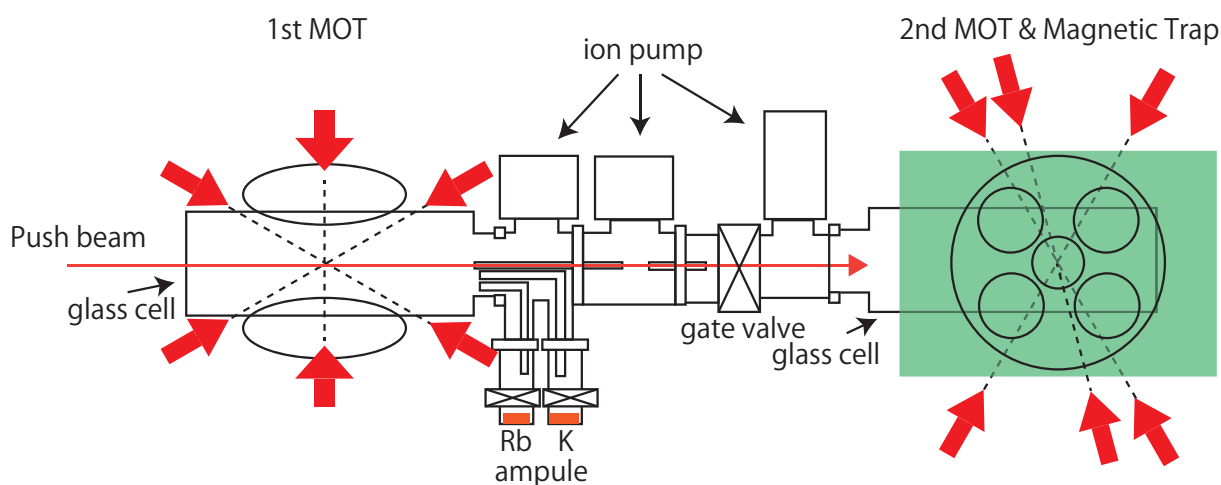


図 4.1: 実験装置の概略図

本節では冷却原子集団を得る為の大まかな流れを示す。図 4.1 に実験装置の概略図を示す。図 4.1 で示す様に本研究では二重磁気光学トラップ (double-MOT) のシステムを用いている。図左側の領域は低真空 ($\sim 10^{-8}$ torr) となっており、Rb 及び K の蒸気が充満している。従って十分な数の原子を集めることが可能である。そこで1段階目の磁気光学トラップ (1st MOT) を行い原子を冷却・捕獲する。その後共鳴から離長をとったレーザーで原子集団を押し出し (push beam)、高真空側 ($\sim 10^{-11}$ torr) へと輸送する。そして右側の高真空側で再び磁気光学トラップ (2nd MOT) で捕獲・冷却する。高真空側ではその他の原子はほとんどいないので長いトラップ寿命 (数 10~100 s) を確保することができ

る。このように二つの磁気光学トラップを用いて原子数を十分に確保しつつ、長寿命な冷却原子集団を用意する手法を二重磁気光学トラップといい、冷却原子の系では標準的な手法である。続いて 2nd MOT に十分原子数が溜まったところで、磁場勾配やレーザー光の離長を時間的に変化させ (Time-dependent MOT) 冷却・圧縮を行った後に、磁気トラップ (Magnetic trap) に移行し、蒸発冷却により更なる冷却・高密度化を行う。蒸発冷却には原子集団の熱化が必要であるので、長い時間 (数 10 s) が必要である。ゆえに高真空が必要となる。このような手法により、縮退もしくは縮退近くまで冷却された原子集団を用意することができる。磁気トラップ中のままでは、原子集団の内部状態の選択や磁場の利用に制約がある為、その後光トラップに移行する。光トラップ中では前記の制約がほとんど無いため、自由に内部状態を選択し、また磁場により状態を制御し、フェッシュバッハ共鳴を利用することができるようになる。本研究で対象とする ^{41}K 及び ^{87}Rb の場合、それぞれの内部状態が $|F=1, m_F=1\rangle$ である時に磁場 38.4 G 及び 78.67 G にフェッシュバッハ共鳴を持つ。内部状態の遷移にはラジオ波 (RF: Radio frequency) を用いる。本研究のほとんどの実験は K-Rb 間のフェッシュバッハ共鳴を用いた実験であるので、それぞれの原子を $|F=1, m_F=1\rangle$ 状態に用意することが実験の開始地点である。次節以降ではこれらの過程についてより詳しく述べる。

4.2 真空槽

実験に用いた真空槽は岸本博士が設計した。図 4.1 に示す様に、二つのガラスセル間をステンレスのチャンバーで接続した形になっている。ガラスセル間を二段階の細い管 (differential pumping tube) で接続することにより、領域間のコンダクタンスを低くし、真空度の差をつけている。詳細な設計は過去の学位論文を参照の事 [105]。

原子源

原子源はアンプル中に封じられた固体の K 及び Rb をそれぞれ真空槽内に入れ、真空槽内でアンプルを割ることによって蒸気を発生させるようにしている。どちらも自然存在比の K 及び Rb を使用している。自然存在比は ^{41}K が 6.7%、 ^{87}Rb が 27.8% でどちらも十分な割合がそれぞれの固体に含まれている。同じ温度で蒸気圧は K の方がやや低く、概ね 25°C 程度 K の温度を上げると Rb の蒸気圧曲線と一致する [106]。蒸気圧は真空槽の外部をヒーターで温めることで調整している。途中の管やバルブで固体の K や Rb がつまらない様に温度差をつけて外部を温めており、それぞれの原子が溜まっている先端部が局小値をとる様に常に温度を調整している。実験を行う時にはそれぞれの原子の領域を常温 ($\sim 25^\circ\text{C}$) から K の領域は 55°C 程度、Rb の領域を 30°C 程度になる様に全体を暖める。温度の上昇を初めてから 1-2 時間程度で十分な量の蒸気が発生し、実験に使用できるようになる。

ガラスセル

1st MOT 及び 2nd MOT の領域はガラスセルを用いている。金属チャンバーに比べてガラスセルの場合、光学アクセスが容易である。材質はパイレックスで寸法は外寸 $30 \times 30 \times 150$ mm で厚みは 2.5 mm である。2nd MOT の領域のガラスセルは、外面に AR-coating がなされており、波長 700-1100 nm の光の反射が低減されている。

4.3 computer control

実験の各段階においては、デジタル及びアナログの数多くの操作を、決まった時間間隔で順番に行っていく必要がある。これらの制御を手動で行うのは無理なので、パーソナルコンピュータ（PC）により実験を制御している。実験全体のタイムシーケンスの制御は一つの PC で行っており、これを main PC と呼んでいる。各時刻において main PC からデジタル及びアナログの制御信号を発生させ、各制御機器や他の PC を動かしている。制御プログラムには向山博士が作成した LabVIEW プログラムを修正して用いている（図 4.2）。

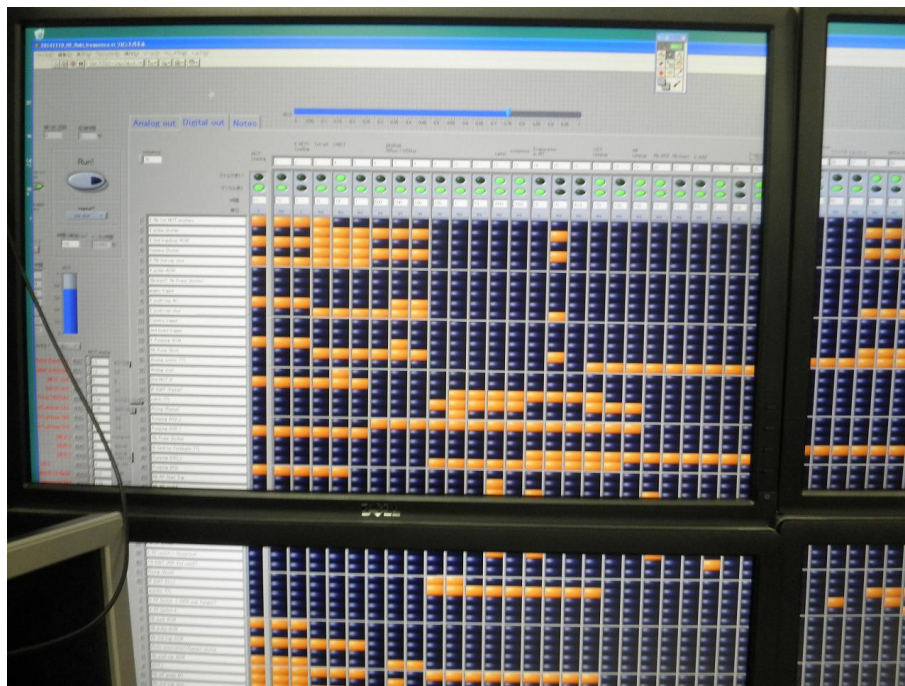


図 4.2: 制御用 LabVIEW プログラム

制御信号は 32ch のデジタルボード 2 枚（National Instruments, PCI-6534）及び 16ch のアナログボード 2 枚（National Instruments, PCI-6733）から発生されている。この構成ではアナログ信号が 5ch 程足りないが、ボードの数が 5 枚以上は現在の LabVIEW のバージョンでは（LabVIEW 8.2）では動かせない為、アナログ信号の出力先を時間的に変更することで、出力チャンネル数を確保している。切り替え回路は図 4.3 のようになっており、ちょ

うど磁気光学トラップが終わる段階で、デジタル信号によりチャンネルを切り替えている。入力のコモンモードノイズを防ぐため、差動入力を採用した。

タイムシーケンスの時間解像度は現在 $100\ \mu\text{s}$ に設定してある。これはPCの処理能力に依存している。プログラム上でタイムシーケンスを全て行列要素に変換している為、時間解像度を小さくすると行列のサイズが大きくなることになり、処理が間に合わなくなる。 $100\ \mu\text{s}$ であれば十分速く動作する。より細かい時間スケールで実験を行う時は適時パルサー等を使用する。またボード間にはわずかな時間のずれが生じている。各ボードの開始は一致しているが、各ボードの内部クロックのずれにより徐々にボード間のタイミングにずれが生じてくる。現在デジタルのボード2枚はクロックの同期を行っており、そのずれは $10\ \text{ns}$ 程度でジッターは、 ns 以下である。しかしアナログのボード2枚はクロックの同期は行われておらず、実験中に徐々にタイミングがずれてくる。おおよそ $10\ \text{s}$ で数 $10\ \mu\text{s}$ 程度のずれが生じ、実験時間は $30\text{--}40\ \text{s}$ 程度であるので、最大で数 $100\ \mu\text{s}$ 程度のずれが生じる。しかしずれのジッターは数 μs 程度にとどまる為、本研究では特に問題は生じない為、この状態のまま実験は行った。特に同期が重要な実験は各信号をモニターすることで対処することができる。

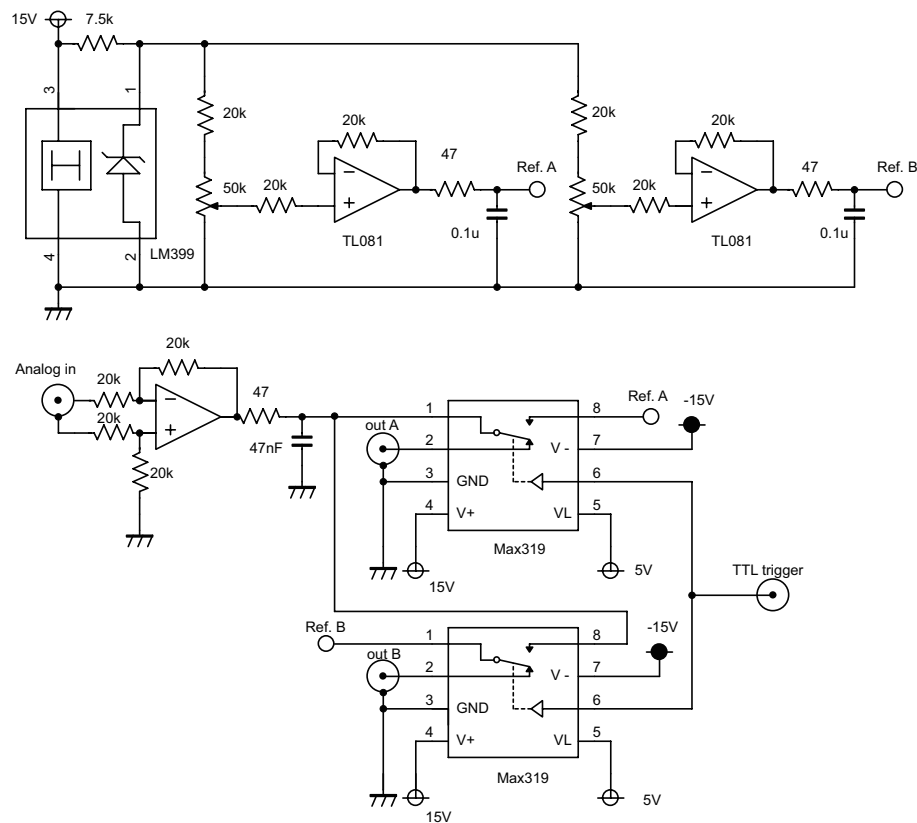


図 4.3: アナログ出力切り替え回路

4.4 レーザー冷却の為の光源

レーザー冷却の為の光源の周波数の基準には K、Rb 共にそれぞれの原子が封入された蒸気セルを用いている。蒸気セルに対して飽和吸収分光を行うことで D2 線への共鳴周波数を得ることができる。共鳴周波数に対しての安定化は、FM サイドバンド法を用いることで、共鳴周波数からのずれを信号として取り出し、それを外部共振器レーザー (ECDL) の piezo 素子にフィードバックすることで行っている。外部共振器レーザーの設計やフィードバック回路等については過去の学位論文に詳しく書いてある [107]。以上の様に周波数安定化された ECDL の線幅は数 100 kHz 程度で十分細い線幅をもつ。出力は 20-30 mW 程度である。

原子の冷却や輸送には原子の超微細構造に対して適切に離長をとった周波数のレーザーがいくつも必要となる。従って周波数安定化された ECDL (master laser) を分岐し、それぞれ周波数を制御する必要がある。周波数の制御には AOM を用いている。我々の標準的なセットアップは図 4.4 の様になっている。AOM は周波数の制御に加えて光強度の制御にも用いている。図で示す様に、周波数の制御には VCO (Voltage controled oscillator) を、強度の制御には Mixer を用いている。これらの制御電圧・電流は自作のドライバーから出力している。図 4.5 にドライバーの回路図を示す。周波数及び強度共に基準電圧による手動制御と PC からの信号による外部制御を切り替えることができるようになっている。外部入力のコモンモードノイズを避ける為、差動入力を採用した。コモンモード除去能力を最大限に発揮するには、四つの抵抗値をできるだけ揃えることが重要である。

Mixer によって光の強度の制御ができるが、漏れ RF により強度を完全に 0 にはできない。従って多くの場合ソレノイドシャッターを併用し、光路を完全に塞ぐことにより出力を 0 にする (図 4.6)。ソレノイドシャッターには、KGS 株式会社製の BQ-1 を使用し、自作の回路によって駆動する。回路図を図 4.7 に示す。応答速度は数 ms で十分な速度を持つ。

各分岐のレーザーのパワーは数 mW 程度となり、磁気光学トラップ等に使用するにはパワーが不足することになる。よって我々の研究室では以下の 2 段階の増幅を行い、必要なレーザーパワーを得ている。

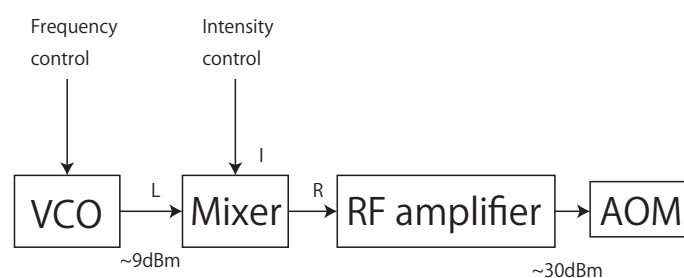


図 4.4: AOM のセットアップ

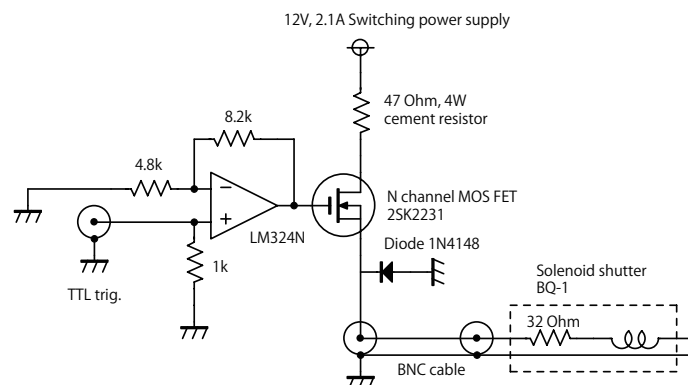


図 4.7: シャッタードライバー回路図

4.4.1 Injection locking

injection locking とは周波数の安定化されたレーザー（master laser）からの光を他の半導体レーザー（slave laser）に導入（injection）することによって誘導放出を引き起こし、周波数を保ったまま増幅する方法である。slave laser には master laser と同じ種類の LD が使用される。ゲインは slave laser に流す電流によって調整される。ここで、seed 光と増幅光の光路を一致させると同時に seed 光と増幅光の進行方向を反対にしなければならない。これは光アイソレータを用いて実現する。

Injection locking を行うことで、1 mW 前後のパワーを 20-30 mW 程度まで増幅することができる。injection する光のパワーは、K の LD に対して 1 mW 前後、Rb の LD に対して 2-3 mW 程度である。これは入手可能な LD の中心発振波長が Rb の D2 線 (780 nm) に対してややずれている (760-770 nm) 為であり、injection する光のパワーが少ないと自己発振成分 (ASE: Amplified spontaneous emission) が増大する。slave laser の LD はペルチェ素子によって温調されているが、Rb の場合は温度を高め設定し (~45°C) 中心波長をやや寄せると自己発振しにくくなる。

安定に発振させるには電流値に対しても気をつける必要がある。図 4.8 に標準的な Slave Laser の電流値と出力パワーの関係を示す。図 4.8 に示す様にある特定の電流値で出力が増大するが、電流値はその辺りに調整する必要がある。他の電流値では、ASE が増大し出力パワー・周波数共に安定しない。また電流値が高くなる程、自己発振しやすくなるため、なるべく低い電流値で必要なパワーが得られるように injection する光のパスを調整する必要がある。

slave laser の安定性は磁気光学トラップに捕獲できる原子の数に強く影響を与える為、常に監視をする必要がある。従って最終出力（後段に TA がある場合は、TA による増幅後）が単一モードで発振しているかを Fabry-Perot cavity とフォトダイオードを用いて常に監視している 4.9。ピエゾ素子を用いて cavity 長を振ることで周波数モードをスキャンすることができる。cavity の製作方法については過去の学位論文 [108] を参照の事。図 4.10 に cavity 信号の例を示す。

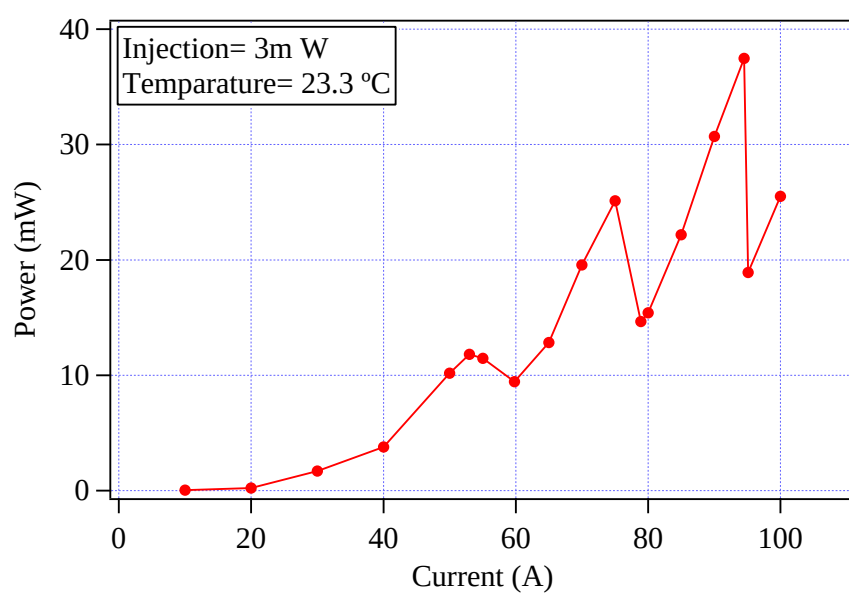


図 4.8: Slave Laser の電流値と出力パワーの関係

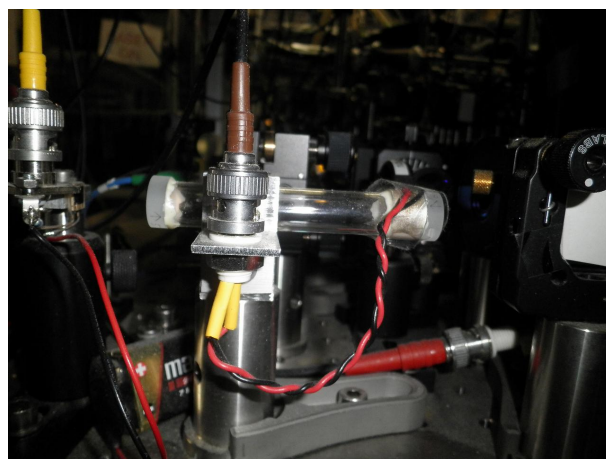


図 4.9: Fabry-Perot cavity

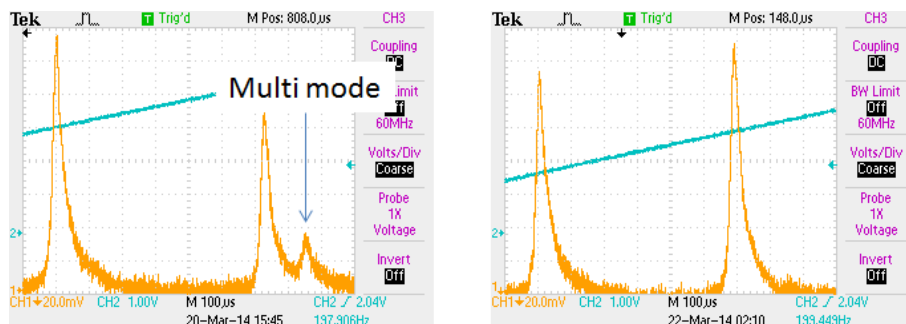


図 4.10: cavity 信号:

二つのレーザーの cavity 信号が示されている。左図の右側の信号はマルチモード発振状態であり、余計なモードが発生している。右図ではどちらも単一モード発振している。

4.4.2 Tapered Amplifier

TA (Tapered Amplifier) は半導体レーザーの一種であり、レーザーの増幅に主に使われる。通常の LD との違いは素子の形にテーパーがついているということである。半導体レーザーの出力の限界の多くは素子内のエネルギー密度が高くなり過ぎて素子が焼けてしまうことによって決まっていることが多い。TA は入射面から出射面に向かって段々面積を広げていくことによって（すなわちテーパーをつけることによって）その問題を克服している。TA によって 500mW 以上の出力を得ることができる。

TA を使う際に注意すべきことは、通常の LD よりも出射光の空間モードが汚いということである。従って実際に使用できる、きれいなガウシアンモードの成分のパワーは実際の出力よりも大幅に減少するという問題がある。また、自然発光も多く発生する為、場合によっては余分な波長成分を除去する必要がある。図 4.11 に TA の電流値とパワーの関係の例を示す。

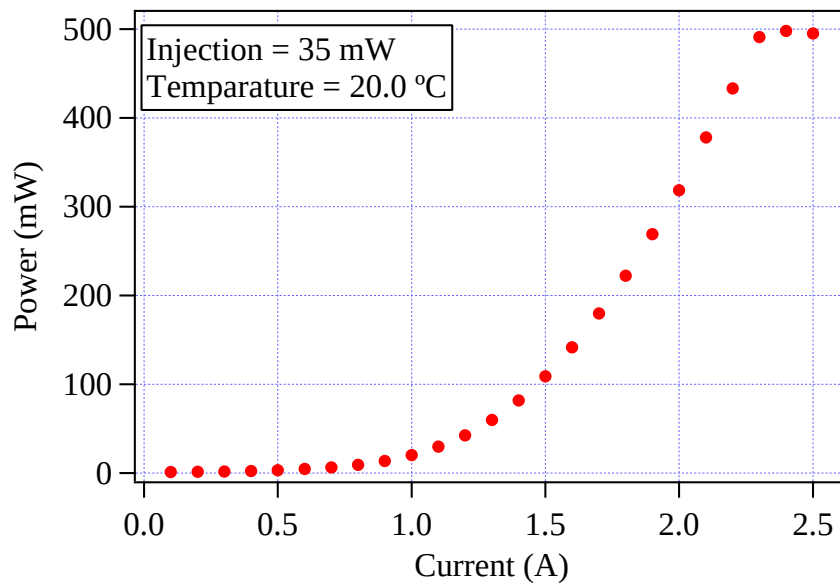


図 4.11: TA の電流値と出力パワーの関係

4.4.3 Lasers for K

K の master laser は ^{39}K の D2 線にロックしている。これは自然存在比が ^{39}K の方が大きく (93.3%) 強い共鳴信号を得ることができるからである。具体的には ^{39}K の基底状態 $F=1$ と $F=2$ の cross over から励起状態への遷移に AOM により 80 MHz のオフセットをつけてロックしている。励起状態は超微細構造間隔が狭い為 F' を分離できていない。ロックの詳細は当研究室の学位論文に詳しい [107]。

図 4.12 に K の準位図及び冷却の為に用いた光の離長を示す。 ^{41}K は超微細構造の間隔が比較的狭い為 (約 254 MHz) [109]、cooling 光、repump 光共に励起状態全体から赤方離長をとる必要がある [107]。従って、cooling 光、repump 光どちらも強い光強度が必要になる為、TA によって増幅している。cooling 光には、100 mW (1st) 及び 170 mW (2nd) 程度、repump 光には 70 mW 程度 (1st & 2nd) を直径 15 mm 程度に拡大して使用している。

cooling 光、repump 光の他に原子の吸収イメージを行う為のイメージング光、1st MOT から 2nd MOT への輸送の為の push 光、磁気トラップにトラップ可能な状態へと光ポンピングする為の、pumping 光 (F-pumping、mF-pumping) がある。これらについては次節以降で再度説明する。

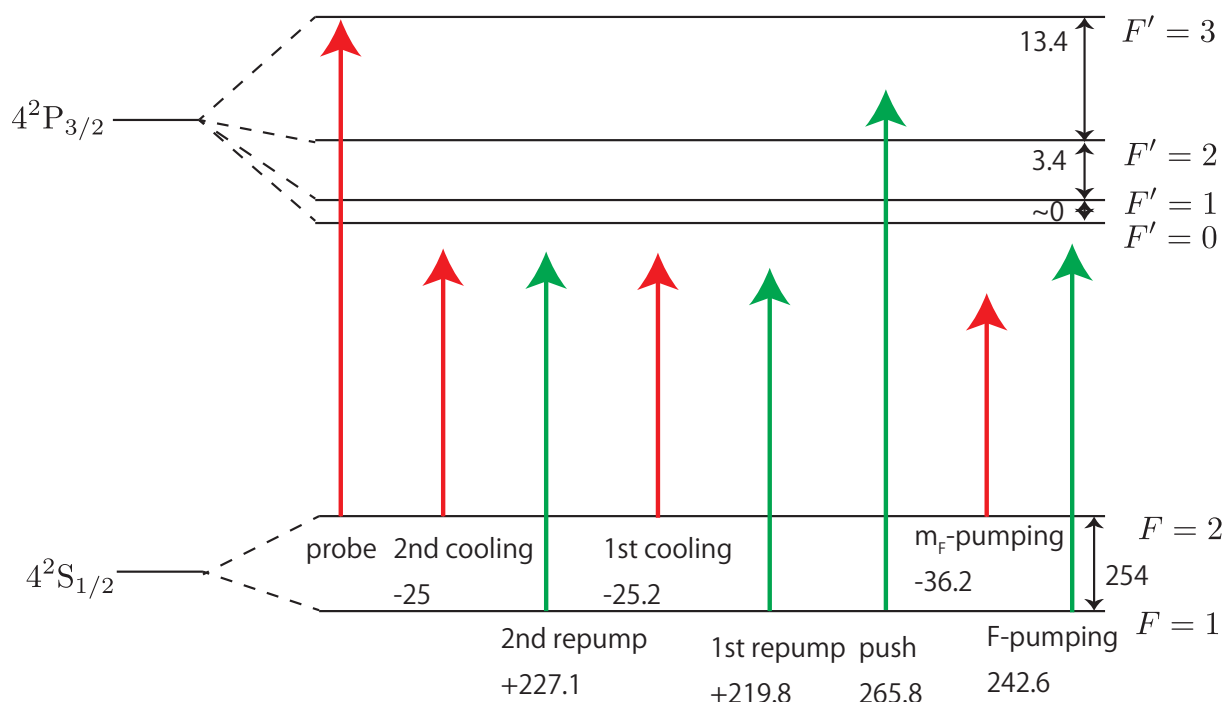


図 4.12: K の準位図 [109] と冷却に用いる光の離長: 離長の単位は全て MHz。 $F = 2$ から $F' = 3$ への遷移を基準にしている。cooling の遷移を赤、repump の遷移を緑で示した。

4.4.4 Lasers for Rb

Rb は超微細構造間隔が広い為 (約 6.8 GHz)[110]、cooling 及び repump それぞれに master laser を用意してある。どちらも D2 線を用いている。cooling 光の master laser は、基底状態の $F = 2$ から励起状態の $F' = 2$ と $F' = 3$ 状態の Cross over への遷移にロックし、repump 光は基底状態の $F = 1$ から励起状態の $F' = 1$ と $F' = 2$ 状態の Cross over への遷移にロックしてある。図 4.13 に Rb の準位図及び冷却の為に用いた光の離長を示す。K の場合と異なり、Rb の場合は超微細構造の間隔が大きいため、cooling 光の遷移と repump 光の遷移はそれぞれ別の二準位系と十分みなせる。従って repump 光は共鳴に直接合わせることができ、光強度はそれ程必要ない。従って、repump 光に対しては TA による増幅はほとんど必要ない。1st MOT に対しては、偏光を用いて cooling 光を増幅している TA に同時に injection してゲインを一部 repump 光に分配している。TA で増幅する光の強度の割合は TA への入射偏光によって調整できる。光強度の割合は Fabry-Perot 共振器で観測した所、(cooling):(repump)= 25 : 1 程度である。2nd MOT では repump 光に対して、repump 光による増幅は行っていない。1st MOT では合計 160 mW 程度 ((cooling),(repump)=154 mW,6 mW) の光出力を、2nd MOT では cooling 光は 150 mW 程度、repump 光は 3 mW 程度を K と同様に直径 15mm 程度に拡大して用いている。

K と同様に、イメージング光、push 光、pumping 光も必要となる。

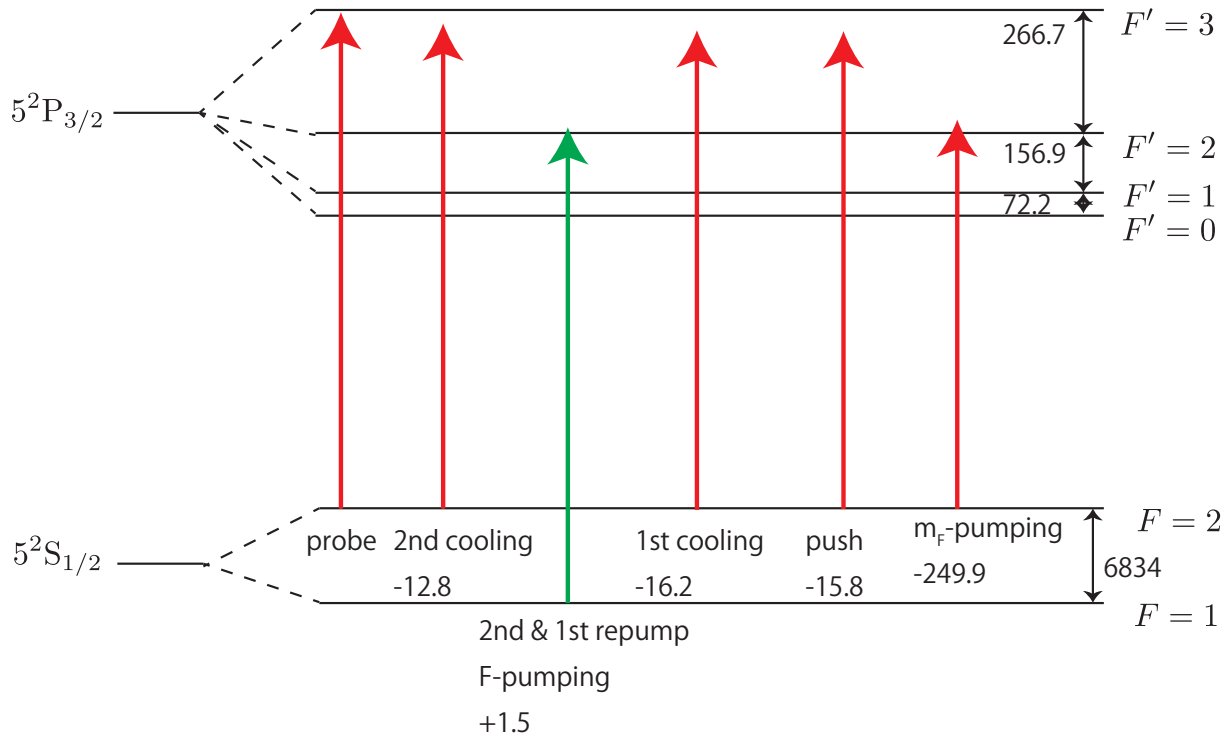


図 4.13: Rb の準位図 [110] と冷却に用いる光の離長: 離長の単位は全て MHz。cooling の遷移を赤、repump の遷移を緑で示した。cooling 光は $F = 2$ から $F' = 3$ への遷移を基準に、repump 光は $F = 1$ から $F' = 2$ への遷移を基準に離長を示した。

4.5 磁気光学トラップ

我々は二重磁気光学トラップの方式を用いて原子を冷却している。それぞれの磁気光学トラップ（1st MOT & 2nd MOT）について以下に述べる。

4.5.1 1st MOT

1st MOT は 2nd MOT への高流量の原子源として用いられる。従って最終的には、2nd MOT への loading rate が高くなるように調整する。以下にその概略を示す。

1st MOT は、通常の磁場勾配を作るコイルと 6 方向のビームからなる 3 次元の MOT に原子を輸送する push beam を加えたものである。これによって原子ビームを生成する。1st MOT 側は比較的低真空（ $\sim 10^{-8}$ torr）になっており、原子蒸気が充満している。MOT の領域にはガラスセルを採用している為、光学アクセスは比較的容易である。ガラスセルへの原子の付着を防ぐ為、ガラスセルは常に 60 °C 程度に暖められている。

コイルはガラスセルの外側に二つ設置しており、Anti-Helmholtz 型に電気を流すことで磁場勾配を発生させる。対称軸は重力の向きに平行である。現在の配置では電流 1A 回り、 $(B_r, B_z) = (15, 7)$ G/cm の磁場勾配を発生させる。最適化の結果、1.72 A の電流を流して使用している。

二原子種 MOT

本研究では ^{41}K と ^{87}Rb の二つの原子種を磁気光学トラップに捉える必要がある。二つの原子種はどちらも同じガラスセル内にトラップしている。 K 用の laser と Rb 用のレーザーは図 4.14 に示す様に PBS と二波長板 (two wave plate) を用いて光路を一致させている。すなわち二波長板は K の D2 線である 767 nm に対しては $1/2$ 波長板として働き、 Rb の D2 線である 780 nm の偏光は全く変えないように作られている。これを用いて直交する偏光で PBS を用いて混合した二つの光の偏光を合わせることができる。また Rb は cooling 光、repump 光共に同じ TA で増幅しているが (節 4.4.4)、 K は二つの TA を用いている為、この二つの光も光路を一致させる必要がある。特に K の場合は repump 光も冷却に大きく関与する為、repump 光と cooling 光の光路を一致させることが重要である。これは図 4.14 に示す様に、直交する偏光をもちいて PBS で光路を一致させたのち、偏光を傾け PBS を用いることで、repump 光と cooling 光をそれぞれの光路に分岐する。この時 K と Rb を独立に偏光を回せるように、通常の $1/2$ 波長板 ($\text{K} \& \text{Rb}$) と二波長板 (K only) を組み合わせて使用する。以下同様に、光を 6 つに分けて MOT に使用する。MOT を最適化するに当たって、6 つのビームのパワーバランスの調整が重要となる。それぞれ独立に偏光を回せるようにすることで、 K と Rb それぞれに対して最適化することが可能となる。特に K の場合は質量が軽いため、 Rb よりパワーバランスに敏感である。最終的には波長板の角度を 0.5° 単位程度で調整する必要がある。

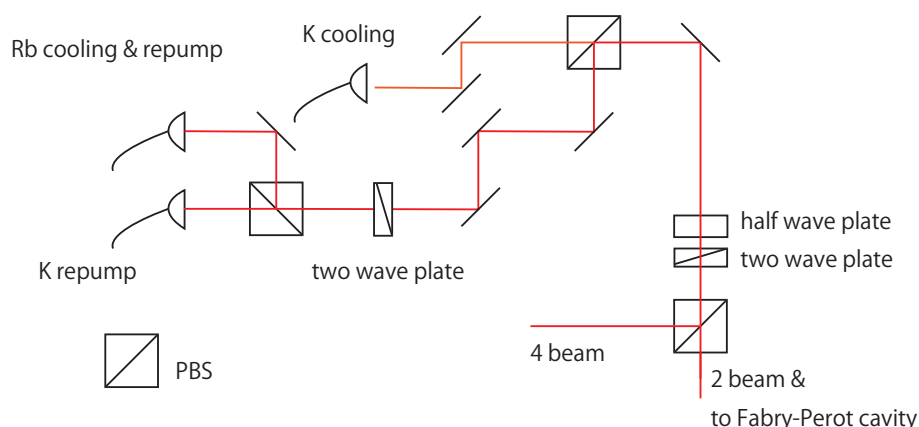


図 4.14: 1st MOT のための光学系:

PBS と波長板、二波長板を用いてビームの合成・分岐を行う。

蛍光測定

1st MOT の最適化は最終的には 2nd MOT の loading rate が最大になるように調整するべきであるが、装置の状況を確認する上で、1st MOT の原子数及び loading rate を蛍光により観測することは非常に有用である。またそのような蛍光の定量的な観測とは別に、赤外線カメラにより MOT の様子を定性的に観測しておくのも有効である。 K 及び Rb 共に共鳴線が赤外線の為、肉眼で MOT を観測することは難しい。赤外線カメラによって常に定

点で観測しておけば、MOTの状況（位置や大きさ等）を瞬時に判断することが容易になる。以下では、蛍光の定量的な観測について詳しく述べる。

蛍光はガラスセルの外側にレンズを置いて集め、フォトダイオードにより観測する。図4.15の様に迷光を防ぐため、遮光をしっかりと行うことが重要である。二つの原子種を用いている為、それぞれ独立に蛍光を観測できるように干渉フィルターを用いている。これにより、対象としていない原子の光は観測限界以下に抑えられる。

フォトダイオードの電流は自作の回路を用いて測定している。図4.16に回路図を示す。オペアンプにはOP297を使用した。これはFET型のオペアンプで、入力バイアス電流が非常に小さいため、微小な電流の測定に適している。電流測定回路に比較的大きな抵抗（20 MHz for K, 5 MHz for Rb）を用いている為、作成の際は図4.16の点線領域をできるだけ短く配線する必要がある。これにより漏れ電流を小さくできる。またノイズを小さくする為、ローパスフィルタを追加した。時定数は20 ms程度で蛍光観測には十分である。

図4.17(K)、4.18(Rb)に蛍光観測の様子を示す。これを指数関数でフィッティングし、ローディングの時定数 τ 及び蛍光の絶対量 A を得る。ローディングの時定数は1s程度でこれは真空度によって決まる。真空ゲージの値は $\sim 10^{-8}$ torrで概ね測定結果と矛盾しない。また蛍光の絶対量から原子数が見積もれる。原子の光散乱レート γ_p は式B.30で示される。レンズによる集光の立体角を Ω とし、原子数を N とすると、フォトダイオードに単位時間当たりに入射する光子数は、 $N\Omega\gamma_p$ となる。また一方、フォトダイオードの感度を S [W/A]、測定された電圧を V とすると、単位時間当たりの光子数は $V/RSh\nu$ となる。 R は測定に用いた抵抗、 $h\nu$ は一光子のエネルギーである。干渉フィルターによる測定光子数の減少割合を B で表すと、結局原子数は、

$$N = \frac{2V}{B\Omega RSh\nu\Gamma} \frac{1 + s_0 + (2\Delta/\Gamma)^2}{s_0} \quad (4.1)$$

と見積もることができる。

蛍光量はKでは40 mV程度、Rbでは140 mV程度の信号が得られ。概ねK原子が 7.1×10^6 個程度、Rb原子が 8.9×10^7 個程度1st MOTに捉えられている。Kの方が数が少ないのは、蒸気圧がKの方が低く、また ^{41}K は自然存在比が少ないためと考えられる。

ローディングの速さはローディングレート $L = N/\tau$ によって見積もられる。それぞれ、 $L_{1st,K} = 5.9 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ 、 $L_{1st,Rb} = 7.4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ となる。

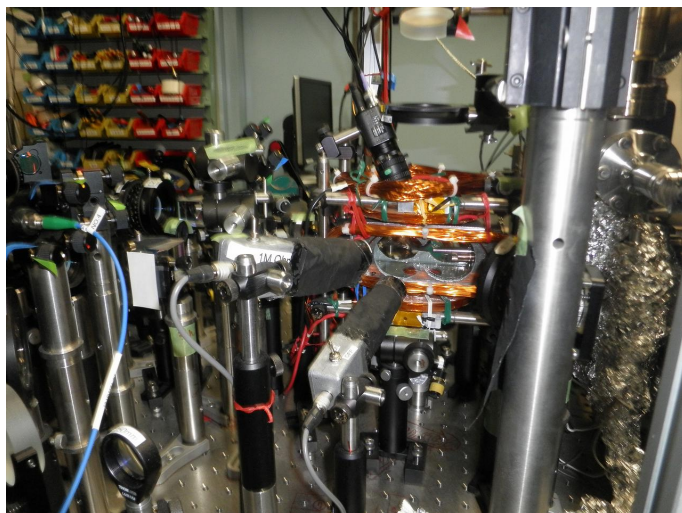


図 4.15: 1st MOT の光学系の外観:

手前に斜めに設置してあるものが、蛍光観測用のフォトダイオードのセットアップである。

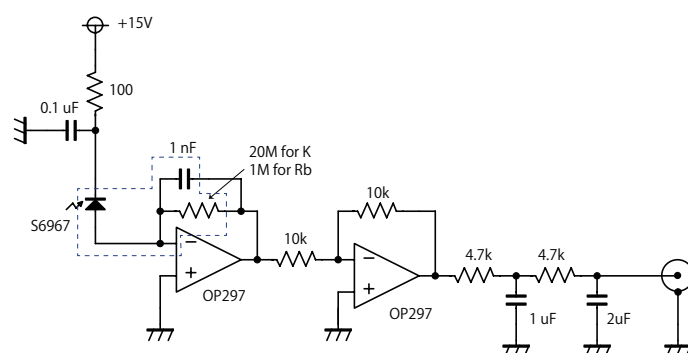


図 4.16: 蛍光観測の為の PD の回路図

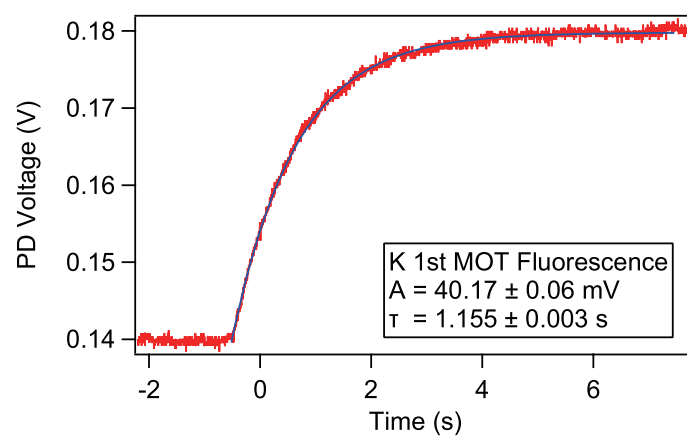


図 4.17: 蛍光観測の様子 (1st MOT,K)

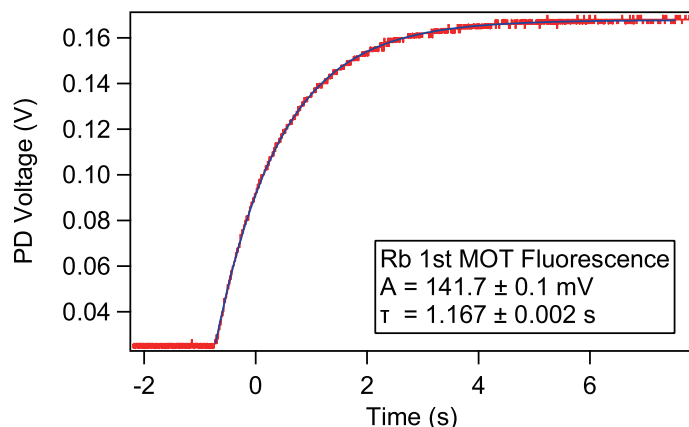


図 4.18: 蛍光観測の様子 (1st MOT, Rb)

push beam

push 光は 2nd MOT への loading が速くなる様に調整する。Rb の場合は cooling 遷移を用い、K の場合は repump 遷移を用いるのが効率が良い。また push 光は赤方離長、青方離長どちらによっても実現できるが、 ^{41}K の場合、青方離長の方が効率が良くなる時がある [107]。離長の最適値は push 光の強度にも依存する。従って、実際に loading の速さを測って最適値を決めるのが良い。図 4.19 は、ローディング時間一定で、蒸発冷却を行った後の K の原子数を、push 光の周波数 (AOM への入力周波数で示している) に対してプロットしたものである。すなわち原子数が多い程ローディングレートが高いことを示す。図で示す様に、 $F = 1$ から $F' = 2$ の遷移の共鳴によるディップ (AOM 周波数 $\sim 215\text{ MHz}$) を挟んで二つのピークがあることが分かる。右の細いピークが青方離長によるものを示す。青方離長の方がローディングレートが高いことが分かる。

2nd MOT へのローディングレートは push 光とパワーバランスが互いに関係しているので、交互に調整し、最適値になる様に調整する。

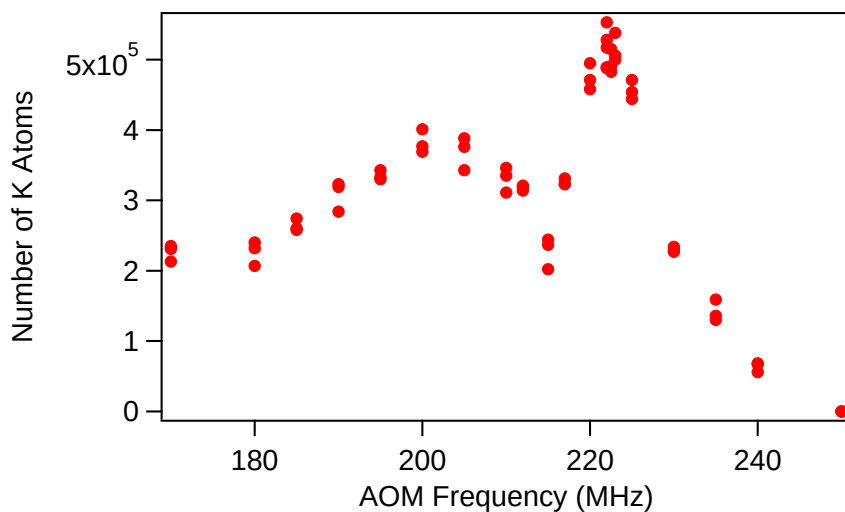


図 4.19: K の原子数の push 光の周波数依存性

4.5.2 2nd MOT

2nd MOT では 1st MOT から push 光によって輸送されてきた原子を再捕獲し、実験上必要な原子数を用意する。2nd MOT の領域は高真空の為 ($\sim 10^{-11}$ torr) 長時間の原子の溜め込みが可能である。MOT は 6 つのビームを用いる標準的な MOT である。

MOT の為のコイルには磁気トラップ (詳細は後述) の一部を用いる。Curvature coil と Anti-Bias coil を各一つずつ用いることで磁場勾配を発生させる。この時電流 15 A を流すと磁場勾配は $(B_r, B_z) = (2.7, 5.9)$ G/cm となり十分な磁場勾配を発生させることができる。

二原子種 MOT

1st MOT と同様に 2nd MOT も二原子種を同時にトラップする必要がある。K と Rb、cooling 光と repump 光は図 4.20 の様に合成している。1st MOT と同様に通常の $1/2$ 波長板 (K & Rb) と二波長板 (K only) を用いて、それぞれの偏光を独立に調整できるようにしている。PBS によって 6 つのビームに分岐し、波長板を用いてそれぞれの各軸のパワーバランスを調整してある。最適な条件を達成する為には、 0.2° 単位程度まで微調する必要がある。2nd MOT では、続く蒸発冷却の為に多くの原子、特に多くの Rb 原子が必要となる。向かい合うビームのパスを多少非対称に調整すると、より多くの Rb 原子が捉えられるのでその様に調整してある。ただしその場合 K 原子の数が減ってしまうことがあるので、どちらもある程度数が確保できるように調整する。また 2nd MOT の場合、続く磁場トラップと位置を合わせる必要があるので、バイアス磁場をかけることで、MOT の位置を微調できるようにしてある。パワーバランスと磁場により、2nd MOT 中の原子数を最大化かつ場所を最適な位置にすることができる。

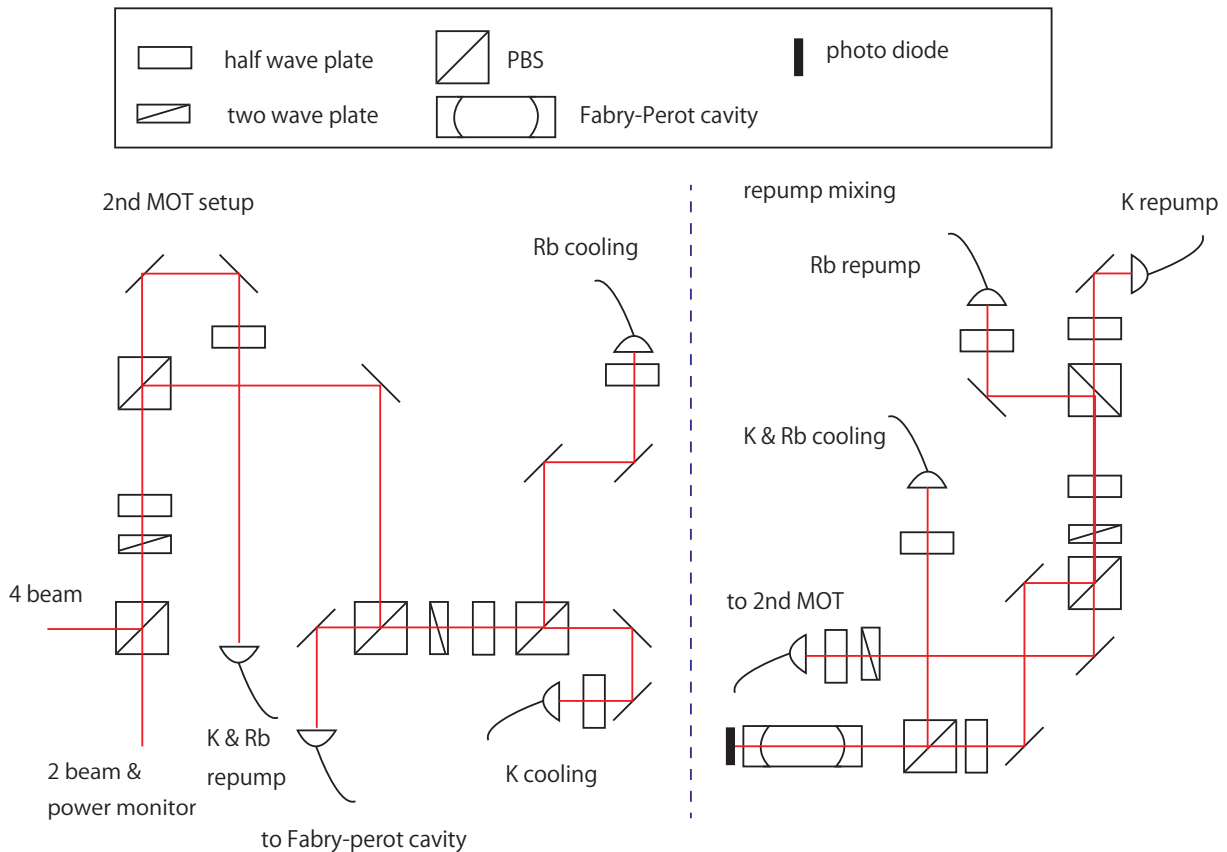


図 4.20: 2nd MOT の為の光学系

蛍光観測

1st MOT と同様に 2nd MOT もフォトダイオードにより蛍光を観測している。回路は図 4.16 とほぼ同じ回路を使っており、K に対して抵抗 $20\text{ M}\Omega$ 、Rb に対して $1\text{ M}\Omega$ の抵抗で測定を行っている。干渉フィルターを用いて K の PD に対しては K の光のみに感度を持つようにしている。Rb に対しては K の蛍光量が小さいことから、ほとんど影響を与えないため干渉フィルターを用いずとも十分な精度で蛍光を観測できる。ただし、バックグラウンドとして K の MOT 光の散乱光が多少入ってくるため、オフセットとしてこれが乗ってきてしまう。これは K のレーザーが安定であればほとんど問題にならないが、干渉フィルターを用いればより独立な測定が可能となる。観測できる蛍光の絶対量は下がってしまうが、Rb の蛍光量は充分多いため、干渉フィルターを用いるべきである。ただし、本研究では Rb の蛍光量の PD による観測と赤外線カメラによる MOT の定性的な観測を同じ光学系に組み込んでいる（同じレンズで集光し、ビームスプリッタで PD へのパスと赤外線カメラへのパスを分岐している）。赤外線カメラによる観測は K の MOT に対しても用いている為、干渉フィルターを組み込む場合は、それぞれの配置を工夫する必要がある。MOT の位置や大きさの定性的な観測は赤外線カメラを用いて行っている。

蛍光観測の様子を図 4.21 (K)、図 4.22 (Rb) に示す。2nd MOT の場合、単純に原子数だけでなく、MOT の位置や温度等も重要となる。位置を最適化する際に蛍光観測の立体

角が大きく変わってしまい（特に K）蛍光の絶対量を評価するのが難しい。従って原子数は吸収イメージングによって測定する（後述）。図 4.21（K）、図 4.22（Rb）の時の原子数は、K に対して 3×10^7 個、Rb に対して 1×10^9 個程度である。従ってローディングレートは $L_{2nd,K} = 6 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ 、 $L_{2nd,Rb} = 3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ 程度となる。Double MOT の効率は $P = L_{2nd}/L_{1st}$ で見積もられる。K、Rb 効率はそれぞれ、 $P_K = 0.10$ 、 $P_{Rb} = 0.43$ となる。K に対して効率がやや悪い [107] が、Rb を優先にアライメント等をした影響であると考えられる。本研究では、K の数はそれ程必要ないので十分である。

尚 MOT の状況によっては図 4.23 の様な、Light assisted collision(LAC)(文献 [111] 等を参照の事) による K 原子の減少が見られる。数のバランスから Rb にはほとんど影響を与えない。LAC の程度は、K のリポンプ光の離長や K と Rb の MOT のオーバーラップが強く影響する。図 4.23 では K の蛍光は半分程度まで減少している。従って最終的には K と Rb の MOT を同時に作成した時に最適になる様に、離長やパワーバランスを調整する。蛍光量のピークと最適値が異なることがあるので、吸収イメージを用いて原子数等を確認しながら最適化を行う。

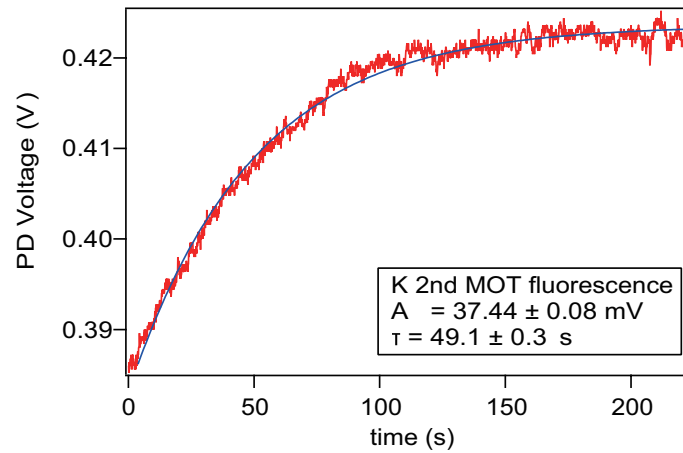


図 4.21: 蛍光観測の様子（2nd MOT,K）

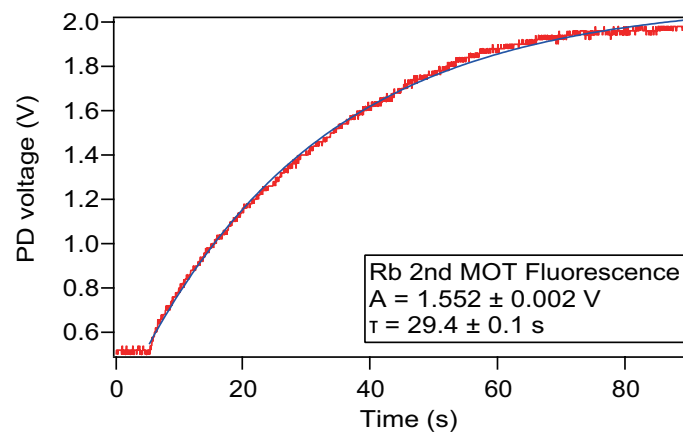


図 4.22: 蛍光観測の様子（2nd MOT,Rb）

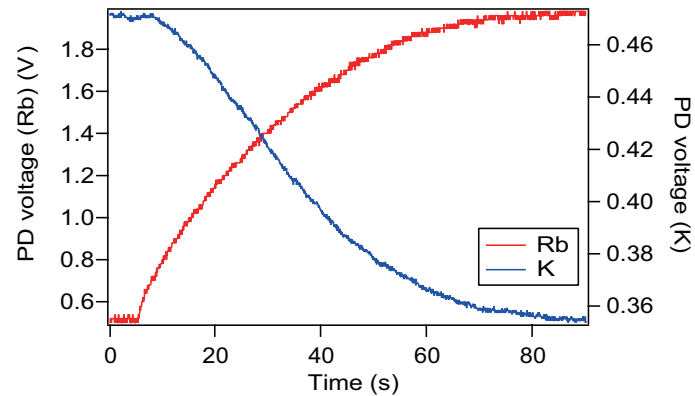


図 4.23: Light assisted collision (2nd MOT, K and Rb)

蛍光トリガー

実験開始時の原子数の安定化を狙い、Rbの蛍光が一定値に達した時に実験を開始するようにしている。図4.24にトリガー発生回路の回路図を示す。蛍光の読み取り誤差は1%以下である。原子数の安定度はレーザーの安定度等も強く影響する為、実際には原子数は蛍光以上に揺らぐことになるが、安定化の為に必要な事の一つである。また蛍光レベルによって原子数を調整できるので、有用である。

またこれに加えて、商用電源の交流周波数によるノイズを低減する為、商用電源との同期回路を用いている。本研究が行われた場所（東京、日本）では商用電源の周波数は50Hzである。回路図は図4.25の通りである。ただしこれは商用電源の周波数自体の揺らぎによって、トリガー5～6秒程度で位相の誤差が π に達してしまうことが分かった。従って本研究では、実験は開始から10秒以上かかる為、ほとんど意味がない。実験に用いるには、例えば測定の直前に同様の回路を組みこみタイミングを合わせる等が必要である。

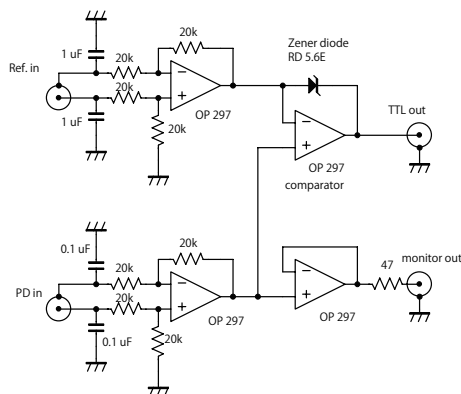


図 4.24: 2nd MOT の蛍光による trigger 回路

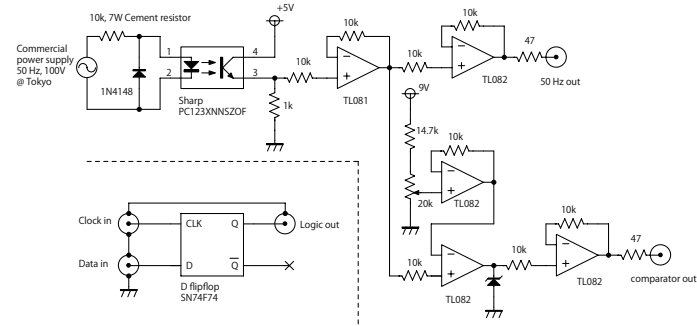


図 4.25: 商用電源周波数との同期回路

4.5.3 Time dependent MOT

定常状態の MOT では、温度が高くかつ密度が低い磁気トラップで効率よく捕獲することができない。従って我々は Time dependent MOT の手法を用いた [112, 107]。即ち、時間的に磁場勾配及び MOT 光の強度・離長を変化させることで、より低温かつ高密度の原子雲を得る方法である。

タイムシーケンスは図 4.26 の様になっている。K に関しては、圧縮を主に行う前半部分と冷却を主に行う後半部分に分かれている。Rb に対しては偏光勾配冷却を聞かせる為、repump 光の強度を下げ、Trap 光の離長を大きくする。当研究室の他の実験では前半部分で磁場勾配を大きく上げる方法をとっているが [105, 107, 113]、本研究では磁場勾配を単純に下げていく方法を用いている。磁場勾配を上げる方法は K の冷却に有効に働くが、Rb の冷却にはやや非効率である。本研究では蒸発冷却の冷媒として Rb を用いる為、Rb の温度を下げ、密度を高めることが重要である。従って、単純に磁場勾配を下げる方法をとった。結果 K に関しては $200\mu\text{K}$ 程度、Rb に関しては $80\mu\text{K}$ 程度まで冷却された。密度は $n_K = 2 \times 10^8\text{ cm}^{-3}$ 、 $n_{\text{Rb}} = 5 \times 10^{10}\text{ cm}^{-3}$ 程度となる。磁気トラップで捕獲するのに十分低温な状況を達成できた。

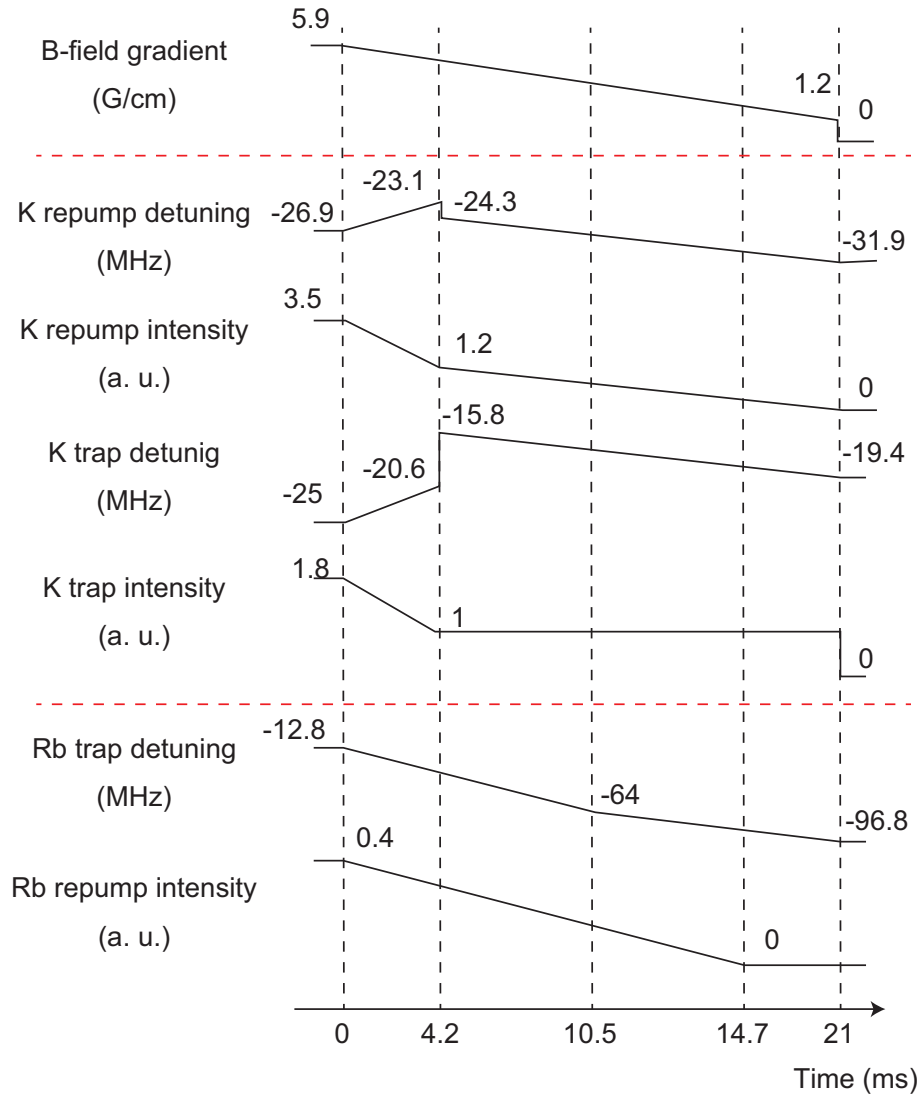


図 4.26: Time sequence of Time-dependent MOT

4.6 磁気トラップ

蒸発冷却を行い、より低温の原子気体を作成する為に本研究では磁気トラップを使用した。本研究で使用した磁気トラップは筆者が修士の時に作成した [114]。より詳細な情報はそちらを参照の事。

磁気トラップは原子の磁気モーメントと外場である磁場の相互作用を利用する。磁気モーメントを μ 、磁場を $\mathbf{B}$ とすると相互作用ポテンシャルは、以下の様に書ける。

$$V = -\mu \cdot \mathbf{B} \quad (4.2)$$

ここで、全スピンの大きさを $\mathbf{F}$ 、磁場の方向を量子化軸とした磁気量子数を m_F 、ボーア磁子を μ_B g 因子を g_F とすると、以下の様に書き換えることができる。

$$V = -g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}| \quad (4.3)$$

ここでは、原子が運動して磁場の向きが変わっても、スピンの磁場の向きに断熱的に追従するということを仮定している。この仮定は、磁場の方向の変化率 $d\theta/dt$ が、原子の歳差運動の周波数（ラーモア周波数） ω_{Larmor} より十分小さい時に成り立つ。ラーモア周波数は、以下の様に書ける。

$$\omega_{Larmor} = \frac{g_F \mu_B B}{\hbar} \quad (4.4)$$

以上の条件が満たされない時、運動する原子の磁気量子数 m の値は変化する (マヨラナ遷移) ので注意が必要である。

式 4.3 より、 $g_F m_F > 0$ を満たすスピン状態 ("weak field seeking state") は磁場の極小点に集まり、 $g_F m_F < 0$ を満たすスピン状態 ("strong field seeking state") は磁場の極大点に集まることが分かる。静磁場では磁場の極大点を作ることはできないので、weak field seeking state のみがトラップ可能である。我々の用いる ^{41}K および、 ^{87}Rb では $|F, m_F\rangle = |1, -1\rangle, |2, 2\rangle, |2, 1\rangle$ がトラップ可能である。ただし磁場が大きくなると、ポテンシャルが式 4.3 のように線形でなくなり (パッシェンバック効果)、トラップできなくなることがある。 ^{41}K で特にその問題は顕著であり、 $|1, -1\rangle$ 状態では十分に深いトラップを作ることができず、トラップすることができない。また $|2, 1\rangle$ 状態も原理的にはトラップ可能であるが、 $|2, 2\rangle$ と比べて磁気モーメントが半分になり、トラップ力が半減するので不利である。また $|2, 1\rangle$ 状態はスピンを変化させる衝突が起こるので問題となる。

4.6.1 磁気トラップの設計

Cloverleaf trap

磁気トラップの最も簡単な作り方は、二つのコイルをアンチヘルムホルツ配置にすることであるが。ただしこのようにして作成した磁気トラップは磁場の極小点で磁場の大きさが 0 となり、マヨラナ遷移が容易に起こる。これはトラップからのロスにつながる。磁場の 0 点が無いため、冷却原子の系で最も一般的に用いられているトラップは、ヨッフエ・プリチャード (IP: Ioffe-Pritchard) 型トラップ [115] と呼ばれるものである。もともとの IP トラップは、四つの平行な棒 (Ioffe bar) により軸方向に成分のない四重極磁場を発生させる。それに加えて二組のコイルがあり、一組は Curvature コイルと呼ばれ、純粋なヘルムホルツ配置よりも十分に径が小さいコイルの組であり、バイアス磁場に加えて軸方向に曲率を発生させる。もう一組は、Anti-Bias コイルと呼ばれ、ヘルムホルツ配置 (もしくはそれに近い) のコイルの組であり、Curvature コイルが作った大きすぎるバイアス磁場を調整するコイルである。これらにより発生させられた磁場は、磁場の極小値をとる点 (トラップ中心) を原点とすると、原点付近で以下の様に書くことができる。

$$\mathbf{B}_{IP} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{B''}{2} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

ここでトラップ形状を特徴づける値として、磁場の極小値のバイアス磁場 B_0 、動径方向の磁場勾配 B' 、軸方向の磁場曲率 B'' が現れる。 $B_0 \gg B' r$ ($r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$) の時 (原子が

低温で $k_B T \ll |\mu| B_0$ の時に対応)、 $|\mathbf{B}_{IP}|$ は次の様に近似できる。

$$|\mathbf{B}_{IP}| \cong \frac{1}{2}[\tilde{B}'' r^2 + B'' z^2] + B_0 \quad (4.6)$$

$$\tilde{B}'' = \frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \quad (4.7)$$

これは、 z 軸を回転軸とする非等方な三次元調和型となる。

B_0 、 B' 、 B'' はそれぞれコイルの巻き数や形状及び流す電流の大きさによって独立に制御することができる。 B_0 の値によって、トラップ形状は大きく分けて以下の三つに分類できる。

- $B_0 = (2B'^2)/(3B'')$: トラップ形状は等方で共通の曲率 B'' をもった調和型になる。この形状は主に MOT 等のレーザー冷却された原子を磁気トラップに移行させる際に、モードマッチをとるために使用される。トラップ周波数は以下ようになる。

$$\omega_{com} = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B}{M} B''} \quad (4.8)$$

- $B_0 > 0$ で小さい値（数 G 程度）: トラップ形状は動径方向に強く圧縮されたシガーシェイプ型のトラップになる。動径方向は中心から離れるところでは線形で、中心付近では調和型となる。主に蒸発冷却の時に使用され、動径方向の勾配を強くすることによって衝突レートを上げ、蒸発冷却の効率を高める。中心付近の軸方向、動径方向のトラップ周波数はそれぞれ以下ようになる。

$$\omega_{ax} = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B}{M} B''} \quad (4.9)$$

$$\omega_{ax} = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B}{M} \tilde{B}''} \quad (4.10)$$

- $B_0 < 0$: 軸方向に 0 点が二つでき、トラップ中心は磁場の極大値になる。high field seeking state のトラップ等に使用されることがある。

以上が IP 型トラップの概要であるが、その派生の一つとして今日多く使用されているものが、Cloverleaf trap[116] とよばれるもので、Ioffe bar の代わりに四組のアンチヘルムホルツ配置のコイルを組み合わせた、cloverleaf coil を用いるものである。これは、動径方向に 2π のオプティカルアクセスを確保できることに加え、強力な動径方向の磁場勾配を発生させることができる非常に優れたトラップである。我々もこのトラップを元にして磁気トラップを設計した。

磁気トラップの設計

磁気トラップは極低温極性分子の生成・研究に適するように設計した。即ち以下の三点に留意して設計した。

1. ^{41}K と ^{87}Rb の十分な数 (5×10^4 個程度) の混合 BEC の作成に適している。
2. 分子生成の為に三次元光格子、光トラップに対するオプティカルアクセスの確保
3. 極性分子の研究の為に高電場 (11kV/cm 以上) をかけられる電極の設置スペースの確保

以上を達成する為の設計の模式図が図 4.27 及び図 4.28 である。標準的な Cloverleaf trap の様に 12 個のコイルを用いており、それを強度、熱膨張率に優れるガラスエポキシの板に固定した形をとっている。光格子のパスを確保する為に Clover coil の上下間隔を少し開けているのが特徴的である。コイルの設計寸法は表 4.1。実際に作成した磁気トラップの外観は図 4.29 の様になっている。コイルは中空銅管を用いており、水冷できるようになっている。

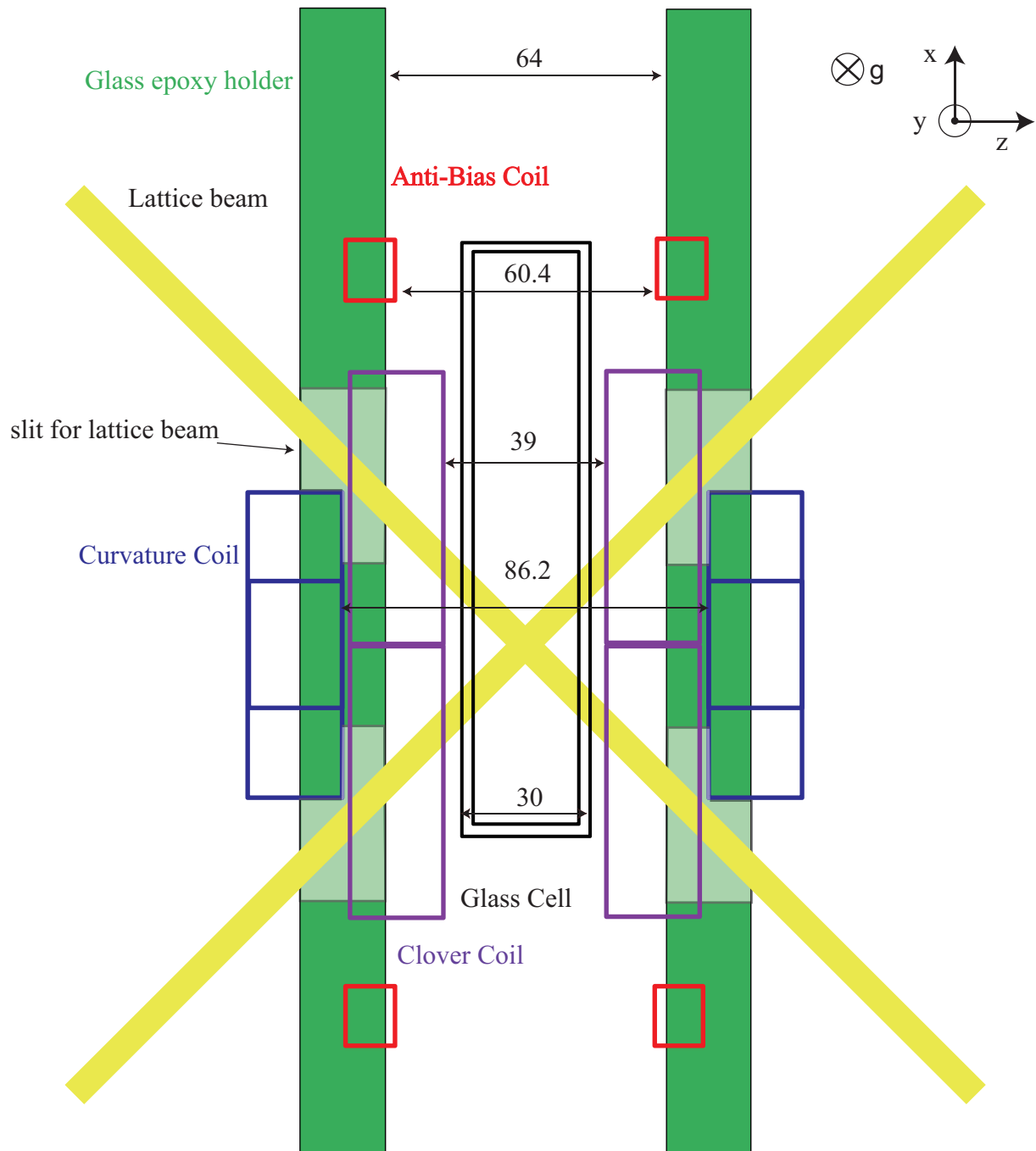


図 4.27: 磁気トラップコイルの配置の模式図（水平面）：コイルの配置を上から見たもの。距離は単位 mm で一部のみ記載してある。光格子用の光が通るようにガラスエポキシホルダーに穴を空けてある。

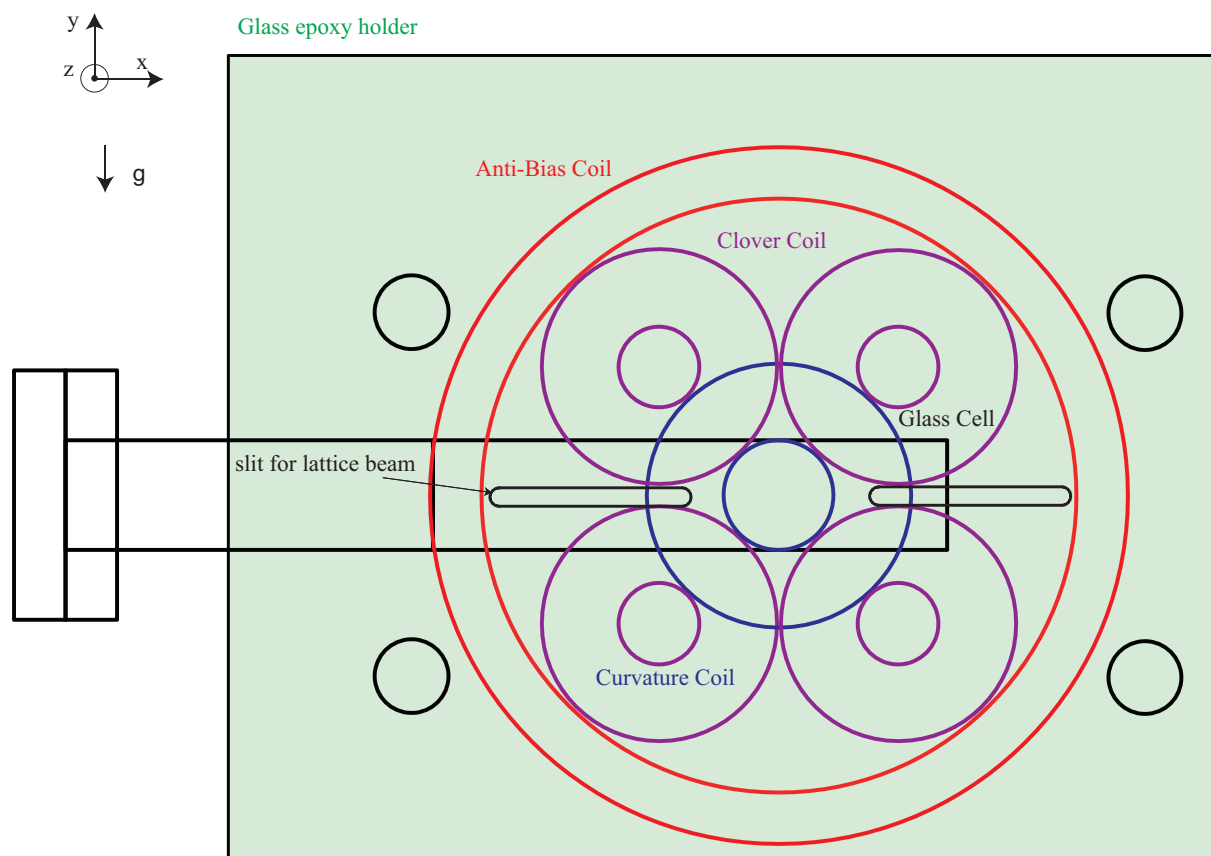


図 4.28: 磁気トラップコイルの配置の模式図（鉛直面）：コイルの配置を横から見たもの。光格子用の光が通るように Clover コイルを上下に離し、ガラスエポキシホルダーに穴を空けてある。

表 4.1: コイル間隔、コイルの巻き数、外径、内径。（設計値）

	コイル間隔	巻き数（動径方向×軸方向）	外径	内径
Clover	39.0 mm	$6 \times 6 = 36$	64 mm	22 mm
Curvature	86.2 mm	$6 \times 6 = 36$	72 mm	30 mm
Anti-Bias	60.4 mm	$4 \times 3 = 12$	190 mm	162 mm

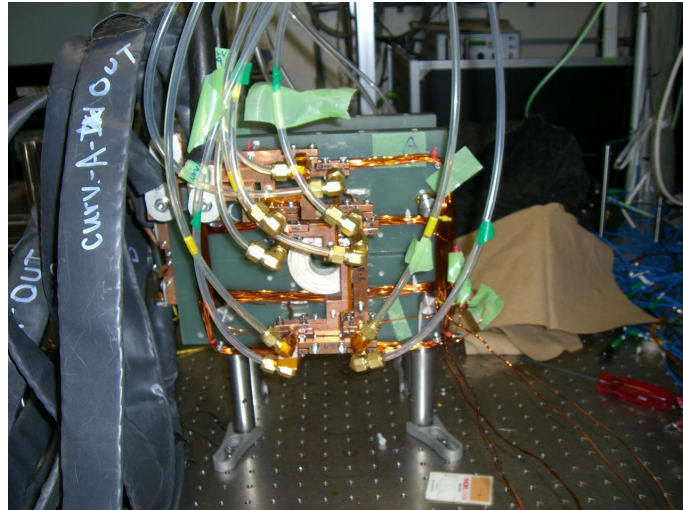


図 4.29: 作成した磁気トラップ

4.6.2 電流の制御回路

磁気トラップに流す電流は図 4.30 及び図 4.31 の回路によって制御されている。より詳しくは当研究室の学位論文に記載されている [117, 105]。Cloverleaf coil には 200A、Curvature 及び Anti-Bias coil には 150A の電流を流して磁気トラップを形成する。電流のオンオフは IGBT によって行っている。電流の立ち上がりを素早く行う為に容量の大きい (15mF) コンデンサを付属してある。これにより電流の立ち上がりの時定数を 5 ms 程度から 300 μ s 程度まで高速化してある。Curvature coil 及び Anti-Bias coil の回路にはそれぞれ単独で電流を流せる回路が付属してある。これを用いることにより磁気トラップの極小での磁場を増減することができる。また、Anti-Bias coil の回路は単独で光トラップ移行時のバイアス磁場を生成することにも用いられる。これによりフェッシュバッハ共鳴の利用が可能となる。使用している電源は高砂製作所の EX-1125-2 であり、この電流制度が磁場の精度を決定している。また 2nd MOT 用の磁場勾配を発生させる回路も付属している。他の多くの電源は菊水電気工業社製のものを使用している。型番名等の詳細は回路図を参照の事。

コイルの回路は感電を防ぐために接地はしない。各電源は外部端子により電流を外部コントロールできるようになっているが、この制御は絶縁アンプ (INA117) を通して行っている。

各コイルに流れる電流はホールプローブを用いて測定している。プローブ素子には、ULTRASTAB 867-200I (DANFYSIK) もしくは CLN-300 (FW Bell) を用いている。

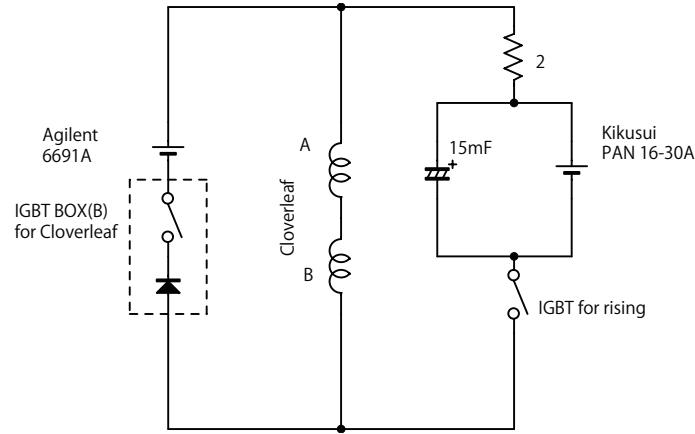


図 4.30: Cloverleaf コイルの回路

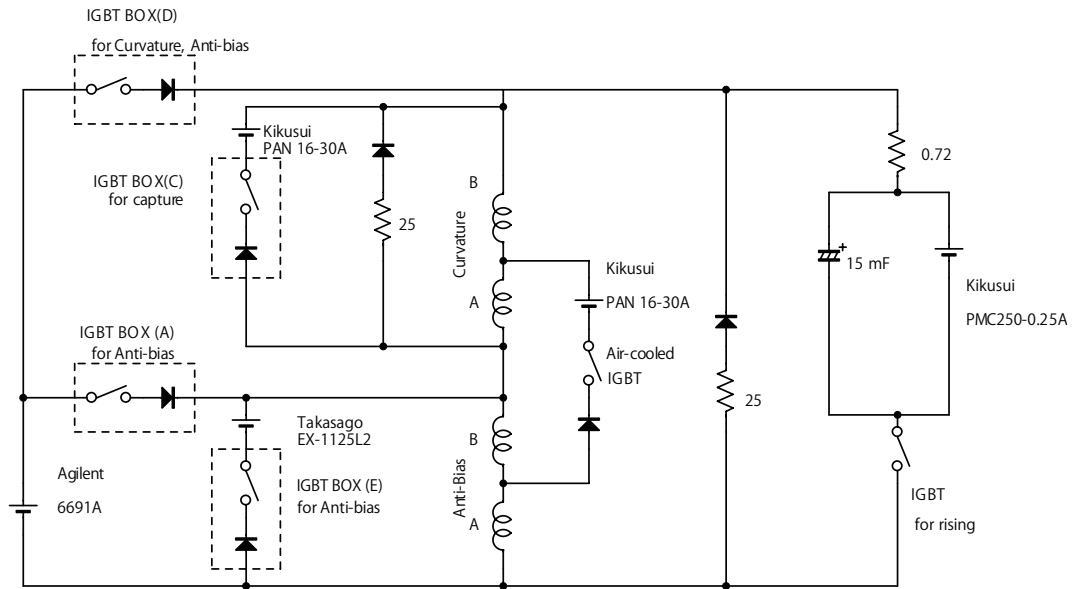


図 4.31: Curvature 及び Anti-Bias コイルの回路

4.6.3 磁気トラップの性質

トラップ周波数

設計された磁気トラップは主に次の二つの動作モードで実験が行われる。

1. 原子雲捕獲の為に緩く等方的なトラップ ("Catch" Trap)
2. 密度を高めて蒸発冷却を行う為にシガーシェイプのトラップ ("Compress" Trap)

1 の条件は次のモードマッチの条件から算出する。

$$\frac{1}{2}k_B T_{\text{MOT}} = \frac{1}{2}m\omega^2\sigma^2 \quad (4.11)$$

偏光勾配冷却後の Rb の温度を $50\mu\text{K}$ 、大きさを 1mm 程度と考えると、トラップ周波数は 11Hz 程度となる。

2 の条件は蒸発冷却を効率良く行う為、トラップ周波数はできるだけ高い方が良い。トラップ周波数は磁場トラップの底でのバイアス磁場 B_0 を下げることで大きくなるが、あまり小さくしすぎると、RF ノイズ等に弱くなる為実際に蒸発冷却の様子を見て決定する。

それぞれの場合の Rb に対するトラップ周波数を表 4.2 に示す。トラップ周波数は原子雲の Sloshing mode の観測による実測値である。K に対しては、質量の差の分だけトラップ周波数が大きくなる。即ち $\sqrt{87/41}$ 倍になる。

表 4.2: 磁気トラップのトラップ周波数、電流値、バイアス磁場 B_0

トラップ形状	トラップ周波数 ($\omega_{\text{ax}}/2\pi, \omega_{\text{rad}}/2\pi$) (Hz)	電流値 ($I_{\text{clover}}, I_{\text{curv}}, I_{\text{Anti-Bias}}$) (A)	バイアス磁場 B_0 (G)
Catch	(9.7, 13.4)	(74.5, 180, 150)	48
Compress	(9.2, 148)	(200, 150, 150)	3.6

バイアス磁場

Feshbach 共鳴等に使用するバイアス磁場は、Anti-Bias コイルを用いて発生させる。発生する磁場は 1.37 G/A である。完全なヘルムホルツ配置でない為、磁場の不均一性が問題になる可能性があるが、実際に磁場を測定したところ、動径方向に中心で極小値となり、単位電流辺りの磁場曲率は $B''_{AB, \text{rad}}/I = 6.2 \pm 0.1 \times 10^{-3}\text{ G/cm}^2\cdot\text{A}$ 、軸方向に中心で極大値となり、単位電流辺りの磁場曲率は、 $B''_{AB, \text{ax}}/I = 1.48 \pm 0.04 \times 10^{-2}\text{ G/cm}^2\cdot\text{A}$ であった。Feshbach 共鳴を利用する際に最大 100 G 程度のバイアス磁場をかけると考えると磁場曲率は最大で 1.48 G/cm^2 となるがこれは十分無視できる範囲である。

尚 Anti-Bias coil の配線により、予期せぬ磁場勾配が発生していることが分かった。図 4.28 の座標において $\partial B_z/\partial x$ の成分に相当する。これは Anti-Bias coil の配線の電流の入り口側と出口側が y 方向の上下に分かれていることが原因で、実際には打ち消すように配線すべきである。磁場勾配の大きさはバイアス磁場が 75 G の時に $\partial B_z/\partial x = 10\text{ mG/cm}$ 程度でほとんどの場合問題にならないが、光トラップのトラップ周波数が小さい実験の時に問題になる時がある [95]。

磁場の較正は Rb の超微細構造間の遷移を用いて行う。基底状態間のエネルギーは Breit-Rabi の公式より求めることができる [118]。0 G から 100 G の間で 10 G 単位程度ずつとることで較正する。較正による誤差は $\pm 10\text{ mG}$ 以下と考えられる。ただし数年で最大 100 mG 程度の磁場のずれが観測されているので、定期的に較正を行うべきである。

電流揺らぎによる磁場揺らぎが、精度をリミットする。電流源には図 4.32 の様に商用電源の交流周波数に由来するノイズが乗っている。揺らぎの大きさは 78 G 、すなわち電流 57 A の時、磁場揺らぎにして $\pm 50\text{ mG}$ 程度、電流で示すと $\pm 30\text{ mA}$ 程度である。揺らぎの程度は電流の絶対値に比例し、 $\Delta I/I = 5 \times 10^{-4}$ となる。ただし環境による磁場揺らぎがある為、電流値が小さくても $\pm 10\text{ mG}$ 程度の揺らぎは残ると考えられる。

バイアス磁場をどれだけ素早く変化させることができるかも、実験を行う上で重要である。電流の立ち上がり時間を測定すると、 $\tau_{AB} = 1.7 \text{ ms}$ である。抵抗が $R = R_{AB} + R_{IGBT} = 43 + 48 = 92 \text{ m}\Omega$ であるので (IGBT との合成抵抗を考えた)、インダクタンスは $L_{AB} = 160 \mu\text{H}$ となる。これは作成時に別々に測定した自己インダクタンス $55 \mu\text{H}$ の 2 倍より大きく、4 倍よりは小さいので、二つのコイルの相互インダクタンスが多少影響していると考えられる。概ね 10 ms 程度の時間スケールでは問題にならないが、数 ms 程度で磁場を変化させるときは、オーバーシュートやアンダーシュートが発生する為、Hall probe で実際の電流の様子を観測し、適時 Control voltage を修正して対応する。

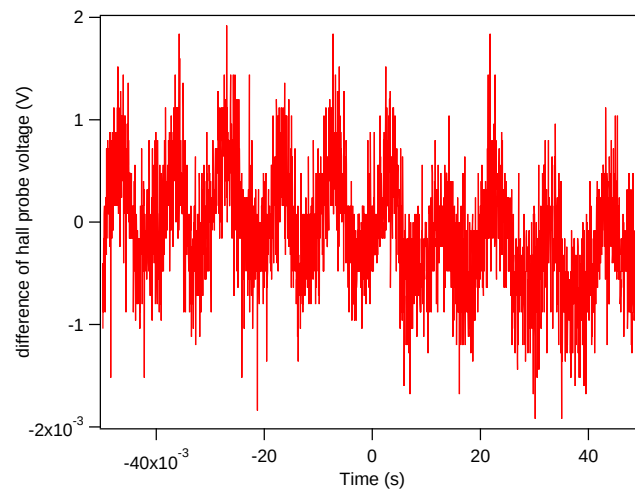


図 4.32: 電流ノイズ (@ 78 G)

4.6.4 補助コイル

磁気トラップ本体とは別に、実験の補助として次のコイルが設置されている。

バイアス用補正コイル

バイアス用補正コイルは光ポンピングの時の量子化磁場の発生や MOT と磁気トラップの位置調整等に使用する。任意の方向に数 G 程度の磁場が発生できる様に作成してある。ポリアミドイミド皮膜銅線 $\phi = 1 \text{ mm}$ を用いて製作した。これは、絶縁性、耐熱性、耐摩耗性等に優れている。これを長方形に巻いたものを二つずつ組み合わせることで、均一なバイアス磁場を作り出す。コイルの設計位は表 4.3 の通りである。電源は PAN16-10A (Kikusui) を使用し、電源のオンオフはソリッドステートリレー D1D40 (Crydom) を使用した。電源とソリッドステートリレーを二つ用いて、逆方向にも電流を流せるようにしてある。

表 4.3: 補正コイルの設計値、実測値:a (mm)×b (mm) の長方形電流を仮定、コイル間隔を d (mm) とする。

	d (mm)	巻き数	a (mm)	b (mm)	B (計算) (G/A)	B (実測) (G/A)
x	115	45	65	52.5	1.03	1.19
y	35	20	115	52.5	2.34	2.37
z	105	20	110	90	1.66	1.45

Stern-Gerlach 用コイル

磁場中の原子・分子は磁気モーメントに応じて、式 4.2 の様なポテンシャルを感じる。従って量子化磁場を z 方向とすると、磁場勾配に対して以下の力を受ける。

$$F_z = -\mu \frac{dB}{dz} \quad (4.12)$$

これを利用して、トラップから解放して自由落下しているときに、磁場勾配をかけることによって、原子のスピン状態や分子状態を磁気モーメントや質量に応じて分離することができる。もとの位置からのずれ Δz は一定の磁場勾配をかけてから t 秒後に、

$$\Delta z = \frac{1}{2} \frac{\mu}{m} \frac{dB}{dz} t^2 \quad (4.13)$$

となる。分子の分離測定は、高速に行う必要がある。従って大きな磁場勾配を素早くかける必要がある。これを達成するには径の小さいコイルを近くに設置するのが良い。従って磁場勾配専用のコイルを作成した。

実際に作成したコイルは図 4.33 に示す。バイアスコイルと同様に、ポリアミドイミド皮膜銅線 $\phi = 1 \text{ mm}$ を用いて製作した。エポキシの接着材を用いて形を固定している。コイルの設計は表 4.4 にまとめてある。また回路は図 4.34 の様になっており、最大 30 A の電流を流すことができる。この時の磁場勾配は 33.6 G/cm であり、立ち上がり時間は 242 μs である。従って充分大きな磁場勾配を素早く発生できている。



図 4.33: Stern-Gerlach 用コイル

表 4.4: Stern-Gerlach 用コイルの設計

巻き数	N_L	28 (一層目) + 27 (二層目) = 55
外形寸法		内径 22 mm、外径 27 mm、長さ 34 mm
コイル間隔	d	39 mm
コイル抵抗	R_L	0.32 Ω
ダイオード抵抗	R_d	0.14 Ω
立ち上がり時間	τ	242 μs
自己インダクタンス	L	18 μH
磁場勾配 (@ 30 A)	dB/dz	33.6 G/cm

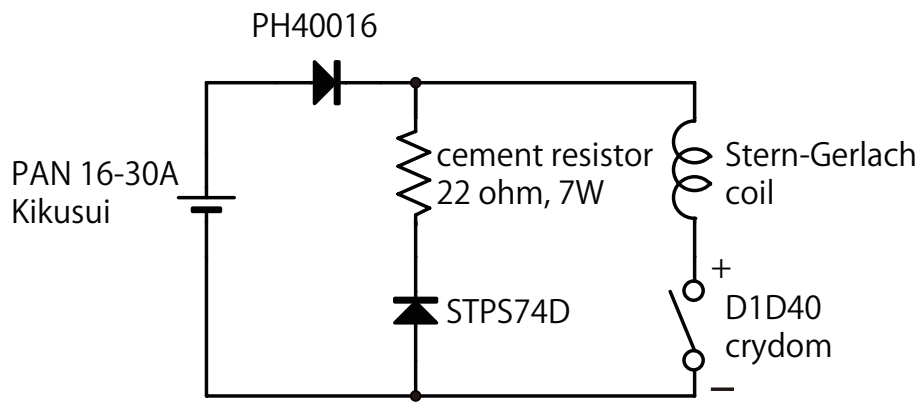


図 4.34: Stern-Gerlach 用コイルの回路

4.7 RF Antenna

内部状態の遷移には RF もしくはマイクロ波を用いる。これらを照射する為のアンテナとして、本研究では3つのアンテナを用いている。アンテナは全てポリアミドイミド皮膜銅線 $\phi = 1 \text{ mm}$ を用いて作成した。

一つは Rb の超微細構造間の遷移に用いるマイクロ波用のアンテナである。これには $\lambda/2$ ダイポールアンテナを用いた。これは長さ $\lambda/4$ の二つの棒からなるアンテナで棒に直行する向きに磁場を発生させる。Rb の微細構造間隔約 6.83 GHz でマイクロ波強度が強くなる様に波長 $\lambda = 4.39 \text{ cm}$ に合わせて作成してある。ピックアップコイルとスペクトラムアナライザにより非共振の長方形（縦 30 mm × 横 130 mm）アンテナと比較した所、+4 dB 程の出力の増加が見られた。

二つ目のアンテナは主に K の超微細構造間の遷移に用いる RF 用のアンテナである。これには 1λ ループアンテナを用いた。これは一周の長さが λ である円形のアンテナで、 $\lambda/2$ ダイポールアンテナを二つスタックしたものであると考ええると分かりやすい。円の平面に直行した向きに磁場を発生させる。K の超微細構造間隔 254 MHz に 72 G での Zeeman shift（後述）を加えた 440 MHz に共鳴が取れるように $\lambda = 68 \text{ cm}$ に合わせてある。実際には設置場所の都合から長方形の形をしてあり、縦 30 mm × 横 310 mm で作成した。ピック

アップコイルとスペクトラムアナライザにより非共振のアンテナと比較した所 440 MHz で、+13 dB 程の出力の増加が見られた。

三つ目のアンテナは RF 会合用の共鳴アンテナである。RF 会合に用いる為に 37.5 MHz に共鳴を持つように作成されている。この周波数では波長が長すぎる為 (2 m 超) コンデンサーを用いて共鳴を合わせてある。回路図は図 4.35 の様になっている。アンテナは L として表される。この回路は周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{L(C_1 + C_2)}$ で共鳴となり、回路全体のインピーダンスは実抵抗 $R = 50\ \Omega$ のみとなる。抵抗を流れる電流を i_0 とすると、アンテナを流れる電流は、 $i_L = i_0(1 + C_2/C_1)$ となりコンデンサーによって増幅される。アンテナは長方形の形をしており、縦 30 mm × 横 130 mm である。自己インダクタンスは実際にピックアップコイルとスペクトラムアナライザにより共鳴を観測することにより、 $L = 234\ \text{nH}$ と測定された。共鳴の測定の様子を図 4.36 に示す。同寸法の非共鳴アンテナと比較すると、出力の増加は 10 dB 程度である。

実際にはアンテナをどの様に配置するかも RF・マイクロ波の強度を高める上で重要である。即ち原子雲の近くに配置すればするほど、照射される RF の強度は強くなる。アンテナは図 4.37 の様にガラスセルの上下に K の超微細構造間隔用のコイルと RF 会合用の共鳴アンテナを配置し、マイクロ波用アンテナを上側の横に配置した。それぞれのアンテナは形が大きく異なるので、相互インダクタンスはそれ程大きくないと思われる。必要な周波数に応じてこれらを使い分けることで、それぞれの周波数で強度の高い RF・マイクロ波を使うことができる。

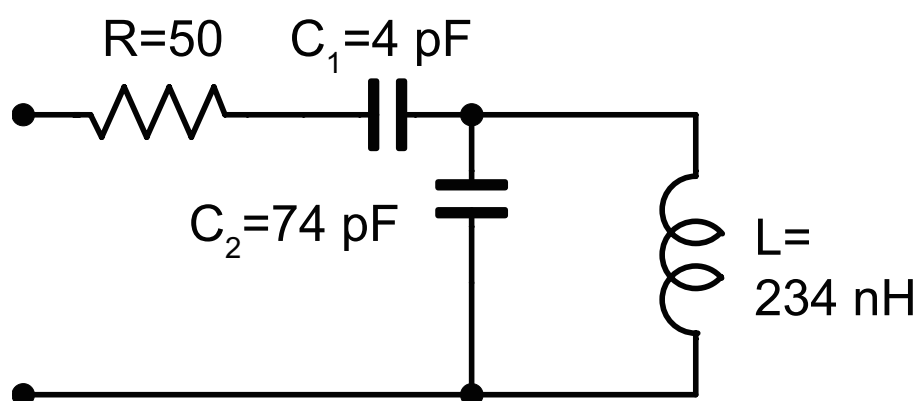


図 4.35: 共鳴アンテナ

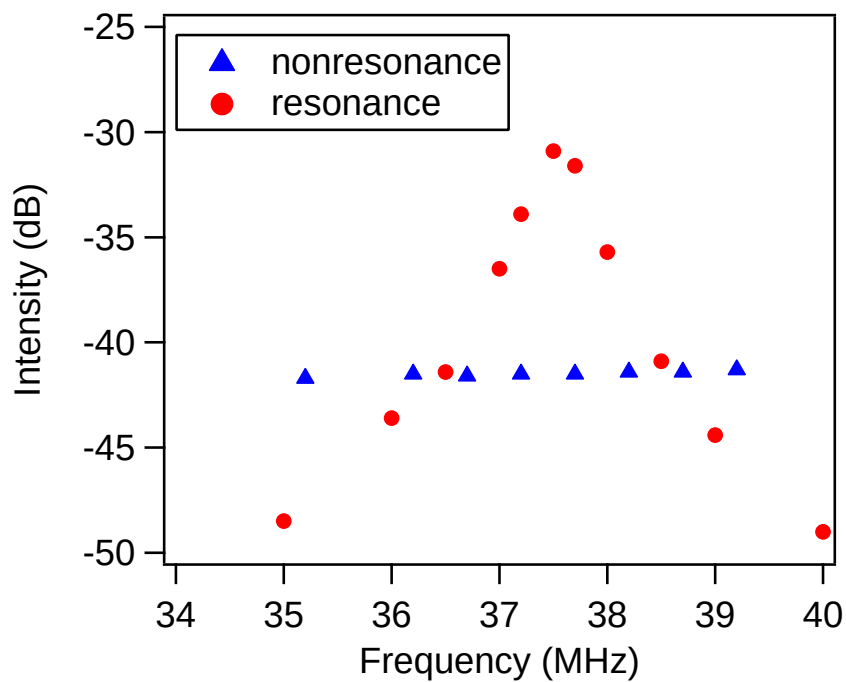


図 4.36: 共鳴アンテナの測定

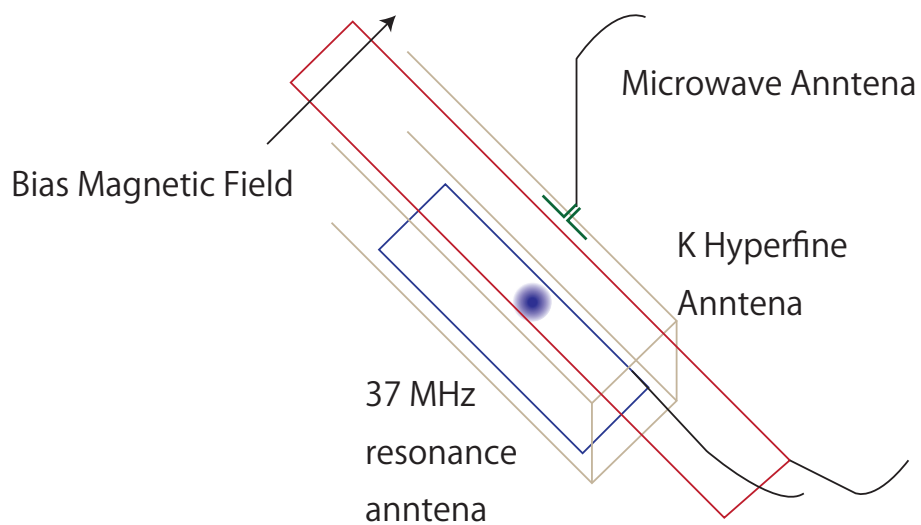


図 4.37: アンテナの配置の模式図

4.8 蒸発冷却

磁気トラップ中で蒸発冷却を行うことにより、原子を縮退領域まで冷却する。尚、磁気トラップ中で実際に縮退（BEC）が達成可能であるが、本研究ではその後光トラップへの移行や内部状態遷移を行う。その際縮退状態であると、密度が高くそれらの操作が非効率であるので、本研究では磁気トラップ中での蒸発冷却は縮退手前で止め、光トラップに移行する。縮退気体が必要な時は光トラップ中で更なる蒸発冷却を行う。

4.8.1 optical pumping

磁気トラップには ^{41}K 、 ^{87}Rb 共に $|F=2, m_F=2\rangle$ 状態で導入する。従って Time-dependent MOT の後、optical pumping を行う。どちらの原子に対しても、 $F=2$ から $F'=2$ の遷移 (m_F -pumping) 及び、 $F=1$ から $F'=2$ の遷移 (F -pumping) を用いる。 m_F -pumping で $F'=2$ への遷移を使う理由は、pumping 後に余計に光を吸収しないようにする為である。光は 1st MOT 側から push 光と同じパスを通して導入する。偏光が一致するように量子化磁場を補正コイルを用いて発生させる。pumping 時間は $200\text{ }\mu\text{s}$ で原子が拡散する前に素早く行われる。光の周波数は観測される原子の数が最大になる様に調整する。最終的な離長は図 4.12、4.13 の通りである。

4.8.2 原子の捕獲

原子の捕獲は節 4.6.3 で示した様にモードマッチの条件を満たす様に、磁気トラップの形を調整する。節 4.6.2 で示したように、電流の立ち上がりは高速化されているので、十分原子を捕獲できる。捕獲を効率良く（加熱無しに）行うには、磁気トラップの形に加えて、MOT と磁気トラップの位置を合わせるのが重要である。これには補正コイルによって、MOT 側と磁気トラップ側両面から位置合わせするのが良い。位置合わせはトラップ後の振動の様子を見て、振幅が小さくなるように調整すれば良い。位置と形を最適化するとほとんど加熱なく磁気トラップに移行することができる。ただし、二原子種の場合に同時に最適にするのは条件が難しいので、最終的には原子数のバランスを見ながら条件を合わせる。基本的には Rb に合わせると、後の蒸発冷却の効率が良くなるので実験がしやすくなる。

またこの時点で原子のトラップ寿命を測定すると、図 4.38 のようになる。寿命は 90 秒前後であり、蒸発冷却に十分な時間が確保されている。また 10^{-11} torr 台の超高真空が保たれていることが分かる（真空ゲージの測定限界以下）。

原子捕獲後に電流値を変化させて、シガーシェイプのトラップへと移行し、断熱圧縮を行う。捕獲 3 s と圧縮 2 s の合計 5 s の時間をこの過程に使う。これにより密度が高くなり ($5 \times 10^{11} (1/\text{cm}^3)$ 程度) 蒸発冷却が効率良くなる。

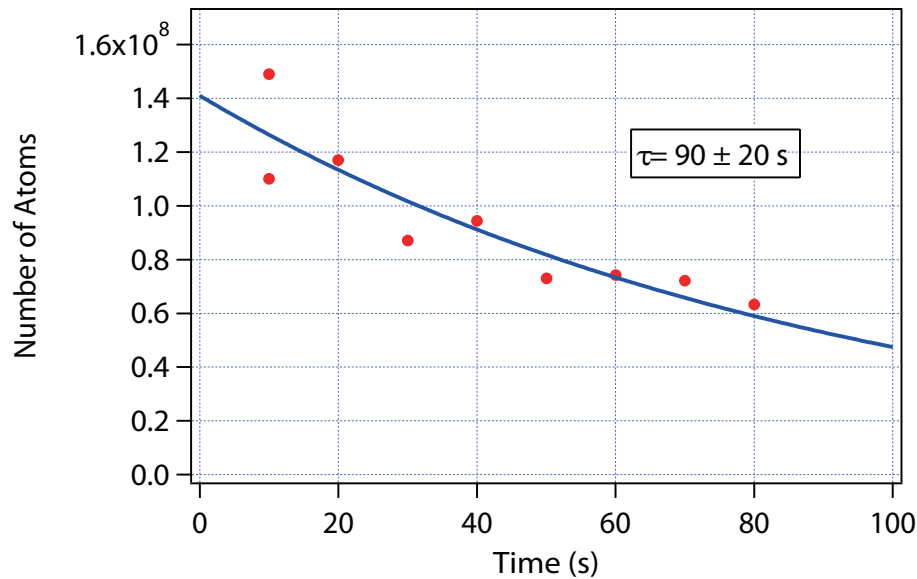


図 4.38: 磁気トラップのトラップ寿命の測定

4.8.3 microwave induced evaporation

磁気トラップ中での蒸発冷却は、 ^{87}Rb の超微細構造間の遷移を用いて行う。即ち ^{87}Rb の $|F=2, m_F=2\rangle$ から $|F=1, m_F=1\rangle$ の遷移を用いて行う。マイクロ波の周波数を Sweep していくことによって、熱い原子から順にトラップから除去していくことができる。

DDS control

周波数源には当時井上研究室の学生であった、藤掛氏が作成した DDS(Direct Digital Synthesizer) のシステムを用いた [119]。DDS は 0-400 MHz の周波数を時間的に変化させながら、発生させることができる。各時間の周波数の設定には LabVIEW のプログラムを用いており、メインのプログラムからのトリガーにより動作するようになっている。Rb の超微細構造間隔は約 6.8 GHz であるので、シグナルジェネレーター SMR20(Rohde Schwartz) で約 6.8 GHz を発生させ、Mixer を用いて合成し、そのサイドバンドで蒸発冷却を行う。マイクロ波は合成後にマイクロ波アンプ VG35M(VEGA technology) で増幅している。

標準的な蒸発冷却のタイムシーケンスを図 4.40 に示す。キャリア周波数は 6.8404 GHz である。始めの 3 秒間はクリーニングのシーケンスと呼んでおり、原子捕獲のシーケンスの時に進行。周波数を上下させることで、 $|F=2, m_F=1\rangle$ 成分を $|F=1, m_F=0\rangle$ への遷移を用いて除去することができる。 $|F=2, m_F=1\rangle$ は非弾性衝突を引き起こし、蒸発冷却の効率を悪化させる。蒸発冷却中もキャリア周波数を $|2, 1\rangle$ が除去されるように調整すると、蒸発冷却の効率が良くなる。その後、圧縮の 2s の間に周波数を変化させ、その後から通常の蒸発冷却のシーケンスが開始される。周波数の変化は原子数と、位相空間密度の変化を見て、位相空間密度が原子数の減少に対して効率良く上がる様に調整する。ほとんどは Rb 単体で蒸発冷却を最適化すれば十分である。

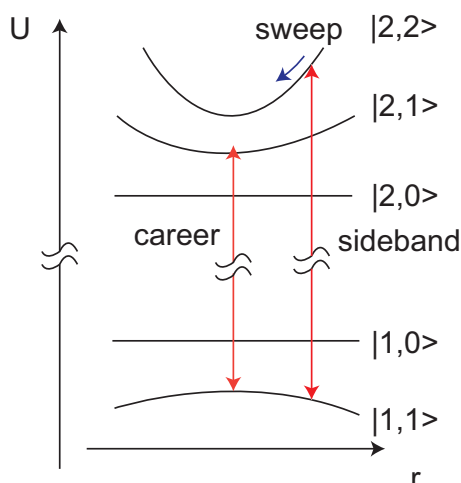


図 4.39: Microwave induced evaporation

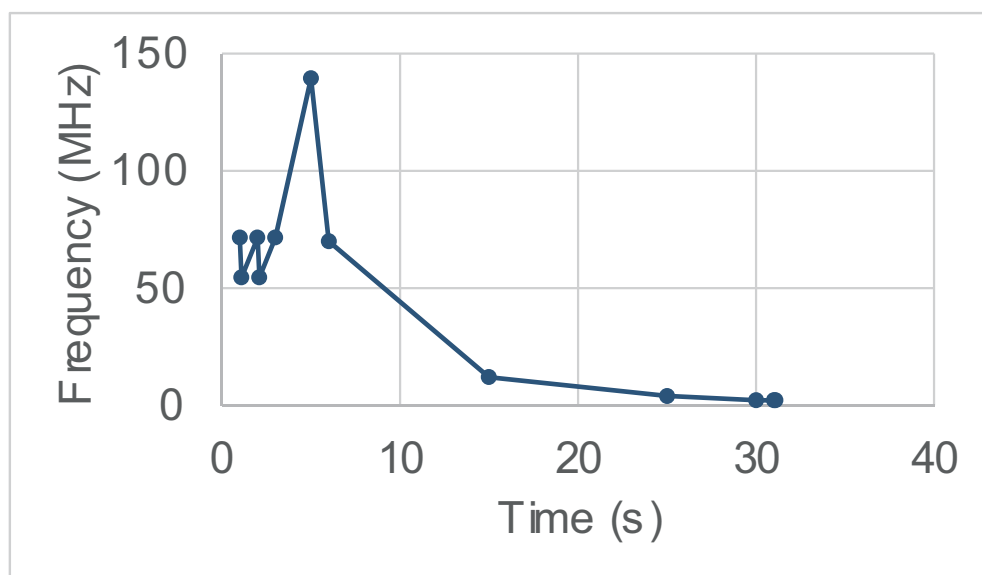


図 4.40: 蒸発冷却のタイムシーケンス: Career frequency 6.8404 GHz

4.8.4 二原子種蒸発冷却

蒸発冷却中の位相空間密度と原子数の変化の一例を図 4.41 に示す。蒸発冷却の効率は、位相空間密度が原子数の減少に対してどれだけ上昇するかで評価できる。即ち、

$$\log \text{PSD} = a \log N + b \quad (4.14)$$

としたときの a の絶対値が大きい程、効率が良いという事になる。Rb 単体ではこの値は 2.5 程度になる。K と同時に蒸発冷却を行うとこの値は、悪化し、1.7 程度になる。ただし、この値は K の原子数に大きく依存する為、実際には蒸発冷却の最後を見て K を増減させ、同時 BEC を目指すことになる。Rb の蒸発冷却の効率は、温度が $2\mu\text{K}$ 程度から K

の影響を受け効率が悪くなる。この時、Rbの原子数はKの原子数の10倍程度である。条件を最適化したときのBECの最大数はRb単体で $N_{\text{Rb}} = 1 \times 10^6$ 個程度、K、Rb同時に蒸発冷却を行ったとき $N_{\text{K}} = N_{\text{Rb}} = 1 \times 10^5$ 個程度である。通常は $1\mu\text{K}$ まで冷却した段階で光トラップに移行する。

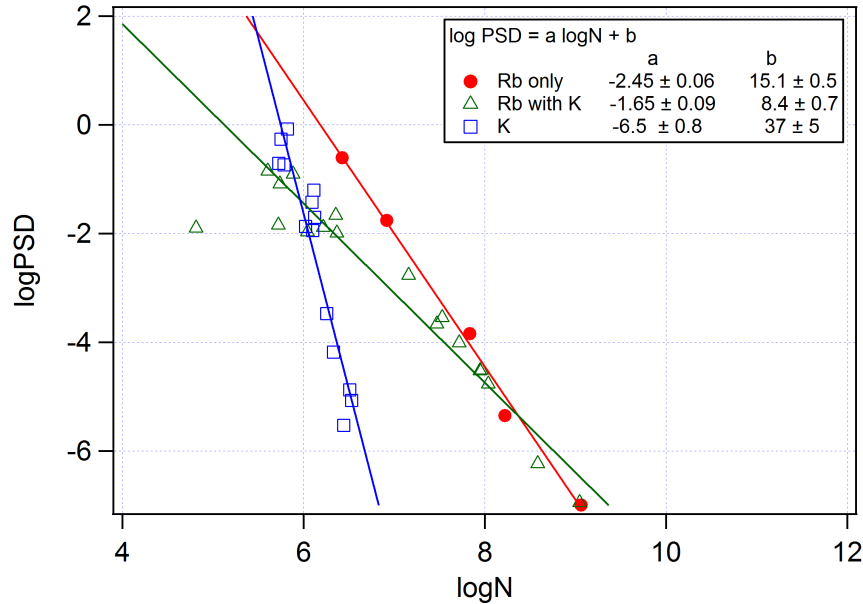


図 4.41: 蒸発冷却中の原子数と位相空間密度の関係

4.9 光学系の設計

本節では実験で用いる光学系の全体の設計について述べる。各要素の説明については次節以降を参照の事。また、筆者の修士論文 [114] において同様の設計について詳しくのべてあるので、必要に応じてそちらを参照の事。本研究で用いる、光学系の要素として以下のものが挙げられる。

1. MOT(3 軸: 6 ビーム)
2. Imaging(2 軸: Top, Side)
3. 光トラップ(2 軸+1 軸: Main(P 軸), Cross(A 軸), 光格子と共用 (B 軸))
4. 三次元光格子(水平 2 軸、垂直 1 軸)

その他に吹き飛ばし光等が存在する。また将来的には STIRAP 用の光を導入することも考慮に入れて設計されている。図 4.42、図 4.43 にガラスセル周辺の光学系の配置を示す。各光軸は便利の為、それぞれにアルファベットによりラベル付けされている。パスが重なっている所は波長 (dichroic mirror: short wave pass(SWP) 及び long wave pass(LWP) の二種類が存在する。LWP: 1080 nm 反射、809 nm & 780 nm & 767 nm 透過、SWP: LWP と反射と透過が逆) 及び偏光 (PBS) によって分岐及び重ね合わせを行っている。dichroic

mirror に円偏光を斜めに透過させると、偏光が崩れてしまうので、1/4 波長板と 1/2 波長板を用いて楕円偏光を適切な角度で入射させることで、透過後の偏光がきれいな円偏光になるように調整してある。V 軸は Imaging (TOP) 及び光格子 (垂直)、A 軸は Imaging (Side)、光トラップ (Cross)、MOT が重なっている。また光格子の水平 2 軸 (B 軸、C 軸) には、アライメントの為に簡易的な Imaging を重ねている。将来的には C 軸の imaging のパスから STIRAP 用の光を導入する予定である (641 nm 及び 875 nm[120])。B 軸の打ち返し側には、ソレノイドシャッターが設置してあり、打ち返しをシャッターで切ることにより、光トラップとしても使用できるようにしてある。また P 軸には二つの波長の光トラップが存在する。フリッパーミラーを用いることによって、ビーム径の異なる二つの 809 nm の光を切り替えることができる。光トラップ等の各要素の詳細については次節以降に説明する。

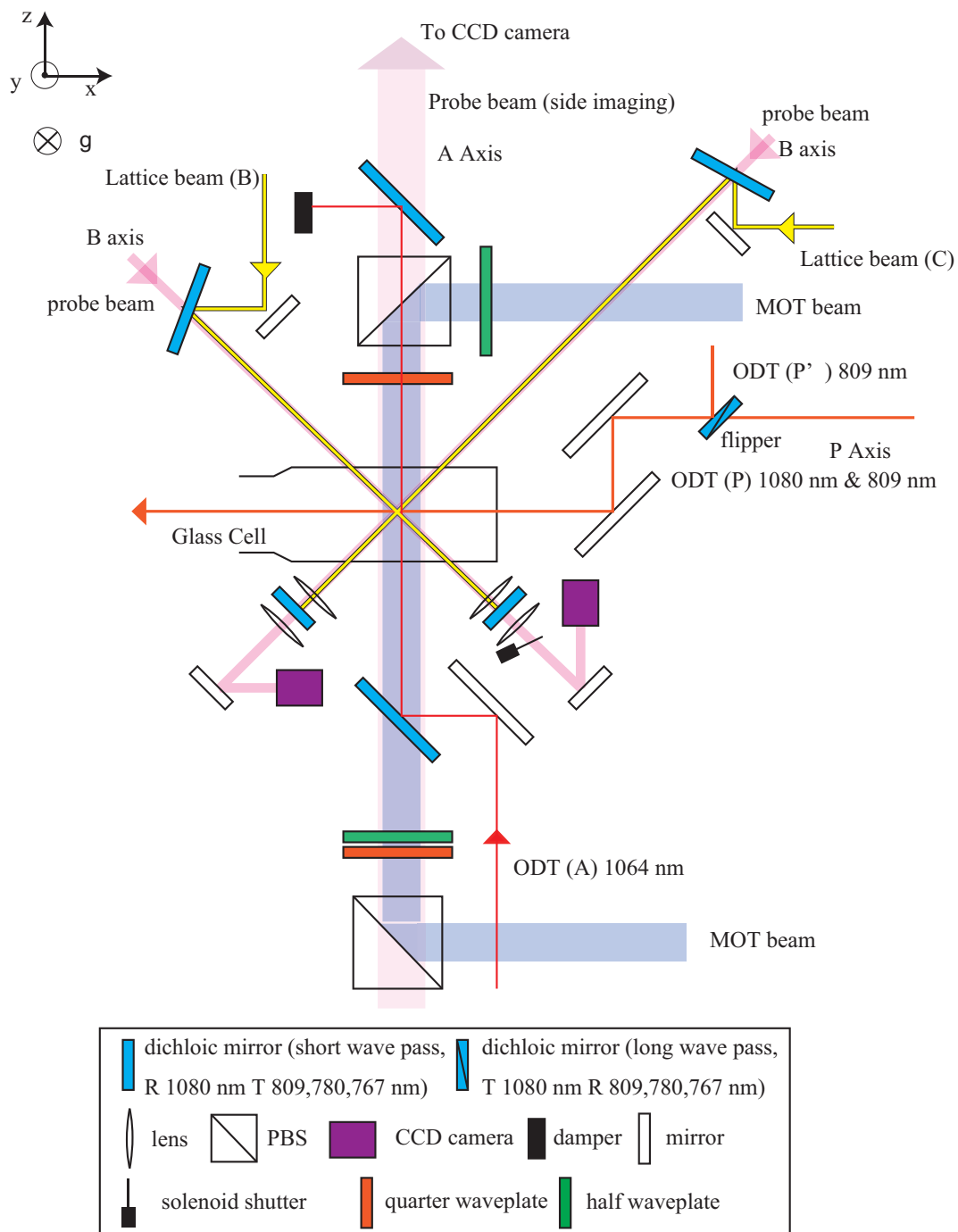


図 4.42: ガラスセル周辺の光学配置 (上面図)

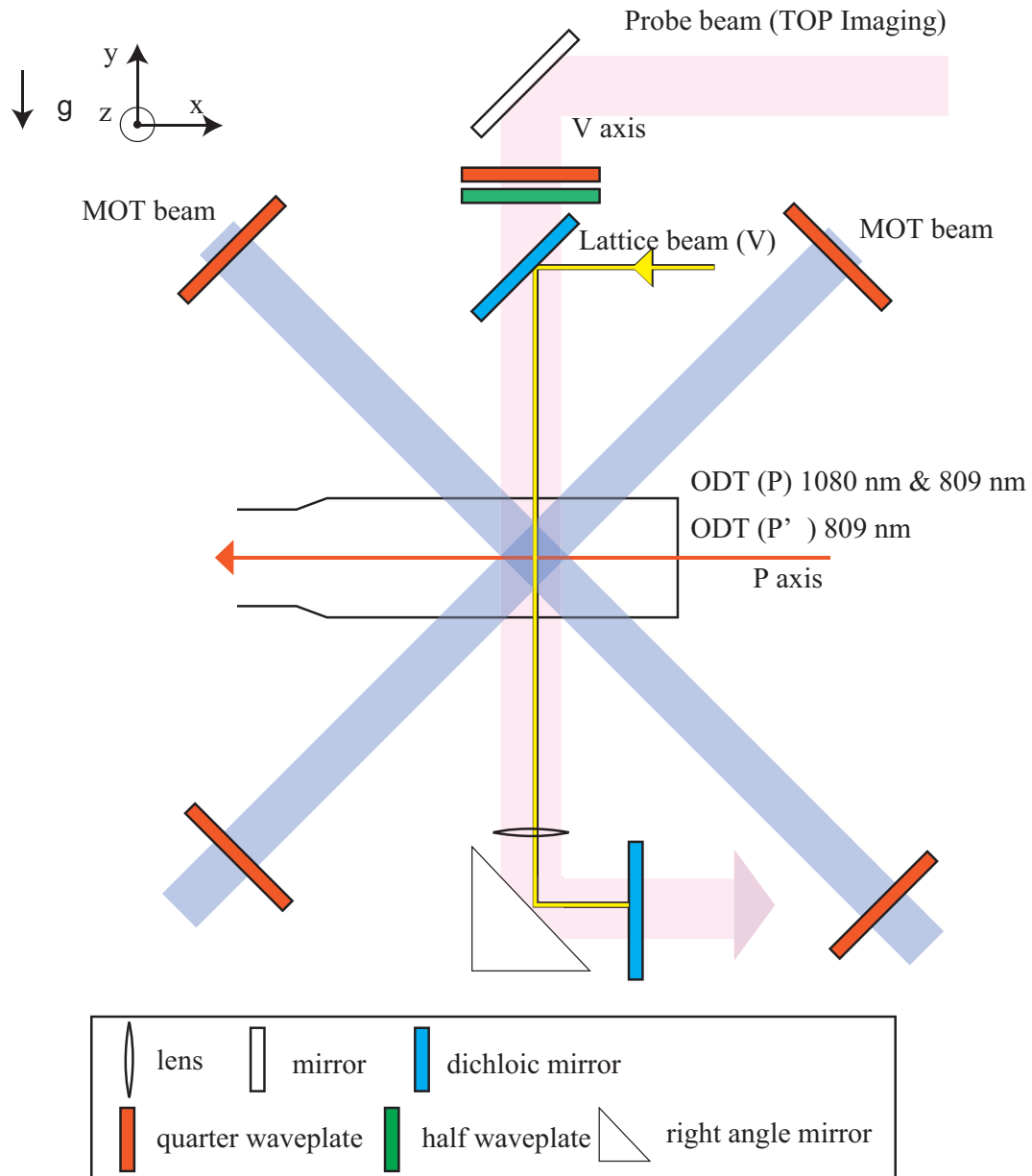


図 4.43: ガラスセル周辺の光学配置 (正面図)

4.10 光トラップ・光格子

本節では、光トラップ・光格子について述べる。光トラップの原理については付録Bで述べている。また、光トラップ・光格子中の原子の振る舞いについては、第3章で述べている。本節では、光トラップ・光格子の実装について詳しく述べる。本研究は原子雲の密度に依存する現象が強く関わってくる。従ってこれらの外部ポテンシャルの制御は非常に重要である。

4.10.1 トラップ波長の選択

光トラップ・光格子に用いる光の波長は、ポテンシャル深さと光散乱レートを考慮して選択する必要がある。光の離長に対して、ポテンシャル深さと光散乱レートは式 B.13 の関係が有る為、離長を大きくすればするほど、ポテンシャル深さに対する、光散乱レートは低くなる。ただし、あまり離長を大きくし過ぎると、より大きな光強度が必要となる為、入手可能なレーザーを考え、適切な波長を決定する。波長 1064 nm 付近には高出力で安定な光源が入手可能であり、K 原子及び Rb 原子からの離長を考えると、十分なポテンシャル深さが達成でき、光散乱レートも十分低い。従って波長 1064 nm 付近は選択肢として理想的である。本研究では、以上に加えて分子からの光散乱も考慮する必要がある。分子の場合は多数の振動・回転基底状態が存在する。これらの準位間の遷移の線幅はそれ程大きくないが、多数ある為、直接共鳴を打つ危険性がある。KRb の場合、理論計算によると [121]、1064 nm 付近にはいくつかの遷移が存在する。波長 1064 nm は直接遷移を打っていないが、振動準位と振動準位の間に存在する為、光散乱レートが高くなる危険性がある。波長 1080 nm であれば、周りにほとんど振動準位が存在せずより安全であると考えられる。波長 1080 nm は Yb-doped ファイバーレーザーのゲインのほぼ中心であり、高出力なレーザーが容易に手に入る。従って、我々は一つ目の波長として、1080 nm を選択した。光トラップ 2 軸と三次元光格子はこの波長を用いる。光源については節 4.10.2 で詳しく述べる。

本研究ではさらにもう一つの波長の光を光トラップ 1 軸用に用いている。Feshbach 分子を高効率に生成する為には、 ^{41}K 原子雲と ^{87}Rb 原子雲の空間的重なりを十分にとる必要があるが、 ^{41}K と ^{87}Rb の質量が異なる為、通常良く使われる波長 $1\ \mu\text{m}$ 付近の光トラップでは、トラップ周波数に差が生じ、B.1.5 節で述べた重力サグの効果により式 B.24 のようにトラップ位置がずれてしまう。このずれ（相対重力サグ）は BEC の Thomas-Fermi 半径と同程度である為、 ^{41}K と ^{87}Rb は空間的にほぼ完全に分離してしまうことになる。そこでこの相対重力サグを無くす光トラップとして、以下の二つが考えられる。

1. 重力方向に強く偏平した光トラップ（パンケーキ型トラップ）
2. 重力サグが等しくなるような波長の光トラップ

まず 1 の方法であるが、これは重力方向のビームウエストを小さくし、トラップ周波数を共に大きくすることで相対重力サグを小さくする方法である。しかし、この方法では密度が高くなりすぎてしまい、非弾性衝突によって原子数が大きく減少してしまうという問題がある [122]。

一方 2 の方法であるが、これは既に ^{40}K と ^{87}Rb の混合原子気体の実験で実践されている [123]。式 B.21 より、

$$\frac{\omega_{41\text{K}}}{\omega_{87\text{Rb}}} = \sqrt{\frac{U_{41\text{K}}}{U_{87\text{Rb}}}} \sqrt{\frac{m_{87\text{Rb}}}{m_{41\text{K}}}} \quad (4.15)$$

であるから、 $\omega_{41\text{K}}/\omega_{87\text{Rb}} = 1$ となる為には、

$$\frac{U_{41\text{K}}}{U_{87\text{Rb}}} = \frac{m_{41\text{K}}}{m_{87\text{Rb}}} = \frac{87}{41} \cong 2.1 \quad (4.16)$$

となるような波長があれば良い。 ^{41}K の D_1 、 D_2 線はそれぞれ 770 nm 、 767 nm であり、 ^{87}Rb の D_1 、 D_2 線はそれぞれ 795 nm 、 780 nm である。ポテンシャル深さは離調に反比例し、質量の大きい ^{87}Rb の共鳴線の方が長波長側にあるので、式 4.16 を満たす波長は赤方離調側に存在する (図 4.44)。

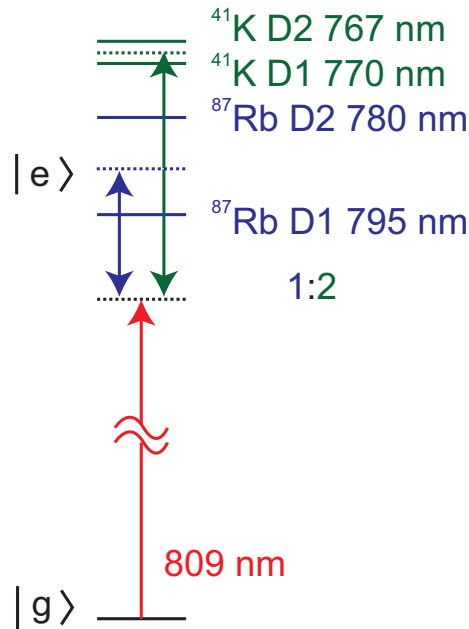


図 4.44: 809nm と共鳴線の関係

式 B.14 より、波長を求めると $\lambda = 808.8\text{ nm}$ となる。ここで、 808.8 nm は共鳴線、特に ^{87}Rb の D_1 線 795 nm に近い為に、光散乱が起きやすいことに注意しなければならない。半導体レーザーの自然発光等により、共鳴をたたいてしまうと光散乱によって原子が加熱されてしまう。よって光源には十分注意する必要がある。光源については節 4.10.3 で詳しく説明する。

4.10.2 1080 nm 光源

1080 nm の光源はファイバーレーザーを用いている。まず種光として、NP photonics 社製のシングルモードファイバーレーザーを用いている。これの出力は 10 mW 程度で線幅は 1 kHz 程度である。これを Nufern 社製のファイバーアンプ二台によって増幅している。出力は 10 W ずつであり、合計 20 W が使用できる。これらを分岐し光トラップの各軸に導く。出力は AOM で制御し、各軸の干渉を防ぐため 10 MHz 以上の周波数差をつけてある。出力が高い為、AOM の 0 次光等は適切に処理する必要がある。0 次光は damper を用いて光を吸収させ処理している。また PBS は接合部に接着材を用いないオプティカルコンタクトで製作されたものを用いている。

4.10.3 809 nm 光源

809 nm の光源は半導体レーザーである。この光源については、筆者の修士論文に詳しく書いてある [114]。この波長の周辺は高出力な半導体レーザーが容易に手に入る。最終的に必要な光のパワーは 100-200 mW 程度である。ECDL を種光として用い、レーザー冷却光源と同様に injection locking と TA の 2 段階の増幅により、最終的な出力を得る。初期の最終出力は 100 mW 前後であったが、最近高出力の TA を用いることにより、500 mW 以上の出力を得ることができ、十分な出力が得られている。図 4.45 に光源の概要を示す。自然発光成分を除去する為に、TA の前後に VPH grating (edmund:VPH1200GR) を用いている。回折効率は 90% 程度である。

光スペクトラムアナライザによって、ASE の波長分布を観測すると図 4.46 赤線に示すように自然発光成分が ^{87}Rb の D_1 線 795 nm まで広がっていることが分かる。ここで、自然発光成分による光散乱レートを大ざっぱに見積もってみる。共鳴での光散乱レートは、式 B.30 から求めることができる。ASE 成分のパワーは 20 mW 程度である。これが図 4.46 赤線から幅 6.7×10^{12} Hz 程度の間に分布している。よって波長 795 nm の付近における ^{87}Rb の自然幅 6 MHz 程度に含まれるパワーは図よりピークの 40dB 下がっている程度なので、

$$P_{795\text{nm}} \simeq 20 \text{ mW} \times \frac{6 \times 10^6 \text{ Hz}}{6.7 \times 10^{12} \text{ Hz}} \times 10^{-4} \simeq 1.8 \times 10^{-9} \text{ mW} \quad (4.17)$$

となる。ここで飽和強度 $I_s = 1.6 \text{ mW/cm}^2$ であり、ビームウェスト $w_z = 400 \text{ }\mu\text{m}$ 、 $w_y = 40 \text{ }\mu\text{m}$ 程度に絞ると考えると光散乱レートは、

$$\begin{aligned} \Gamma_s &\simeq \frac{I_{795\text{nm}}}{I_s} \Gamma \\ &\simeq \frac{1}{1.6 \text{ mW/cm}^2} \times \frac{1.8 \times 10^{-9} \text{ mW}}{\pi \times 400 \times 10^{-4} \text{ cm} \times 40 \times 10^{-4} \text{ cm}} \times 2\pi \times 6 \times 10^6 \text{ Hz} \\ &\simeq 80 \text{ [1/s]} \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。809 nm の光トラップに数 100 ms 程度トラップすると考えると光散乱レートは、1 [1/s] 以下になることが望ましい。よって ASE の成分を 20 dB 程度下げる必要がある。Grating 追加後の図 4.46 青線を見てみると、自然発光成分は測定限界以下まで下がっており、十分自然発光成分を除去できていると考えられる。

最初の二本はP軸に通っている。波長は1080 nm 及び 809 nm の二本である。これを ODT (P) 1080 nm、809 nm と呼ぶ。パスは重ねてあり、1080 nm から 809 nm に移行できるようになっている。ビームは楕円型になっており、水平方向のビーム径はシリンダカルレンズ及び手動ステージにより 1080 nm 及び 809 nm が連動して調整できるようになっている [114]。ビーム径は sloshing mode と強度の測定により測っており、 $(w_z, w_y) = (100 - 700, 82) \mu\text{m}$ (for 1080 nm) 及び $(w_z, w_y) = (70 - 700, 76) \mu\text{m}$ (for 809 nm) となる。水平方向のビーム径は用途に応じて変更し、その都度トラップ周波数を測定し、ビーム径を校正する。

また P 軸にはもう一本 809 nm が通っている。これはフリッパーミラーによって上記の 809 nm と入れ替えることができる。これを ODT(P') 809 nm と呼ぶ。ビーム径は $w_z = w_y = 50 \mu\text{m}$ でより tight なトラップを実現したいときに用いる [95]。ODT(P) 及び ODT(P') は 1080 nm を最大 3.5 W 程度、809 nm を最大 200 mW 程度利用することができ、重力方向のビーム径も小さく、主に重力方向を支えるのに用いる。809 nm を用いれば K と Rb の相対サグの解消することができる。

次の一本は A 軸に通っている。波長は 1080 nm である。これを ODT(A) と呼ぶ。鉛直方向のビーム径は調整可能であるが、本研究では固定で用いる。ビーム径は $(w_x, w_y) = (72, 91) \mu\text{m}$ である。磁気トラップから光トラップへの移行時に ODT(P) の補助として用いられる。またコンファインメントを強くしたい時に用いられる。最大 1 W の出力が利用可能である。

最後の光トラップは光格子のビームを用いる。軸は B 軸である。これを ODT(B) と呼ぶ。光格子のうしろ側にソレノイドシャッターがあり、ODT として用いることができる。ビーム径は $w = 300 \mu\text{m}$ で他のトラップの補助として、トラップ周波数を低くしたい時に用いる [95]。

4.10.5 Dual BEC の生成

Dual BEC は光トラップ中で生成する。フェッシュバハ共鳴を利用する為に、K 及び Rb が $|1, 1\rangle$ 状態の Dual BEC を生成する必要がある。磁気トラップから光トラップへの移行の際はマヨラナ遷移を防ぐために、磁場の 0 点が出現しないように磁気トラップを立ち下げる必要がある。磁気トラップ中では磁場は、Curvature coil が作る磁場の向きを向いている。Feshbach 共鳴を利用する為の磁場は Anti-Bias coil で発生させる為、磁場の向きを反転させる必要がある。従って 0 点が存在しないように、これらの垂直方向に補正コイルにより磁場を発生させておき、磁気トラップを立ち下げる。

磁気トラップ立ち下げ時に磁場の極小点が動くので、先に光トラップを立ち上げておき、ある程度原子が光トラップに集まった時点で、素早く磁気トラップを立ち下げることではほとんどの原子を移行可能である。ただし、素早く蒸発冷却が生じ温度・原子数共に減少する。

光トラップのアライメントはイメージングと共通のパスの場合は、光トラップと原子の位置を直接みることで精度良く合わせることができる。P 軸についてはイメージングが存在しないが、pumping 光と共通のパスであるので、まずそれとトラップ光をあわせて粗調する。さらに共鳴光を光ファイバーを用いて同じパスに入れ、原子を吹き飛ばすように調整することでさらに精度良く合わせることができる。最終的には実際にトラップを行い、

トラップ後に振動が起こらないように微調することで、精度の良いアライメントが可能である。

光トラップ移行時に温度 $T_K = T_{Rb} = 1 \mu\text{K}$ 程度、原子数 $N_K = 4 \times 10^5$ 個程度、 $N_{Rb} = 4 \times 10^6$ 個程度が典型的な温度と原子数である。始めは ODT(P) と ODT(A) の波長 1080 nm の交差型光トラップに導入する。1080 nm の光トラップ中でのトラップ寿命は 10 s 以上であり十分光散乱は抑制されている。

Adiabatic rapid passage

磁気トラップ中では K、Rb 共に $|2,2\rangle$ 状態であるので、 $|1,1\rangle$ 状態へと ARP(Adiabatic rapid passage) を用いて、遷移を行う。具体的には RF もしくはマイクロ波をある磁場での $|2,2\rangle - |1,1\rangle$ 遷移の共鳴周波数に合わせておき、その磁場を超える様に磁場をスイープすることで $|1,1\rangle$ へと断熱的に遷移させる。これは内部状態の遷移には一般的な方法である。磁場を固定し、RF 周波数をスイープすることでも同様の遷移が可能であるが、我々の実験装置では磁場をスイープしたほうが効率が出やすいことが分かっている。これは磁場揺らぎによるデコヒーレンスの影響が、磁場スイープの方が少なくなる為であると考えられる。

ARP は $K|1,1\rangle$ - $Rb|1,1\rangle$ 間の相互散乱長が $0 a_0$ 近くになる 72 G 付近で行われる。我々の場合、K と Rb をそれぞれ遷移させる必要がある。この時、順番にもしくは同時に遷移させる必要があるが、この順番が効率に大きく影響を与える。同時もしくは、K の ARP を先に行った場合、以下のスピン交換衝突が起きる。

$$Rb|2,2\rangle + K|1,1\rangle \rightarrow Rb|2,2\rangle + K|1,1\rangle \quad (4.19)$$

この際、超微細構造間のエネルギーの差 (Rb:約 6.8 GHz、K:約 254 MHz) の分だけ加熱が起き、トラップからのロスにつながる [101]。従って Rb の ARP を先に行う。尚 $Rb|1,1\rangle - K|2,2\rangle$ 間の散乱長は 72 G 付近で $-2200 a_0$ 程度である [101] ので、こちらの過程も三体衝突によるロスが起きるが、密度が低ければほとんど問題にならない。

Rb の ARP は 10 ms、K の ARP は 5 ms で行われる。スイープ時間と RF の強度を最適化した結果、遷移効率はどちらも 90% 程度である。この際 Rb の方が数が多く、10% 程度の残った $Rb|2,2\rangle$ 状態も K との非弾性衝突を引き起こし、後の蒸発冷却の効率を悪化させる。従って Rb の ARP と K の ARP の間に Rb の $|F=2, m_F=2\rangle \longleftrightarrow |F'=3, m'_F=3\rangle$ の遷移に対応する共鳴光により、残った $Rb|2,2\rangle$ 状態を吹き飛ばしている。

光トラップ中での蒸発冷却

光トラップ中でトラップ深さを下げていくことで蒸発冷却を行う。重力ポテンシャルの傾きは Rb の方が大きいので、Rb が優先的に除去されていく。従って Rb の原子数を多めに用意する必要がある。K-Rb 間で熱緩和が起きやすいように、フェッシュバハ共鳴により相互の散乱長を $250 a_0$ 程度に調整し、蒸発冷却を行い Dual BEC を生成する。実際に生成した Dual BEC のイメージ画像を図 4.47 に示す。最大で $N_K = N_{Rb} = 1 \times 10^5$ 程度の Dual BEC が生成できる。尚 1080 nm の光トラップ中では、Dual BEC は重力サグの影響

で空間的に離れているが、TOF 中に原子雲が広がると衝突が起きることを水平方向のイメージングにより確認している。相互散乱長の値によってこれは原子数の減少につながる [95]。従って磁場勾配をかけ、空間的に分離すると TOF 中のロスを抑えることができる。

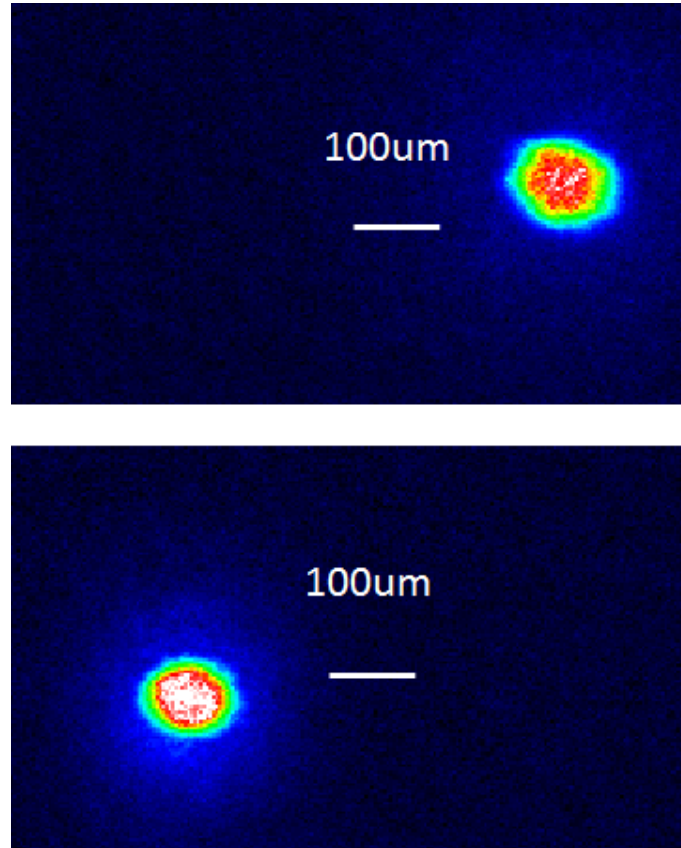


図 4.47: 1080 nm 光トラップ中の Dual BEC:

上（下）の画像が K(Rb) のイメージである。TOF 時間は 35.7 ms(36.3 ms) である。原子数は $N_K = 9.5 \times 10^4$ 個、 $N_{Rb} = 9.1 \times 10^4$ 個である。磁場勾配は 33.6 G/cm を 0.5 ms 印可した。

4.10.6 809nm 光トラップ

809 nm 光トラップ中にも同様に Dual BEC を生成できる。相互散乱長 $0a_0$ 付近（72 G、87 G）で 1080 nm の光トラップから移行する。大体移行時間 100-300 ms 程度でほとんど加熱なく移行できる。トラップ寿命は光散乱で制限されており、数 s 程度である。図 4.48 に Dual BEC のイメージを示す。809 nm の場合は Dual BEC が重なっており、これはトラップ周波数の一致で確認してある [114]。従って TOF 中のロスをできるだけ避ける為、磁場勾配によって分離してイメージングを行っている [95]。

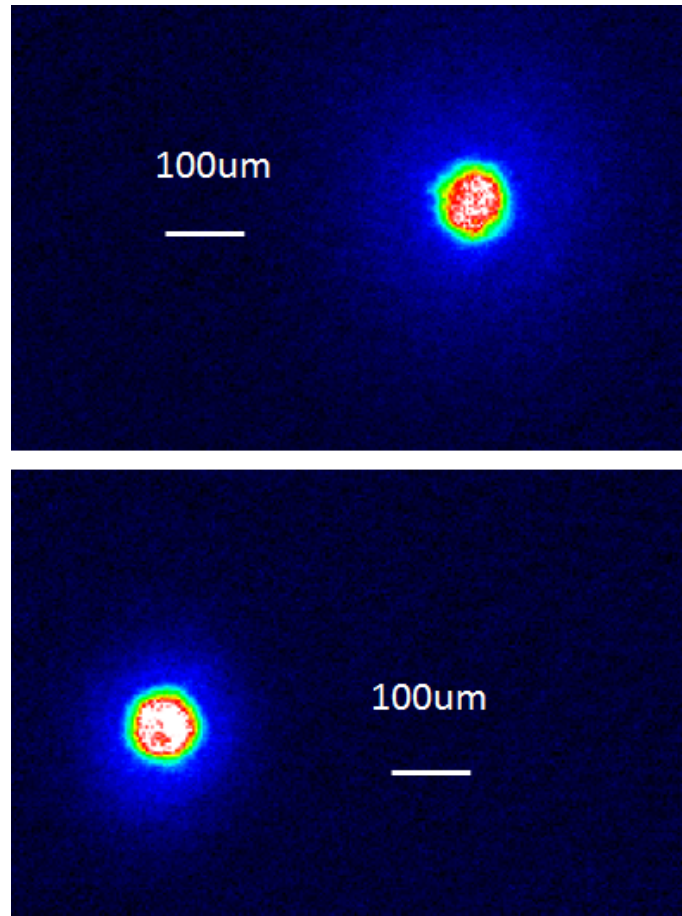


図 4.48: 809 nm 光トラップ中の Dual BEC:

上（下）の画像が $K(Rb)$ のイメージである。TOF 時間は 30.7 ms(31.3 ms) である。原子数は $N_K = 8.8 \times 10^4$ 個、 $N_{Rb} = 9.2 \times 10^4$ 個である。磁場勾配は 33.6 G/cm を 0.5 ms 印可した。

4.10.7 光格子

光格子の設計については筆者の修士論文に詳しく書いてある [114]。光格子は 3 軸あり、各軸 V、B、C 軸と名付けられている。水平方向の 2 軸である、B、C 軸にはアライメントの為に簡易のイメージングがあり、V 軸はメインに用いている TOP イメージングと軸が一緒であるので、行きのアライメントは容易に行える。うち返しのアライメントは pulsed lattice の方法により [124]、光格子の深さが深くなるように、調整する。光格子のビーム径は全て $w = 300 \mu\text{m}$ であり、外部コンファインメントの影響を極力排除してある。光格子深さは、各軸 $25E_R(\text{for } K)$ 以上になるように光パワーが分配されており、この時 K のトンネリングの時定数 $\hbar/2J \sim 18 \text{ ms}$ 以上となり、十分トンネリングが抑えられている。

4.11 イメージング

イメージングについては過去の学位論文にも詳しく書いてある [119, 114, 95] のでこちらも参照の事。本研究では原子気体の密度分布の測定に吸収イメージング (absorption imaging) と位相コントラストイメージング (PCI: phase contrast imaging) の二種類のイメージングを用いている。

原子気体に probe 光を当てて、原子気体の密度を測定することを考える。原子気体を透過する前の probe 光の電場を $E_0(\mathbf{r}, t)$ 、原子気体を透過した後の光の電場を $E_t(\mathbf{r}, t)$ 、原子気体によって散乱された光の電場を $\Delta E(\mathbf{r}, t)$ とすると、以下の関係式が成り立つ。(今電場の偏光は無視している。)

$$E_t = E_0 + \Delta E = tE_0e^{i\phi} \quad (4.20)$$

ここで、 $t = t(x, y)$ は透過率、 $\phi = \phi(x, y)$ は位相シフトを示す。透過率及び位相シフトは原子気体の密度等から決定される。Kramers-Kronig の定理から透過率及び位相シフトは原子気体に関して全く同じ情報を持っており互いに関係しあっている。従って透過率もしくは位相シフトのどちらかを測定すれば原子気体の密度を決定することができる。透過率を測定する方法が吸収イメージングで位相シフトを測定する方法が PCI である。以下透過率及び位相シフトの導出方法の詳細は過去の学位論文 [119] を参照の事。ここでは概要を述べる。

透過率及び位相シフトはそれぞれ屈折率の虚部と実部に対応する。物質の複素屈折率を $n_{\text{ref}}(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$ とすると、Maxwell 方程式より物質中の電場は、

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{i(n_{\text{ref}}\omega x/c - \omega t)} \\ &= E_0 e^{-n_I\omega x/c} e^{i(n_R\omega x/c - \omega t)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

と表される。物質の厚さを d とすると、透過率 t 及び位相シフト ϕ は、

$$t = e^{-n_I\omega d/c} \quad (4.22)$$

$$\phi = -\frac{\omega}{c}(n_R - 1)d \quad (4.23)$$

となる。

一方二準位原子気体の複素屈折率は原子気体が十分希薄なとき、

$$n_{\text{ref}} = 1 + \frac{\sigma_0 n \lambda}{4\pi} \frac{-\tilde{\delta} + i}{1 + I/I_s + \tilde{\delta}^2} \quad (4.24)$$

と書ける。ここで n は原子気体の密度を示す。また、 $\tilde{\delta} = 2\delta/\Gamma$ 、 $\sigma_0 = 6\pi\lambda^2$ ($\lambda = \lambda/2\pi$) である。今 probe 光の進行方向を z 軸にとり、縦密度 $\tilde{n}(x, y) = \int n(x, y, z)dz$ を定義すると、結局

$$t = \exp\left(-\frac{\sigma_0 \tilde{n}}{2} \frac{1}{1 + I/I_s + \tilde{\delta}^2}\right) = \exp\left(-\frac{D}{2}\right) \quad (4.25)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 \tilde{n}}{2} \frac{\tilde{n}}{1 + I/I_s + \tilde{\delta}^2} = \tilde{\delta} \frac{D}{2} \quad (4.26)$$

となる。ここで $D = \sigma_0 \tilde{n}/(1 + I/I_s + \tilde{\delta}^2)$ を光学的厚さ (OD: optical density) という。式 4.25、4.26 より原子気体の透過率もしくは位相シフトを測定することで、原子気体の縦密度を求めることができる。

4.11.1 吸収イメージング

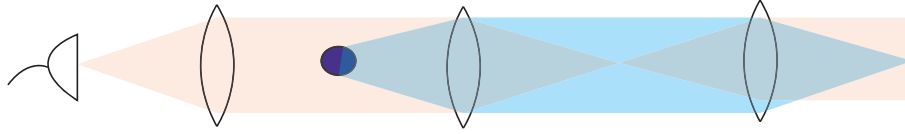


図 4.49: 吸収イメージング

吸収イメージングは図 4.49 の様な光学系を用いる。プローブ光としては、原子の光学遷移に共鳴もしくは共鳴に近い光を用いて、原子気体による光の強度 $I = \epsilon_0 c |E|^2 / 2$ の変化を測定すれば良い。スクリーンとして、CCD カメラ等を用いることで強度変化を測定できる。プローブ光の強度を I_0 吸収イメージングによって得られる光の強度を I_{ABS} とすると、

$$\frac{I_{\text{ABS}}(x, y)}{I_0(x, y)} = \frac{|E_t(x, y)|^2}{|E_0(x, y)|^2} = t(x, y)^2 \quad (4.27)$$

となる。プローブ光の強度が十分弱く ($I/I_s \sim 0$)、共鳴 ($\delta = 0$) の場合は、式 4.25 より、

$$\tilde{n}(x, y) = -\frac{1}{\sigma_0} \ln \left(\frac{I_{\text{ABS}}}{I_0} \right) \quad (4.28)$$

と求まる。

尚 CCD カメラで I_{ABS}/I_0 を測定するときは、通常 3 枚のイメージを取る。すなわち「プローブ光による原子の影のイメージ (Shadow)」、「プローブ光のイメージ (Light)」、「原子も光もない時のイメージ (Dark)」の三枚である。これにより暗電流の影響等を除くことができる。各 CCD の画素 (i, j) の座標を (x_i, y_j) とし、各画素のそれぞれの輝度を $S_{i,j}$ 、 $L_{i,j}$ 、 $D_{i,j}$ とすると、

$$\frac{I_{\text{ABS}}(x_i, y_j)}{I_0(x_i, y_j)} = \frac{S_{i,j} - D_{i,j}}{L_{i,j} - D_{i,j}} \quad (4.29)$$

となる。

4.11.2 位相コントラストイメージング

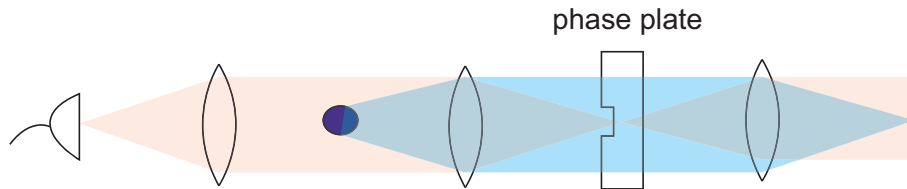


図 4.50: 位相コントラストイメージング

PCI のセットアップは図 4.50 の様な光学系を用いる。吸収イメージングとほぼ同様の光学系であるが、位相シフトを強度の情報に変換して測定する為、図 4.50 で示すような位

相プレート (phase plate) を用いている。位相プレートは石英ガラスでできており、図 4.50 の様に中心部にくぼみが存在している。これを図 4.50 の様にプローブ光の焦点に合わせることで、プローブ光の位相のみをくぼみの深さと位相プレートの屈折率によって決まる位相 ϕ_{pp} だけ進ませる。従ってスクリーン上の電場 E_{PCI} は、

$$E_{PCI} = \Delta E + E_0 e^{i\phi_{pp}} = tE_0 e^{i\phi} - E_0 + E_0 e^{i\phi_{pp}} \quad (4.30)$$

となる。 ϕ_{pp} を適当に選ぶことで、位相シフトを強度変化によって感度良く測定できるようになる。本研究では、石英ガラス（屈折率 1.453）でできた、外径 15 mm、くぼみの直径 140 μm 、くぼみの深さ 423 nm の位相プレートを用いた [119]。これは、K の D2 線 767 nm に対して $\pi/2$ の位相シフトを発生させる。また、Rb の D2 線 780 nm に対してもほぼ同様の位相シフトを発生させる。従って、 $\phi_{pp} = \pi/2$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{I_{PCI}}{I_0} &= |tE_0 e^{i\phi} - E_0 + E_0 e^{i\pi/2}|^2 \\ &= t^2 + 2 - 2\sqrt{2}t \cos\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。ここで透過率を $t \sim 1$ とすると、

$$\phi = \arccos\left(\frac{3 - I_{PCI}/I_0}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} \quad (4.32)$$

となり、位相シフト ϕ はプローブ光の強度変化 I_{PCI}/I_0 から求めることができる。

式 4.25、4.26 より、 $D = -2\ln t$ 及び ϕ は、概ねそれぞれ $\tilde{\delta}^{-2}$ 及び $\tilde{\delta}^{-1}$ に比例する。従って離長 δ をある程度大きくすると、 ϕ をある程度の大きさに保ったまま、 $t \sim 1$ にすることができる。従って PCI を用いることで、ほぼ非破壊に原子気体の縦密度を測定することができる。本研究では、 $\tilde{\delta} = -70$ -100 程度、即ち離長 -200-300 MHz 程度で実験を行った。この時縦密度は、

$$\tilde{n}(x, y) = \frac{2\tilde{\delta}}{\sigma_0} \phi(x, y) \quad (4.33)$$

と求めることができる。

尚本研究の様に離長を負にとった場合、 $\phi_{pp} = 3\pi/2$ とした方が縦密度のダイナミックレンジは大きくなるが、学位論文 [119] の時に用いた位相プレートをそのまま用いた為、 $\phi_{pp} = \pi/2$ とした。従って密度によって離長を調整することによってこれに対処した。プローブ光の詳細については、過去の学位論文を参照の事 [119, 95]。 $\phi_{pp} = 3\pi/2$ の位相プレートを用意することで、より実験は容易でかつ精度が良くなると考えられる。

4.11.3 イメージングの光学系

本研究では CCD カメラとして Acton 社製の PhotonMAX 512B を用いた。画素数は 512×512 で 1 画素の大きさは $16 \mu\text{m} \times 16 \mu\text{m}$ である。

イメージングの光学系は以下に示す Top (V 軸) (図 4.51) と Side (A 軸) (図 4.52) の二軸が存在し、これらは、着脱式のミラーによって切り替えることができる。これによ

て原子気体を水平方向、鉛直方向から観測することができる。本研究では特に K 原子気体と Rb 原子気体の重力方向のずれが問題になるので、水平方向のイメージングは重要である。また TOP イメージングは着脱式のレンズにより拡大率を変更（拡大イメージング、縮小イメージング）することができ、MOT と縮退近くまで冷却された原子気体どちらも観測することができる。またプローブ光及び位相プレートのあるなしはフリップマウントによって切り替えることができる為、吸収イメージングと PCI を即座に入れ替えることができる [95]。切り替えの際、位相プレートの厚みの分だけ焦点がややずれる為、レンズを調整して対処する。ただし、拡大率への影響はほとんどないと考えられる。本研究では主に Side イメージングの PCI を利用した。

表 4.5 にイメージングの拡大率、解像度等を示す。拡大率は TOP の縮小イメージングを除いて光格子による原子波の干渉を観測し、干渉縞の間隔から校正している。TOP の縮小イメージングの拡大率は計算値である。また解像度 d_r は Layleigh's cryterion ($d_r \sim 0.61\lambda/\text{NA}$) を用いた。NA(Numerical Aperture) は設計から計算で求めた。 $\lambda = 780 \text{ nm}$ を計算に用いた。現在 phase plate の径は小さく（直径 15 mm）NA を制限する為、PCI では解像度は下がることになる。尚、side イメージングの拡大率が設計と比べて大きくなっているが、これは 50 mm の PBS の影響であると考えられる。

4.11.4 解像度の評価

side イメージングの PCI の解像度は後の章(第5章)において重要となるので、実際にどの程度の解像度がでているか確認を行った。これは、解像度より小さいと思われる BEC のサイズの実測値と理論値を比較することによって行う。実測値は実際に BEC を PCI で観測した値を使い、理論値は原子数とトラップ周波数から算出した、Thomas-Fermi 半径(式 3.16)を用いる。解像度よりも BEC のサイズが小さい時、見た目のサイズは大きくなるが、その積分値（即ち原子数の見積もり）は正確に測定できると考えられる。

BEC のイメージング画像をガウシアン関数でフィッティングし、その幅を実測することを考える。元の x 方向の幅が σ_0 であったとする。即ち x 方向の縦密度が、

$$f(x) = A \exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma_0^2}\right) \quad (4.34)$$

で表される時を考える。これを解像度 σ_r で観測することを考える。即ち、次のぼやけ関数 $g(x)$ を考える。

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_r^2}} \exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma_r^2}\right) \quad (4.35)$$

$g(x)$ は規格化条件 $\int g(x)dx = 1$ を満たしている。この時実際に観測される関数 $F(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込み積分であると考えられる。即ち、

$$F(x) = \int f(x')g(x-x')dx' \quad (4.36)$$

$$= \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\sigma_r} A \exp\left(-\frac{2x^2}{\sigma_{\text{image}}^2}\right) \quad (4.37)$$

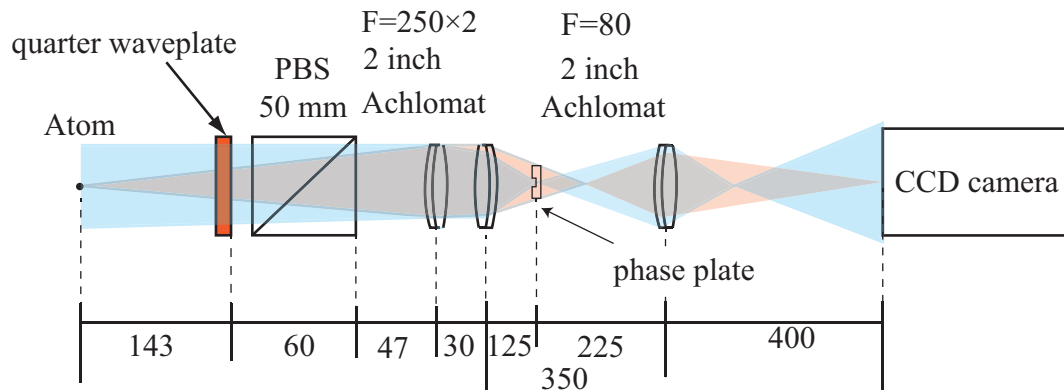


図 4.52: Side イメージングのセットアップの概要：ミラーが間に入っているが図では省略している。位相プレートのありなしはフリッパーマウントによって切り替えることができる。光線は Probe beam（青）と原子の影（赤）の focus の様子を表わしたものである。距離の単位は mm である。

第5章 ^{41}K - ^{87}Rb 混合系における三体ロス係数の決定

本章では、 ^{41}K - ^{87}Rb 混合系における二つのフェッシュバツハ共鳴近傍での三体ロス係数の決定の実験について述べる。三体ロス係数がフェッシュバツハ共鳴近傍でどのように振る舞うかは、フェッシュバツハ分子の生成効率を上げる為に重要である。何故なら、特に異核原子からなるフェッシュバツハ分子の場合、原子雲同士の空間的重なりが重要となるが、その際に三体ロスが問題となる。従って原子雲の密度を十分に制御し、三体ロスを抑えることが必要となるが、その為には三体ロス係数を正確に知っておく必要がある。また、フェッシュバツハ共鳴近傍での三体ロス係数の振る舞いは、三体束縛状態の性質によって決まっている為、これを調べる上でも重要である。

5.1 三体ロス係数の測定の概略

三体ロス係数を測定するには、三体ロスによる原子雲の密度の時間発展を観測すれば良い。本研究で対象とする、 ^{41}K - ^{87}Rb 混合系のレート方程式は以下の連立方程式のようになる。

$$\frac{dn_K}{dt} = -2L_{KKRb}n_K^2n_{Rb} - L_{KRbRb}n_Kn_{Rb}^2 - \frac{n_K}{\tau_K} \quad (5.1)$$

$$\frac{dn_{Rb}}{dt} = -L_{KKRb}n_K^2n_{Rb} - 2L_{KRbRb}n_Kn_{Rb}^2 - \frac{n_{Rb}}{\tau_{Rb}} \quad (5.2)$$

n_K 、 n_{Rb} はそれぞれの原子の密度で時間と位置の関数である。 L_{KKRb} 、 L_{KRbRb} はそれぞれ K-K-Rb 及び K-Rb-Rb の組み合わせの三体ロスの係数を示す。今回使っている原子の内部状態は両方とも $|F=1, m_F=1\rangle$ 状態であるので二体の散乱は弾性散乱のみとなる。 τ_K 、 τ_{Rb} はバックグラウンドの一体ロスを示し、本研究では 809 nm 光トラップの光散乱によってほぼ決まっている。局所的に成り立つ式であるので、*in-trap* で直接密度分布を観測するか、TOF で測定した原子の数、温度及びトラップ周波数から密度分布を算出する必要がある。尚、本研究では三体ロス係数の測定に熱的原子集団を用いるが、粒子間の位置の相関関数は三体ロス係数に含まれるものとする。従って、凝縮体を使った場合三体ロス係数は位置の相関関数の分だけ変化するという事に注意が必要である。

5.1.1 初期の試み

まず、三体ロス係数の測定限界を見積もり、また測定の問題を明らかにする為、次の実験を行った。この実験については過去の学位論文にも記述がある [95]。

$1\text{ }\mu\text{m}$ の交差型光トラップ (P 軸、A 軸) 中に K、Rb の混合系を用意し一定時間保持する。その後トラップから解放し一定時間立ったのちに (TOF: Time of flight)、吸収イメージングを用いることによって、原子雲の数と温度を見積もる。これを繰り返すことによって各原子雲の密度の時間発展を測定し、三体ロス係数を計算する。温度は 300 nK 程度、平均トラップ周波数は、 $(\bar{\omega}_\text{K}/2\pi, \bar{\omega}_\text{Rb}/2\pi) = (110, 85)\text{ (Hz)}$ で初期平均密度は、 $5 \times 10^{12}\text{ (cm}^{-3}\text{)}$ 程度となる。"narrow" (78.68 G) フェッシュバツハ共鳴近傍の散乱長 $a = 250\text{ }a_0$ ($B = 77.4\text{ G}$) での平均密度の時間発展の測定結果が、図 5.1 となる。

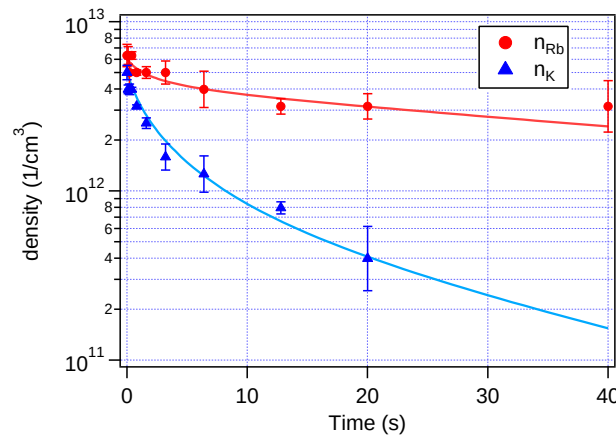


図 5.1: 三体ロス係数の測定 (吸収イメージング、 $a = 250\text{ }a_0$) : 青三角が K の密度、赤丸が Rb の密度を示す。青、赤の実線は $\tau_\text{K} = 24\text{ s}$ 、 $\tau_\text{Rb} = 130\text{ s}$ 、 $L_\text{KKRb} = 7 \times 10^{-27}\text{ cm}^6/\text{s}$ 、 $L_\text{KRbRb} = 0\text{ cm}^6/\text{s}$ での K、Rb 原子の密度の時間発展をシミュレーションしたものである。

青三角が K の密度、赤丸が Rb の密度を示す。図よりロスカーブでの初期では、三体ロスに起因する非線形な時間発展が見られ、最終的に密度が低くなってくると一体のロスカーブに漸近していくといった振る舞いが見られる。また実線は、 $\tau_\text{K} = 24\text{ s}$ 、 $\tau_\text{Rb} = 130\text{ s}$ 、 $L_\text{KKRb} = 7 \times 10^{-27}\text{ cm}^6/\text{s}$ 、 $L_\text{KRbRb} = 0\text{ cm}^6/\text{s}$ としたときの各原子雲の密度の時間発展を式 5.1、5.2 から離散的な逐次発展によりシミュレーションしたものである。シミュレーション結果は実際に時間発展に良く一致している。シミュレーションによるロスカーブは各原子雲の初期密度、 L_KKRb 、 L_KRbRb 、 τ_K 、 τ_Rb の値の大きさによって大きくかわるが、長時間の保持によって原子密度が低くなり、密度が時間に対して線形に変化する様子を正確に測定することでまず一体のロス係数が決定される [125]。また、初期原子密度を揃えることで、 L_KKRb と L_KRbRb の大きさの比率を正確に知ることができる。従って図 5.1 から K 原子の密度が素早く減少する様子が見て取れる為、この散乱長では K-K-Rb の三体ロスが支配的であることが明らかになった。K-Rb-Rb の三体ロス係数は測定限界以下であると考えられる。測定結果の各点のばらつきとシミュレーションによりこの測定での三体ロス係数の測定下限値は、 $10^{-27}\text{ cm}^6/\text{s}$ 程度となる。また散乱長 $a = 0\text{ }a_0$ の磁場 (72 G 、 87 G) でも同様の測定を行ったところ、K-K-Rb、K-Rb-Rb どちらの三体ロスも測定限界以下で

あった。以上をまとめると、以下の様になる。

1. $a = 250 \text{ } a_0$ で $L_{\text{KKRb}} = 7 \times 10^{-27} \text{ cm}^6/\text{s}$ 、 $L_{\text{KRbRb}} < 1 \times 10^{-27} \text{ cm}^6/\text{s}$
2. $a = 0 \text{ } a_0$ で L_{KKRb} 、 $L_{\text{KRbRb}} < 10^{-27} \text{ cm}^6/\text{s}$
3. 測定限界は $5 \times 10^{-27} \text{ cm}^6/\text{s}$ 程度

また測定において以下の様な問題があることが分かった。

1. 初期原子数の揺らぎにより、十分な精度の測定をするには長時間・多数回の測定が必要。
2. 二つの三体ロス係数の比を正確に知るには、できるだけ原子数の比を一致させる必要がある。
3. 空間的に原子運がどの程度重なっているか見積もりが困難。
4. 密度が低いため測定下限値が高い。

上記 1、2 の問題により原子数を安定させる為に長時間の準備・測定が必要である。本研究の装置は磁気トラップが熱平衡に達するまで数時間を要し、フェッシュバハ共鳴近傍全体で同様の測定を行うことは現実的ではない。また 4 の問題にも 1、2 の問題が測定精度の関係で関わっている。3 の問題を解決すればより精度よい測定が期待できる。

以上の問題を解決する為、本研究では非破壊イメージングを用いた三体衝突係数の決定を行うことにした。次節以降ではこれについて説明する。

5.2 非破壊イメージングによる三体衝突係数の決定

前節で説明したように、吸収イメージングを繰り返した方法は測定時間・回数の面で困難である。これは主に初期原子数の揺らぎが原因である。特にボソンの混合系の場合この問題は顕著になる。式 5.1、5.2 に見られるように、ボソンの混合系の場合、時間発展は多数のロスチャンネルが関与した非常に複雑のものになっている。よって初期原子数が少しでも揺らぐと、時間発展の様子が大きく変わることになる。これを解決するには、同一原子集団の時間発展をそのまま見ればよい。すなわち非破壊イメージングの導入が必要である。これには第 4.11.2 節で説明した、位相コントラストイメージング (PCI: Phase Contrast Imaging) を用いる。図 5.2 に PCI で測定した原子数の時間発展の一例を示す。これによって初期条件に依存しない測定が行え、実験効率は劇的に改善した。また *in-trap* で直接原子分布を測定できる為、原子雲同士の重なりを評価するのも容易である。

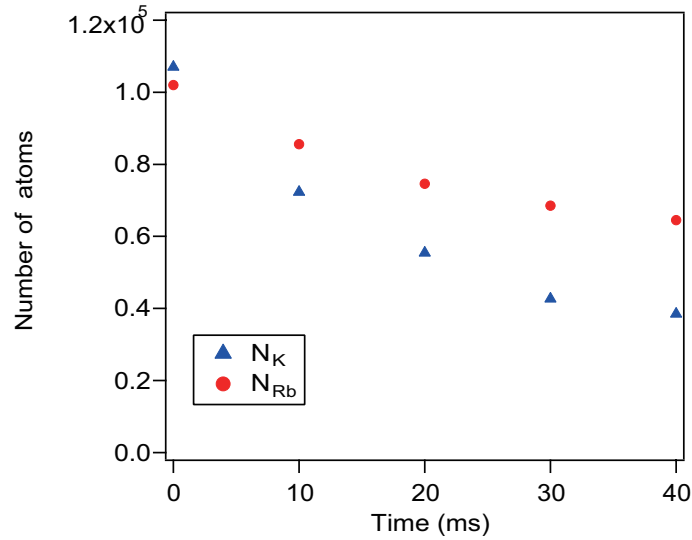


図 5.2: 原子数の時間発展の PCI による測定

5.2.1 解析手法

節 5.1.1 では、原子の密度の時間発展からシミュレーションを行い、三体ロス係数の大きさを見積もった。しかし式 5.1、5.2 は複雑な連立微分方程式となっており、直接解析するのは難しい。また厳密には密度は各点で異なる為、平均密度による議論は不適である。よって C. Ospelkaus らと同様の手法 [126] を用いて、解析しやすいように式を変形する。

まず式 5.1、5.2 で空間積分を実行することで以下の様に変形する。

$$\frac{dN_K}{dt} = -2L_{KKRb}I_{KKRb} - L_{KRbRb}I_{KRbRb} - \frac{N_K}{\tau_K} \quad (5.3)$$

$$\frac{dN_{Rb}}{dt} = -L_{KKRb}I_{KKRb} - 2L_{KRbRb}I_{KRbRb} - \frac{N_{Rb}}{\tau_{Rb}} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} I_{KKRb} &= \int n_K^2 n_{Rb} d\mathbf{r} \\ I_{KRbRb} &= \int n_K n_{Rb}^2 d\mathbf{r} \end{cases} \quad (5.5)$$

N_K 、 N_{Rb} は各原子雲の粒子数である。密度積分 I_{KKRb} 、 I_{KRbRb} の定義は式 5.5 の通りで、密度分布はガウシアンを仮定することで、容易に計算できる。この実験ではサイドイメージングを用いているが、奥行方向のずれは考慮しない。トップイメージングによって奥行方向のずれが十分小さいことは確認済みである。また、奥行方向の幅についてはトラップ周波数の比から計算する。重力方向の幅についても、イメージング系の解像度以下であるため、トラップ周波数から計算する (節 4.11.4 の議論を参照の事)。

さらに、 L_{KKRb} と L_{KRbRb} を独立に計算する為、式 5.3、5.4 を足し引きすることによ

て以下の様に変形する。

$$\frac{dN_K}{dt} - 2\frac{dN_{Rb}}{dt} = 3L_{KRbRb}I_{KRbRb} - \frac{N_K}{\tau_K} + 2\frac{N_{Rb}}{\tau_{Rb}} \quad (5.6)$$

$$\frac{dN_{Rb}}{dt} - 2\frac{dN_K}{dt} = 3L_{KKRb}I_{KKRb} - \frac{N_{Rb}}{\tau_{Rb}} + 2\frac{N_K}{\tau_K} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

これによって連立微分方程式ではなく、それぞれの微分方程式を別々に解くことで L_{KKRb} と L_{KRbRb} を独立に計算することができる。

式 5.6、5.7 は等価なので、式 5.6 について以降説明する。式 5.6 の微分方程式は解析的に解けないので、時間積分をさらに実行すると以下の様になる。

$$N_K(t) - N_K(0) - 2(N_{Rb}(t) - N_{Rb}(0)) = 3L_{KRbRb} \int_0^t I_{KRbRb} dt + \int_0^t \left(-\frac{N_K}{\tau_K} + 2\frac{N_{Rb}}{\tau_{Rb}} \right) dt \quad (5.9)$$

時間積分は実際には、台形積分で近似する。式の構造を理解しやすいように整理すると、

$$\Delta N_{KRbRb}(t) - \mathcal{M}_{KRbRb}(t) = 3L_{KRbRb} \mathcal{I}_{KRbRb}(t) \quad (5.10)$$

の様に書ける。ここで各文字の定義は、

$$\Delta N_{KRbRb}(t) = N_K(t) - N_K(0) - 2(N_{Rb}(t) - N_{Rb}(0)) \quad (5.11)$$

$$\mathcal{M}_{KRbRb}(t) = \int_0^t \left(-\frac{N_K}{\tau_K} + 2\frac{N_{Rb}}{\tau_{Rb}} \right) dt \quad (5.12)$$

$$\mathcal{I}_{KRbRb}(t) = \int_0^t I_{KRbRb} dt \quad (5.13)$$

となる。それぞれ、 $\Delta N_{KRbRb}(t)$ は原子数の変化、 $\mathcal{M}_{KRbRb}(t)$ は一体のロス、 $\mathcal{I}_{KRbRb}(t)$ は三体のロスを示す。K-Rb-Rb 及び K-K-Rb それぞれに対して $\Delta N(t) - \mathcal{M}(t)$ を縦軸に、 $\mathcal{I}(t)$ を横軸にグラフをプロットすると図 5.3 の様になる。この時の、傾きが三体ロス係数なのでこれを回帰分析により求めれば良い。以上の解析により、K-Rb-Rb 及び K-K-Rb の二つの三体ロス係数を一組の非破壊イメージングから求めることが可能である。

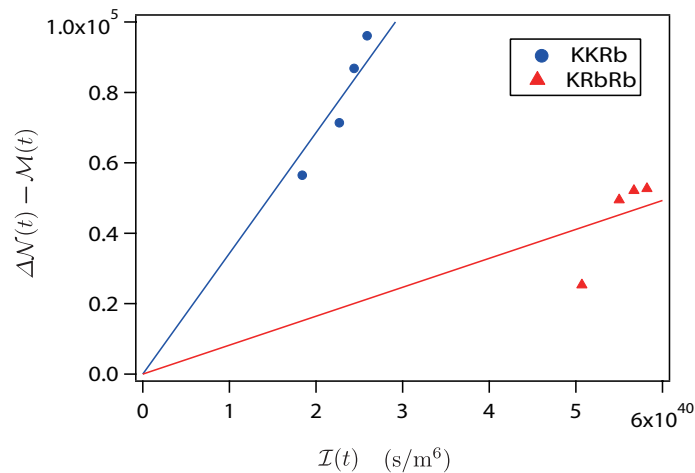


図 5.3: 三体ロス係数の決定

測定の統計誤差を減らす為、一つの散乱長に対して5組程度の非破壊イメージングを行う。すなわち5つ程度の原子集団に対して、一連の非破壊イメージングを行う。原子集団によって初期原子数や初期密度は異なるが、各非破壊イメージングから上記の解析によって得られた原子数変化や密度積分は全て式 5.10（及び K-K-Rb に関する同様の式）に従うはずである。5つの原子集団に対して図 5.3 と同様のプロットを行うと、図 5.4、5.5、5.6 のようになる。

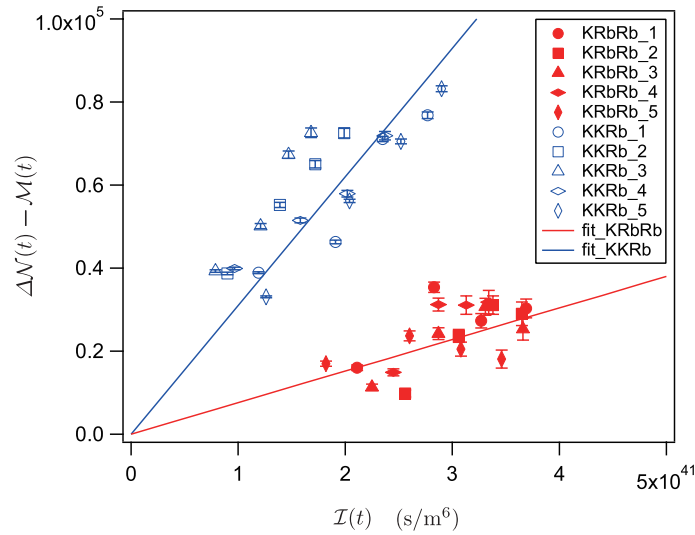


図 5.4: 三体ロス係数の決定（相互散乱長 $a_{\text{KRb}} = -1981 a_0$ ）：

KKRb 及び KRbRb の同一番号は同じ非破壊イメージングから得られたデータであることを示す。エラーバーは一体項の 20% を示す。fitting は一体の項で重みをつけて行った。

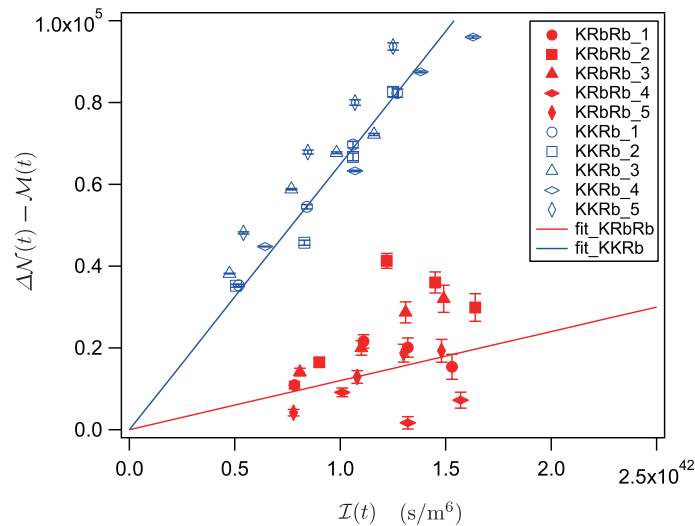


図 5.5: 三体ロス係数の決定（相互散乱長 $a_{\text{KRb}} = -818 a_0$ ）：

KKRb 及び KRbRb の同一番号は同じ非破壊イメージングから得られたデータであることを示す。エラーバーは一体項の 20% を示す。fitting は一体の項で重みをつけて行った。

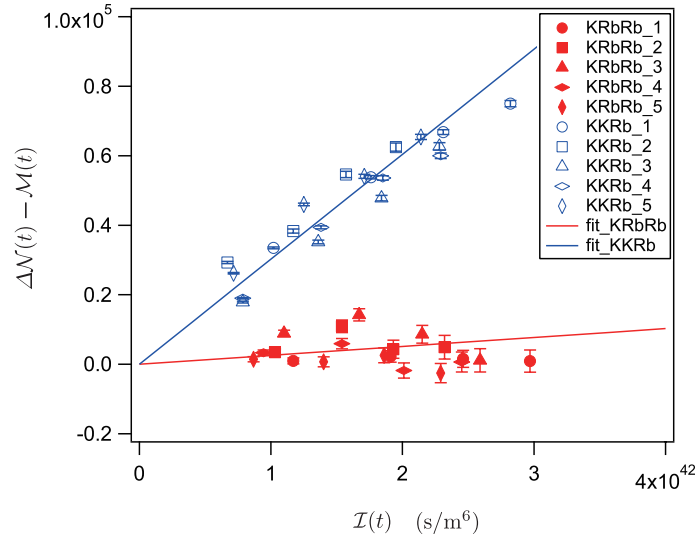


図 5.6: 三体ロス係数の決定（相互散乱長 $a_{\text{KRb}} = -505 a_0$ ）：

KKRb 及び KRbRb の同一番号は同じ非破壊イメージングから得られたデータであることを示す。エラーバーは一体項の 20% を示す。fitting は一体の項で重みをつけて行った。

図 5.4、5.5、5.6 はそれぞれ相互散乱長 a_{KRb} が $-1980 a_0$ 、 $-818 a_0$ 、 $-504 a_0$ での測定から得られたデータである。次節以降で示す通り、相互散乱長の絶対値が小さくなる程三体ロス係数は小さくなる。従って一体の項の寄与が大きくなる。また密度が小さくなる程三体ロス係数は小さくなる為、非破壊イメージングの後半のデータは一体の項の寄与が大きくなる。図 5.4、5.5、5.6 には一体の項の 20% をエラーバーとして示した。実際に相互散乱長が小さく、測定の後半になるほど、一体の項の寄与が大きくなっていることが分かる。従って一体の項を重みとして回帰分析を行い三体ロス係数を求めた。測定限界は一体の項によって決まり、 $3 \times 10^{-27} \text{ cm}^5/\text{s}$ 程度である。一体の項は光トラップ（809 nm）の光散乱によって決まっている。より離長の大きいトラップを用いれば測定限界は小さくなると考えられる。

5.2.2 測定条件

測定は K、Rb 原子それぞれを ODT(A) 及び ODT (P') (809 nm) からなる交差型光トラップ中に導入し、密度分布の時間発展を測定する。トラップ周波数は $(\omega_x/2\pi, \omega_y/2\pi, \omega_z/2\pi) = (120, 330, 310)$ (for K)、 $(\omega_x/2\pi, \omega_y/2\pi, \omega_z/2\pi) = (91, 320, 310)$ (for Rb) 程度になる。光強度を PD により測定してトラップ周波数を校正する。原子数は $N_{\text{K}} = N_{\text{Rb}} = 1-2 \times 10^5$ 個程度で、温度は $T_{\text{K}} = T_{\text{Rb}} = 400-600 \text{ nK}$ 程度で測定を行い、密度は $n_{\text{K}} = n_{\text{Rb}} = 1-2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ 程度になる。温度と密度は測定の上限を決定する。上記の条件より $\lambda_{\text{dB}} = 5000-7000 a_0$ 程度、平均原子間距離 $k^{-1} = 2500-3000 a_0$ ($k = \sqrt{6\pi n}$) 程度となる。即ち、密度 (k^{-1}) によって測定限界が決まることになる。概ね $|a_{\text{KRb}}| < 2000 a_0$ 程度で散乱長依存性が測定できると考えられる。散乱長がこれを超えると、三体ロス係数が飽和してくると考えられる。PCI による測定間隔は 10-40 ms で 1 回の測定で 5 回イメージングを行う。このロス

カーブから前節で説明した解析方法により三体ロス係数を得る。これを各散乱長で5回程度繰り返し平均することで、各散乱長の三体ロス係数を決定する。

5.3 ^{41}K - ^{87}Rb 混合系における三体ロス係数の決定

三体ロス係数の散乱長依存性の測定結果は、図 5.7(KKRb)、5.8(KRbRb) のようになる。エラーバーは統計誤差を示す。原子数の見積もりに 20 % 程度の系統誤差があると考えられるため値の絶対値は図で示すよりも大きな誤差があると考えられるが、系統誤差の影響はグラフ全体が上下にシフトするだけであるので、グラフの定性的な振る舞いには影響を与えないと考えられる。

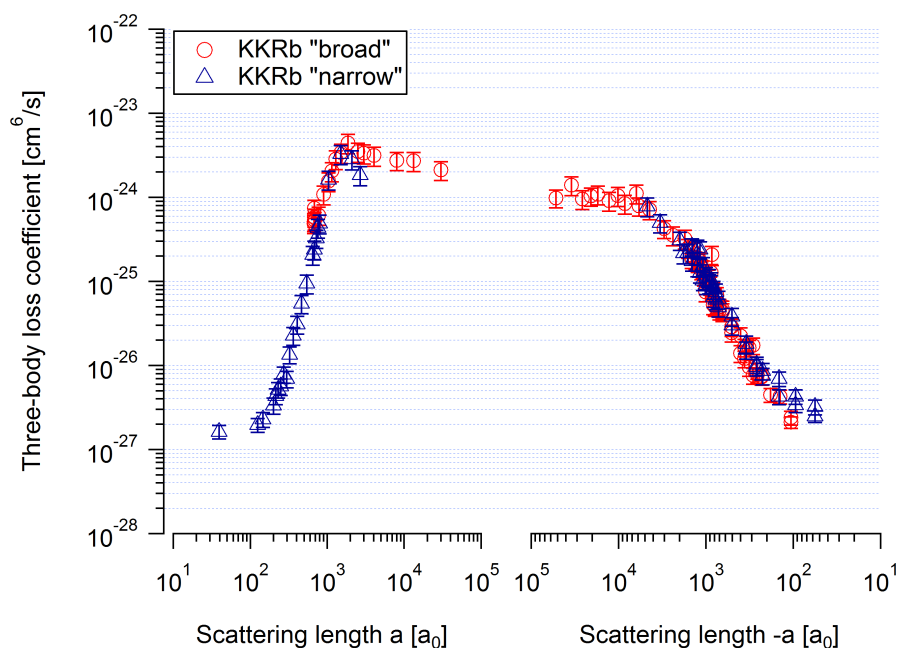


図 5.7: 三体ロス係数 (KKRb) の散乱長依存性

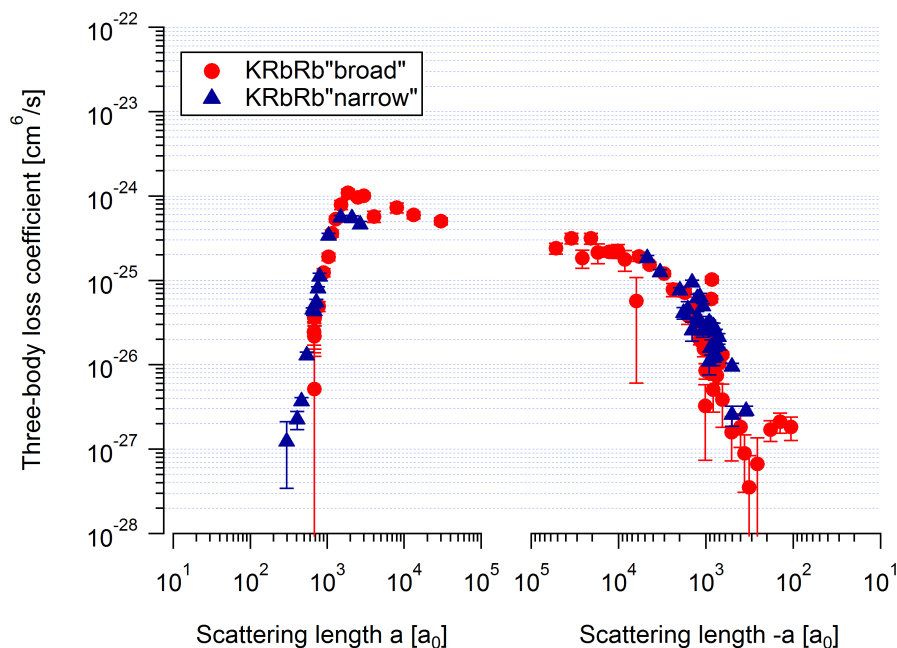


図 5.8: 三体ロス係数 (KRbRb) の散乱長依存性

39 G の共鳴を "Broad" 共鳴、78.68 G の共鳴を "narrow" 共鳴と呼ぶ。それぞれの共鳴に対して K-K-Rb の三体ロス係数及び K-Rb-Rb の三体ロス係数の計四つの三体ロス係数が存在する。どれも a_{KRb} は 200-2000 a_0 の間は概ね a^4 に比例しており、散乱長依存が測定できていると考えられる。また三体ロス係数の測定下限は前節で述べた通り、 $3 \times 10^{-27} \text{ cm}^6/\text{s}$ 程度である。また、図 5.7、5.7 を比較すると、全領域に渡って K-K-Rb の三体ロス係数の方が、K-Rb-Rb の三体ロス係数より大きいということが分かる。これは、次章以降で説明する分子生成の時に重要となってくる。また図 5.7、5.7 の結果で重要なことは、"Broad" と "Narrow" の三体ロス係数は全領域に渡って誤差の範囲で一致するということである。これは、共鳴間で三体パラメータがほとんど異なっていないという事を示唆する。また同位体間に関しても ^{40}K - ^{87}Rb の実験結果 [45] とも比較した結果、KRbRb の三体ロス係数に関してほとんど異ならないことが分かった。従って本研究の測定によって、KRbRb の三体ロス係数は同位体・共鳴によって異ならないということが分かった。これは理論予測 [47] の結果と矛盾しない。

d 波 Feshbach 共鳴

図 5.7、5.7 の散乱長負側には、"Broad" 共鳴において非常に細いピークが見られるが、これは高次の Feshbach 共鳴であるということが判明している。図 5.9 に磁場に対して "Broad" 共鳴、散乱長負側の三体ロス係数 (KRbRb、KKRb) をプロットしたものを示す。LENS のグループにより、磁場 44.58(5) G 及び 47.96(2) G において d 波 Feshbach 共鳴の存在が報告されている [71]。図 5.9 の緑点線が、報告されている d 波 Feshbach 共鳴の位置である。我々の測定でも 48 G の L_{KKRb} 、 L_{KRbRb} 両方に非常に細いピークが見られ、これは d

波 Feshbach 共鳴によるロスであると考えられる。44.5 G の方は共鳴が検出されなかったが、これは線幅に対して測定間隔が広がった為と考えられる。

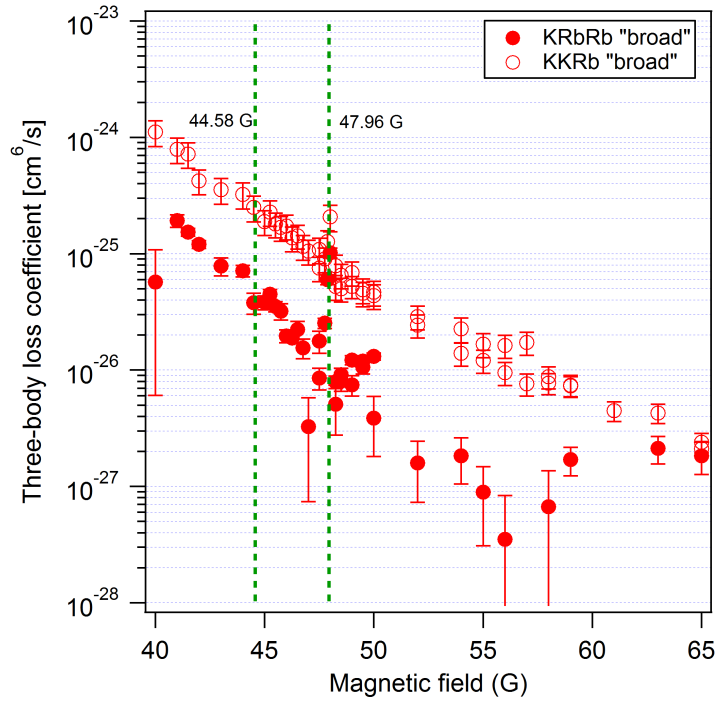


図 5.9: "Broad"共鳴、散乱長負側の三体ロス係数（KRbRb、KKRb）の磁場依存性: 緑点線は報告されている、d 波 Feshbach 共鳴の位置を示す [71]。

三体ロス係数におけるエフィモフ共鳴の存在の検証

図 5.7、5.7 を見ると、どのグラフにもエフィモフ共鳴は見えないということが分かる。しかし、同じ原子種における LENS の測定では、"Broad"共鳴においてエフィモフ共鳴の存在が報告されており [44]、本研究の結果と矛盾する。エフィモフ共鳴は散乱長負側に、ロスのピーク (a_-) として、 L_{KRbRb} に対して、 $a_- = -246(14) a_0$ 、 L_{KKRb} に対して、 $a_- = -22 \begin{pmatrix} +4 \\ -6 \end{pmatrix} \times 10^3 a_0$ の二つの共鳴が報告されており、散乱長正側にやはりロスのピーク (a_*) として、 L_{KRbRb} に対して $a_* = 667(1) a_0$ の一つの共鳴が報告されている。 a_- 、 a_* は三体パラメータである。 $a_- = -22 \begin{pmatrix} +4 \\ -6 \end{pmatrix} \times 10^3 a_0$ の共鳴は、密度による飽和領域にあり強いピークが見えない可能性がある。また、 $a_* = 667(1) a_0$ はアバランシェメカニズム [28] による共鳴であるが、そのメカニズムはまだ完全に理解されていない [127]。従って、 $a_- = -246(14) a_0$ の共鳴が最も強く観測されており、かつ本研究の観測領域内に存在する為、これについて検証するのが良いと考えられる。

異核原子の系の三体ロス係数の散乱長依存性として、Effective Field Theory による理論式が存在する [46]。これは散乱長負側で、

$$L_{\text{KRbRb}}(a < 0) = \frac{C_L}{2} \frac{\coth(\pi s_0) \sinh(2\eta_*)}{\sin^2[s_0 \ln(a/a_-)] + \sinh^2(\eta_*)} \frac{\hbar a^4}{m_K} \quad (5.14)$$

と書ける [45]。これは等核原子の式 2.158 に、質量比による補正を加えたものである。この時、理論では $s_0 = 0.6444$ 、 $C_L = 344.5$ と計算される [46]。ロスのピークを示す a_- としては、報告された値 $a_- = -246 a_0$ を採用する。非弾性パラメータ η_* は共鳴の鋭さを示すが、典型的な値として $\eta_* = 0.1, 0.01, 0.001$ を採用した。散乱長負側において、 L_{KRbRb} に対する実験結果と理論式を図 5.10 に示した。比較の為、LENS のグループにおける三体ロス係数の実測値 [44] も同様に示した。図 5.10 によると、もし共鳴が存在するとしたら、 $\eta_* = 0.1, 0.01, 0.001$ のどの値でも共鳴付近に大きな構造が観測できると考えられる。しかし、本研究ではそのような構造は見えなかった。エフィモフ共鳴は温度による影響を受けることから、報告された温度 $T \sim 300 \text{ nK}$ で実験を行ったが、明確な共鳴は観測できなかった。従って本研究では ^{41}K - ^{87}Rb の三体ロス係数にエフィモフ共鳴は観測できないという結論を得た。本研究では、PCI によりロスの係数を測定している為、原子数による測定よりは、実験による誤差（原子数揺らぎ等）は少ないと考えられる。またこの結果は同位体における実験 [45] 及び理論予測 [47] と矛盾しない。

以上をまとめると、本研究では ^{41}K - ^{87}Rb 混合系における二つの Feshbach 共鳴近傍での三体ロス係数の決定を行った。その結果 KRbRb 及び KKRb の三体ロス係数は同位体・共鳴によって異ならない、かつ観測範囲にエフィモフ共鳴は存在しないということが分かった。

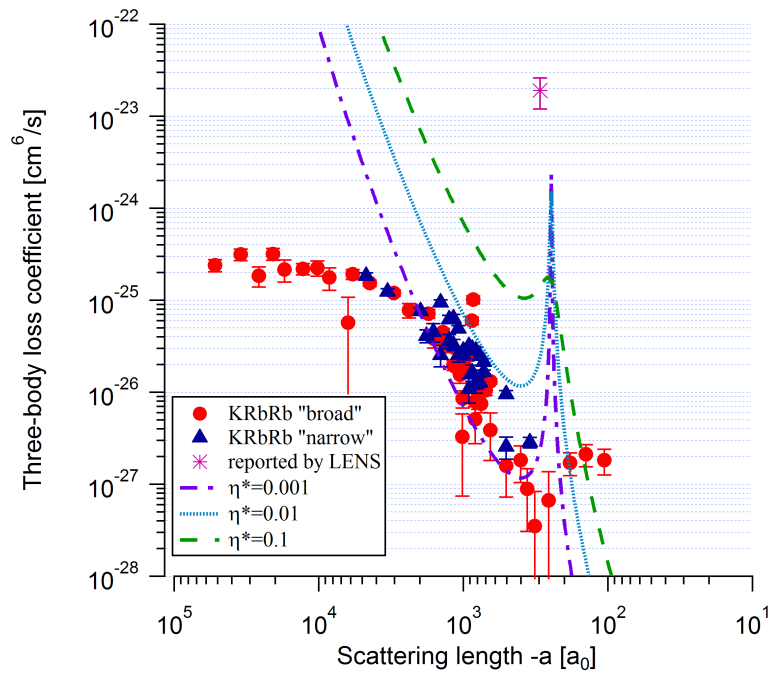


図 5.10: 散乱長負側の三体ロス係数 (KRbRb) の散乱長依存性:

LENS のグループの値は論文 [44] における値を引用した。緑破線、水色点線、紫一点短鎖線はそれぞれ Effective field theory(式 5.14) における理論式 ($\eta_* = 0.001, 0.01, 0.1$) を示す。

第6章 フェッシュバッハ分子の生成

本章では、本研究の主要な研究対象である。フェッシュバッハ分子の生成について述べる。

6.1 Feshbach 分子の生成の要点

Feshbach 分子を作る上で問題となることは、まず第 2.3.6 節で述べたように、原子との衝突に弱く寿命が短いという事である。実験上可能な時間スケール（磁場の変化速度等）に比べて寿命の時間スケールが比較的短いため、実験を行うことが困難となる。従って、これを解決する為に次の二つの戦略が考えられる。

1. 高速に分子を生成・観測する。
2. 原子と分子の衝突を抑制して、寿命を延ばす。

1 を達成する方法として、RF 会合 [24] の方法がある。我々はまずこの方法により、分子の観測に成功した。この方法については節 6.2 及び節 6.3 で詳しく述べる。

2 を達成するには、三次元光格子に原子を一つずつ導入し、そこで分子を生成するのが良い（図 6.1）。これは、節 6.5 で詳しく述べる。最終的にこの手法を用いることで、十分な数の Feshbach 分子を長寿命に作ることに成功した。

以上の問題の他に異核原子の混合系から Feshbach 分子を作る場合、原子雲同士の空間的オーバーラップが重要となる。これに対処することが Feshbach 分子の効率生成に重要であり、これについても次節以降で詳しく述べる。

尚、 ^{41}K - ^{87}Rb の系は共鳴点が 38.4 G と 78.68 G の二つの Feshbach 共鳴を持つが、本研究では 78.68 G の Feshbach 共鳴において分子の生成を行った。

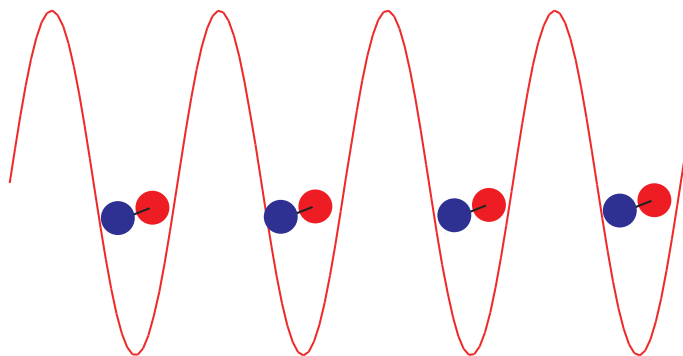


図 6.1: 光格子中の分子の模式図

6.2 Feshbach 分子の生成手法

フェッシュバッハ分子の生成する主な手法として磁場スweepによるものと、RF 会合 [24] によるものがある。磁場スweepによる方法はその名の通り、磁場をスweepすることによって原子状態から分子状態へと断熱的に遷移させる方法である（図 6.2）。一方 RF 会合とは片方の原子をスピン状態が異なる状態（我々の実験では ^{41}K の $|F=1, m_F=0\rangle$ 状態）にしておき、そこに RF を照射することによってスピンを反転させると同時に直接分子状態へと遷移させる方法である（図 6.3）。

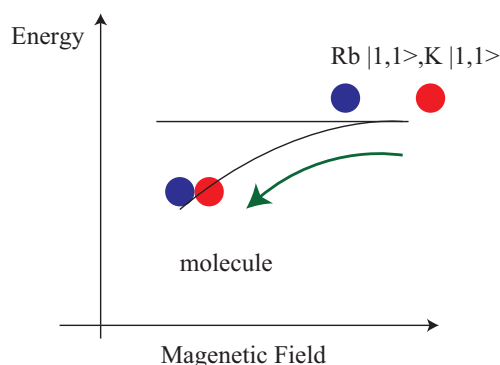


図 6.2: 磁場スweepによる分子の生成

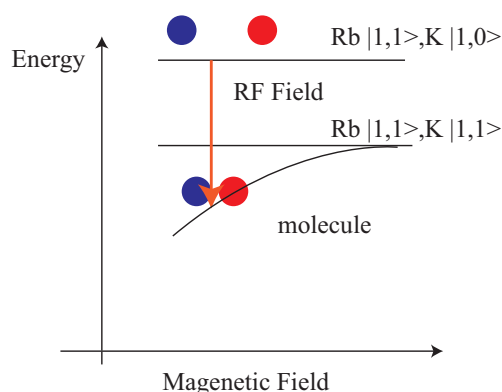


図 6.3: RF 会合による分子の生成

どちらの方法も磁場もしくは RF 周波数を充分ゆっくりスweepすることで断熱的に分子を生成することができる。断熱条件は原子状態と分子状態の結合の強さに依存する。原子状態と分子状態の結合の強さは磁場スweepの方法では Background の散乱長によって決定され [22]、RF 会合の方法では RF の強度に依存する [128]。従って、RF 会合では高強度の RF を用意することで高速に分子を生成できることが期待できる。また、前節で述べたように最終的には三次元光格子による分子の長寿命化を計画しているが、その時に分子の寿命を短くする原因として、光格子の光源の ASE による光散乱や振動、強度ノイズによる加熱等が考えられる。従ってそれらの原因を探るためにも、分子を高速で観測する手法を確立することが重要である。RF 会合では数 $100\ \mu\text{s}$ での分子の生成が期待できる。

また RF 会合のメリットとして、分子の束縛エネルギーを知ることができるといったメリットが存在する。生成に用いた RF の周波数から分子の束縛エネルギーを直接知ることができる。束縛エネルギーは分子の性質を知る上で重要な情報であり、束縛エネルギーの磁場依存性を測定することにより、Feshbach 共鳴の正確な位置を知ることができる。

以上の理由から我々はまず RF 会合による分子の生成を試みた。次節で RF 会合の実験の詳細について述べる。尚本研究では分子の束縛エネルギーを精度良く測定すること及びできるだけ高速に分子を生成することを狙い、RF 周波数のスweepは行わなかった。従って RF 会合による分子の生成は非断熱過程となる。

6.3 RF 会合による分子の観測

分子は RF 会合により生成されるが、分子の生成の観測方法として、次の二つの方法がある。

1. 原子のロスによる測定
2. 分子の直接観測

これら二つの観測方法を図 6.4 に模式的に示した。図 6.4 に示す様に、分子は生成後すぐに原子との衝突等により、振動緩和しトラップから外れていく。従って、会合前後での原子数を比較すれば分子の生成を確認できる。これが 1 の方法である。一方生成された分子を直接緩和前に観測する方法もある。これが 2 の方法である。

1 の方法は分子を直接観測している訳ではなく、分子の寿命等を知ることはできないが、生成・観測速度が遅くても測定が行えるという利点がある。従ってまずこの方法により、RF 会合により分子が生成されることを確認し、束縛エネルギーを確定する。そして、その後分子の生成を高速化し、分子の直接観測（2 の方法）を試みる。

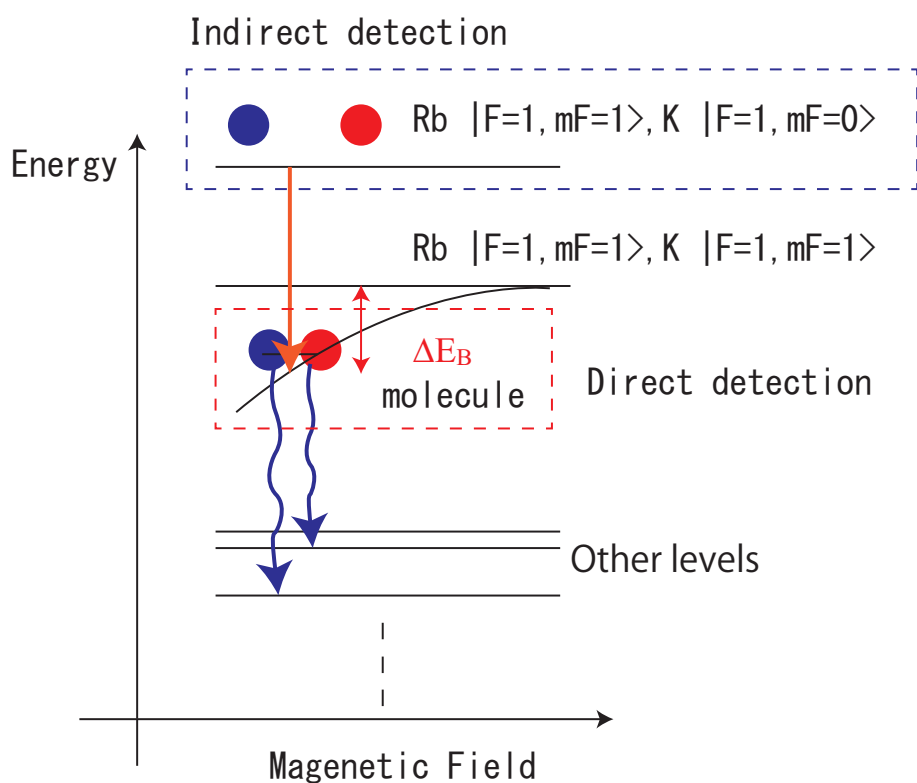


図 6.4: RF 会合による分子の生成の観測方法:
原子のロスから観測する方法（Indirect detection）と分子を直接観測する手法（Direct detection）がある。

6.3.1 ロスによる測定

ロスによる測定は筆者の修士論文に詳しく書いてある [114]。ここでは測定の概要を述べる。

1080 nm 光トラップ中に RF 遷移を用いて、 ^{41}K の $|F=1, m_F=0\rangle$ 状態及び、 ^{87}Rb の $|F=1, m_F=1\rangle$ 状態を用意する。Feshbach 共鳴は、 ^{41}K の $|F=1, m_F=1\rangle$ 状態と ^{87}Rb の $|F=1, m_F=1\rangle$ 状態の Feshbach 共鳴なので、 ^{41}K のスピンを操作することで RF 会合を行うことができる。会合次の平均トラップ周波数は $2\pi \times 95 \text{ Hz}$ (^{87}Rb)、 $2\pi \times 133 \text{ Hz}$ (^{41}K) となり、温度はともに 300 nK。原子数は ^{87}Rb 、 ^{41}K ともに 4×10^4 個程度で、この時の密度は $3.6 \times 10^{12} \text{ [1/cm}^3\text{]}$ (^{87}Rb)、 $3.1 \times 10^{12} \text{ [1/cm}^3\text{]}$ (^{41}K) となり位相空間密度は 0.14 (^{87}Rb)、0.38 (^{41}K) となる。またこの時の RF の強度の指標として、原子の共鳴でのラビ周波数を測定した。これは高磁場で ^{41}K の $|F=1, m_F=0\rangle$ 状態のみをイメージングし、RF 照射時間を変えながら、原子数を観測することで測定した。測定されたラビ周波数は、 $2\pi \times 14 \text{ kHz}$ である。

RF 照射時間は 50-200 ms 程度で、十分な原子数の減少、即ち分子の生成が確認できた。原子のロスのスペクトラムは温度によるシフトとブロードニングが存在する為、これをボルツマン分布でフィッティングして束縛エネルギーを決定した。

6.3.2 束縛エネルギーの決定

各磁場での束縛エネルギーをプロットすると、図 6.5 のようになる。Feshbach 共鳴点近傍では、束縛エネルギーは二次関数で表すことができるので、フィッティングにより Feshbach 共鳴点を決定すると、 $78.68 \pm 0.03 \text{ G}$ となる。先行研究では、Feshbach 磁場自体に変調をかけることによって束縛エネルギーを測定している [66] が、測定結果は良く一致しており、精度良く束縛エネルギーを測定することができたといえる。

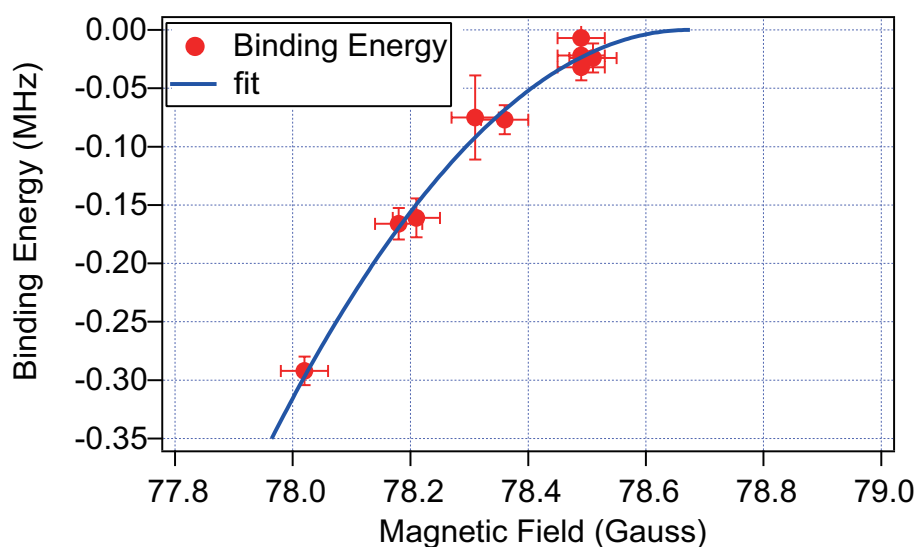


図 6.5: Feshbach 分子の束縛エネルギー

6.3.3 分子の生成・観測速度の高速化

ロスによる分子の観測により、束縛エネルギーが決定されたので。次に分子の生成・観測を高速化し、分子の直接観測を試みる。尚、これらの分子の直接観測の実験は井上研究室の学位論文にも詳しく記載されている [129]。

生成速度の高速化

RF 会合による分子の生成 (K-Rb) は以下のレート方程式で示される。

$$\frac{dn_{\text{mol}}}{dt} = K_{\text{RF}}n_{\text{K}}n_{\text{Rb}} - K_{\text{Loss,K}}n_{\text{KRb}}n_{\text{K}} - K_{\text{Loss,Rb}}n_{\text{KRb}}n_{\text{Rb}} \quad (6.1)$$

生成、ロス共に二体の過程を考えている。ロス係数 $K_{\text{Loss,K}}$ 、 $K_{\text{Loss,Rb}}$ に対して、会合係数 K_{RF} をどれだけ大きくすることができるかが鍵となる。

分子の生成速度は Klempt らによって計算されている [128]。RF パルスを τ [s] 間照射したときの生成分子数 N_{mol} は

$$N_{\text{mol}} = \frac{\pi}{2}\Omega^2\tau^2 \int_0^\infty h(\varepsilon_r)\exp\left[-\frac{(E_{\text{rf}} - E_{\text{b}} - E_0 - \varepsilon_r)^2\tau^2}{\hbar^2}\right] F_f(\varepsilon_r)d\varepsilon_r \quad (6.2)$$

ここで Ω は対応する原子遷移のラビ周波数、 $E_{\text{rf}} = h\nu$ は RF 光子のエネルギー、 E_{b} は分子の束縛エネルギー、 E_0 は原子の遷移のエネルギー、 ε_r は原子対の相対運動エネルギーを示す。また、 $h(\varepsilon_r)$ は状態密度、 $F_f(\varepsilon_r)$ は単位エネルギー辺りの Frank-Condon factor を示す。式 6.2 より、分子の生成速度 N_{mol}/τ を上げる為には、概ね以下の条件を満たせば良いことが分かる。

1. 高い原子遷移のラビ周波数
2. 高い（相対）位相空間密度
3. 高い Frank-Condon factor

すなわち高強度の RF を用意し (1)、より密度が高く温度の低い原子集団を用意し (2)、かつ共鳴点のすぐ傍 (3) で RF 会合を行えば良い。ただし 2、3 の条件はロスの速度も高めてしまう可能性がある為、1 の条件を追及することにした。

従って筆者は高強度の RF を用意する為に共鳴アンテナを作成し（節 4.7）、高出力（100W）の RF アンプ（Minicircuit、ZHL-100W-GAN+）を用意した。この RF を用いて後述の Stern-Gerlach の方法により、 $^{41}\text{K}|1,1\rangle - |1,0\rangle$ 間のラビ振動を観測した。測定されたラビ周波数は 105 kHz であり、従来の 10 倍程度の強度の RF を用意できたことになる。

Stern-Gerlach separation

分子の観測手段として、分子を直接イメージングする方法（厳密には分子を光で解離し、原子をイメージング）があるが [24]、この方法ではパワーブロードニングにより生成

された $^{41}\text{K}|1,1\rangle$ 原子も一緒に観測してしまうという問題がある。最初に観測される分子数は少ないと考えられる為、この方法では原子と分子を区別することが難しい。

一方より簡便な方法として Stern-Gerlach の方法によるものがある。これは、原子と分子の磁気モーメント及び質量が異なることを利用して、磁場勾配により原子と分子を空間的に分離する手法で、 Na_2 分子の観測等にも用いられている [23]。高速に原子と分子を分離するには、大きな磁場勾配を素早く立ち上げる必要があり、その為に筆者は Stern-Gerlach 用のコイルを導入した (節 4.6.4)。これにより、原子と分子を数 ms で完全に分離できる [129]。

6.3.4 分子の直接観測

分子の高速な生成・観測により、分子の直接観測が可能となった [129]。ロス測定の時と同様に 1080 nm 光トラップ中に ^{41}K の $|F=1, m_F=0\rangle$ 状態、 ^{87}Rb の $|F=1, m_F=1\rangle$ 状態を用意する。この時の典型的な実験条件は、原子数 $N_{\text{K}} = N_{\text{Rb}} \sim 1 \times 10^5$ 個、密度 $n_{\text{K}} = n_{\text{Rb}} \sim 4 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ 、温度 $T_{\text{K}} = T_{\text{Rb}} \sim 350 \text{ nK}$ である。RF 照射時間は 1 ms である。RF 会合により束縛エネルギー 100 kHz 程度の分子の生成を目指す。Stern-Gerlach の方法により空間的に分離した後、磁場を Feshbach 共鳴を超えるように、sweep することで分子を原子に解離し、原子をイメージングする。

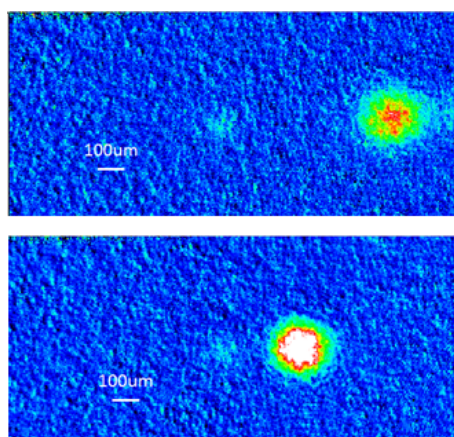


図 6.6: RF 会合による分子の直接観測:

上 (下) の画像が K (Rb) 原子に対する共鳴光による吸収イメージングである。それぞれの画像の中心の影が分子のシグナルに相当する。

表 6.1: RF 会合の分子数のフィッティング結果

	原子数	分子数
上 (K) の画像	$N_{\text{K}} = 4.4 \times 10^4$	$N_{\text{KRb}} = 9 \times 10^2$
下 (Rb) の画像	$N_{\text{Rb}} = 6.3 \times 10^4$	$N_{\text{KRb}} = 7 \times 10^2$

図 6.6 に吸収イメージングの画像を示す。上 (下) の画像が K (Rb) 原子に対する共鳴光による吸収イメージングである。それぞれの画像の中心の同じ場所にわずかな影が存在

するが、これが分子に由来するシグナルである。画像より原子数及び分子数をフィッティングにより求めると、表 6.1 の様になる。上の画像と下の画像の分子数の違いは、フィッティングエラーに起因するものと考えられる。Feshbach 分子の生成効率は 1 % 程度であると考えられ、非常に小さい。分子数は我々の検出限界程度しか存在せず、これを用いた実験は困難である。

RF の照射時間 0.8-1.5 ms で分子の観測が可能であった。従って分子の生成は 1 ms 程度でピークに達し、その後はロスにより分子数が減少するといったことが分かった。従ってロスの時定数は生成レートよりも速く 1 ms 以下であり、この状態で十分な分子を観測することは難しい。ここでの相互散乱長は $a_{\text{RbK}} \sim 500a_0$ でありロスが速い可能性がある（第 7 章も参照）。

より生成効率を上げるには、位相空間密度を上げることが重要であるが、 $\text{K}|1,0\rangle$ 状態と $\text{Rb}|1,1\rangle$ 状態は散乱長が負であり、非弾性衝突が大きく実験が難しいことが分かった。また RF 強度を上げて生成レートを上げる方法も後述（節 6.3.5）の理由により難しく、RF 会合により分子を十分な数生成することは難しいということが分かった。

トラップ中での磁場スイープによる分子の生成

RF 会合による分子の生成の直接観測を受けて、磁場スイープによる分子の生成も試みた。Stern-Gerlach の方法を用いれば、磁場スイープによる分子の生成でも高速に分子を観測できる。また RF 会合による分子のシグナルも 1 ms 程度の照射で可能であったので、磁場スイープによる方法も 1 ms 程度であれば可能である（磁場を 1 ms 程度で滑らかに変化させるのは難しいが高速に振るだけなら可能である。節 4.6.3 を参照の事）。磁場のスイープ速度は 6.2 G/cm 程度で、これは Landau-Zener の条件式 2.93 により遷移確率を求めると遷移確率は 99.5% の計算となり、十分断熱条件を満たしている。原子数や温度、密度は RF 会合の実験とほぼ同様の原子集団を用意して実験を試みた。

磁場スイープによる方法でも同様のシグナルが安定的に観測された。磁場スイープによる方法では散乱長の大きな領域を高速に通り抜けることができるので、ロスの観点からは有利である可能性がある。

またこの時光トラップ中で分子の生成が確認された。すなわち光散乱による影響は 1 ms 程度の時間スケールでは無視できるという事である。これは 1080 nm、809 nm どちらの光トラップでも問題がなかった。従って次なる目標は Feshbach 分子の生成の効率を上げ、測定に十分な数の分子の生成を行うこと、及び三次元光格子による分子の長寿命化である。

6.3.5 会合係数の飽和

式 6.2 を見ると、原子の会合係数はラビ周波数の二乗に比例する為、RF 強度を上げていけば無限に会合係数を上げられる様に思われる。しかし実際はそのような事は無く、会合係数は有限値で飽和することになる。会合係数の最大値は系の特徴的な長さスケール L を用いて以下の式で与えられることが知られている [130, 131]。

$$K_{\text{sat}} = \frac{\hbar}{m} L \quad (6.3)$$

RF 会合においては、長さスケール L は熱的ドブロイ長 $\lambda_{dB} \equiv h/\sqrt{2\pi mk_B T}$ で与えられることが知られている [130, 131]。一方磁場スイープの方法による場合は長さスケールはバックグラウンドの散乱長 a_{bg} で与えられる。低温では熱的ドブロイ長は散乱長よりも充分長くなる為（数 100 nK で数 $1000 a_0$ ）、高速に会合できることが期待できる。

実際に我々は会合係数を RF の照射時間に対する原子のロスの程度から見積もった。実験の詳細は井上研究室の学位論文に詳しく載っている。ここでは結果のみを示す。図 6.7 に対応する原子のラビ周波数（即ち RF 強度に対応）に対する RF の会合係数を示した。概ねラビ周波数 15 kHz 程度から会合係数が飽和していることが分かる。従って RF 会合のレートの高速化には限界があり、別の方法で分子数を確保する必要があることが分かった。

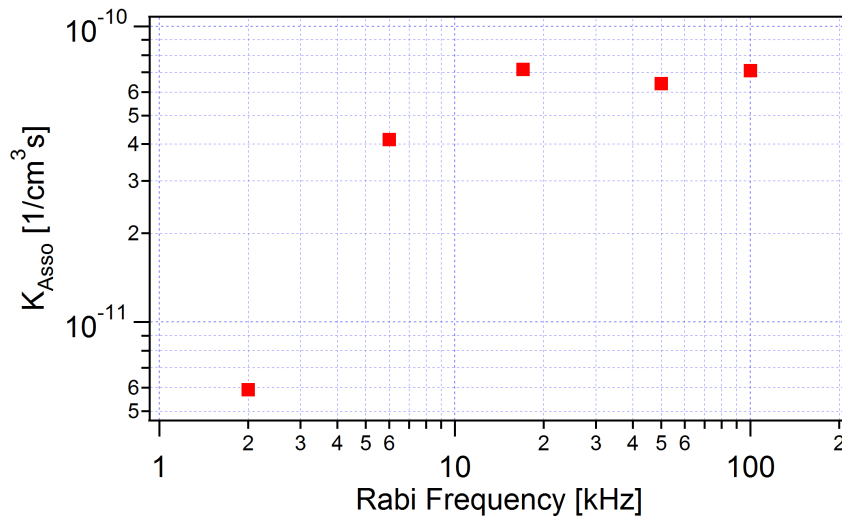


図 6.7: 会合係数の RF 強度依存性:

RF 強度は対応する原子遷移 $K|1,1\rangle - |1,0\rangle$ 間のラビ周波数で示されている。

6.4 Dual BEC からの分子の生成

前節までの実験により、RF 会合による分子の高速生成には限界があることが分かった。むしろ磁場スイープにより相互の散乱長が大きい領域を素早く通り抜けることで、分子の生成が安定化できる可能性があることが示された。

磁場スイープによる分子の生成効率を上げるには、原子の位相空間密度を上げることが重要である。従って縮退状態の原子を用いることが、最も効率が良いと考えられる。ただし縮退状態では密度に関しては大きくなりすぎてしまう危険性がある。これはロスレートを増大させ、観測できる分子数を減少させる。従って、できるだけ密度の低い縮退状態を使う必要がある。

密度の低い縮退状態を作る際には必然的にトラップ周波数の小さい、トラップを用いる必要がある。すると異核原子の混合系の場合、相対重力サグが大きくなりこれは原子雲のオーバーラップの減少につながる。従って密度の低い同時縮退状態を如何に重ねるかという事が異核原子の分子を効率的に生成する上で重要になる。

6.4.1 緩い光トラップ中からの分子の生成

Dual BEC から分子を生成する場合、まず原子の三体ロスに気をつける必要がある。三体ロス係数は第5章で決定された。それによると三体ロスレートの絶対値は K-K-Rb と K-Rb-Rb を比較すると、全領域に渡って K-K-Rb の方が大きい従って三体ロス係数 L_{KKRb} に気をつければ良い。混合 BEC を重ね合わせるには混合条件を満たす必要がある。これは式 3.38 を満たす必要がある。散乱長 $a_{KRb} \sim 0 a_0$ でロス係数は $L_{KKRb} < 5 \times 10^{-27} \text{cm}^6/\text{s}$ である。従ってこの上限値を目安に BEC の密度を調整する。

密度を下げる為にできるだけ緩い光トラップ中に BEC を用意する。また相対重力サグを解消する為、重力方向は 809 nm 光トラップで支えることにする。光トラップの詳細については、節 4.10.4 を参照の事。この時の実験では ODT(P)(809 nm、ビーム径 $(w_y, w_z) = (80, 135) \mu\text{m}$) と ODT(B)(1080 nm、ビーム径 $w = 300 \mu\text{m}$) の交差型光トラップ中で実験を行った。重力方向を支えるトラップとして 809 nm の光トラップを使用した点と交差型トラップとして ODT(A) ではなくよりビーム径の大きい ODT(B) を使用した点が、RF 会合の実験と異なる点である。ここに $N_K = N_{Rb} = 4 \times 10^4$ 個程度の Dual BEC を用意した。最終的なトラップ周波数は $(\omega_x/2\pi, \omega_y/2\pi, \omega_z/2\pi) = (10, 92, 54) \text{Hz (for Rb)}$ 程度となる。x 方向だけ 1080 nm で抑えられている為、K と Rb で異なるトラップ周波数を持ち、 $\omega_x/2\pi = 13 \text{Hz (for K)}$ である。この時のピーク密度は $n_K = n_{Rb} = 3 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$ となり散乱長 $a_{KRb} \sim 0 a_0$ で十分長い時間 ($\sim \text{s}$ 程度) 重ね合わせることができるということが分かった。

以上の条件で分子の生成を試みる。散乱長 $0 a_0$ (87 G) 付近で Dual BEC を重ね合わせ、素早く磁場スイープを行い ($\tau \sim 1 \text{ms}$) 共鳴点 (78.68 G) を超えて分子を生成、反対側の散乱長 $0 a_0$ 付近 (72 G) まで磁場を振った後、Stern-Gerlach の方法により原子と分子を分離し、十分原子と分子が空間的に分離した後に逆方向に磁場を振り、分子を原子に解離し、それぞれの共鳴光で観測する。尚、分子の磁気モーメントは小さく、質量が大きいため Stern-Gerlach の方法により、分子をトラップ中に残したまま、原子のみを分離することが可能である。この実験では分子を解離するまで、光トラップを切らずに実験を行った。

以上の様な方法で作成した分子のイメージが図 6.8 となる。

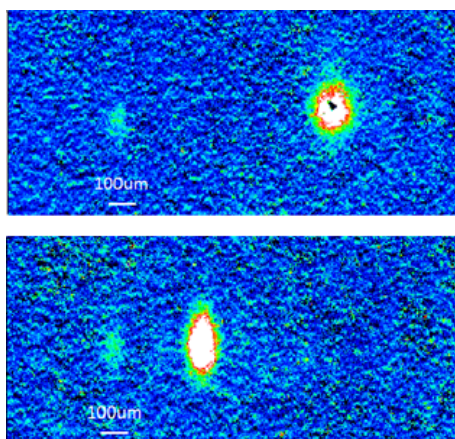


図 6.8: Dual BEC からの分子の生成:

上(下)の画像が K (Rb) 原子に対する共鳴光による吸収イメージングである。それぞれの画像の左の影が分子のシグナルに相当する。

図 6.8 の分子の数をフィッティングにより求めると、上の画像から $N_{\text{mol}} = 1.8 \times 10^3$ 、下の画像から $N_{\text{mol}} = 2.0 \times 10^3$ を得る。生成効率は 5% 程度となっており、大幅な改善が見られる。

分子の生成数は分子と原子の衝突によるロスによってリミットされていると思われる。Stern-Gerlach によって分離するまでの時間を調整することにより、原子と分子の衝突の時間を調整することができる。実際の磁場の変化の様子を Hall probe により測定した。図 6.9 にその様子を示す。図で示す様に、バイアス磁場は激しく振動してしまっており、この時間スケールでは振動を抑えるのが難しい。Stern-Gerlach coil は素早く立ち上がっており、これの立ち上がる時刻を調整することによって、分離のタイミングを制御できる。

図 6.10 に Stern-Gerlach のタイミングを変えて、分子を生成し、K のイメージ光による画像からのフィッティングと Rb のイメージ光による画像からのフィッティングを比較した。やや Rb の方が分子数が多く見えているものの、概ね同数の分子数が得られている。分子数の見積もりに 20% 程度の誤差があると思われる。これ以降分子数はそれぞれのイメージの平均を採用することにする。Stern-Gerlach のタイミングによる分子数の変化を図 6.11 に示す。始め 1 ms 程度で生成分子数がピークに達する。これは、時刻 1 ms 程度でフェッシュバハ共鳴を完全に乗り越え、生成分子数が最大になる為と思われる。その後の減少は分子の寿命を示している。寿命は 4 ms 程度である。生成時間と寿命が同程度で有ることから、より効率を上げるには、衝突の抑制が有効であると考えられる。また磁場を滑らかに変化させることができない為、系統的な実験が難しい。従って次の目標は三次元光格子による分子の長寿命化となる。

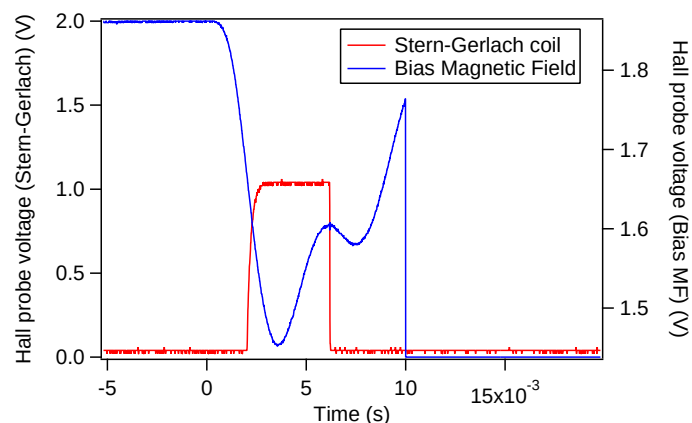


図 6.9: 磁場スイープの様子:

赤線が Stern-Gerlach coil、青線が Bias Magnetic Field を示す。

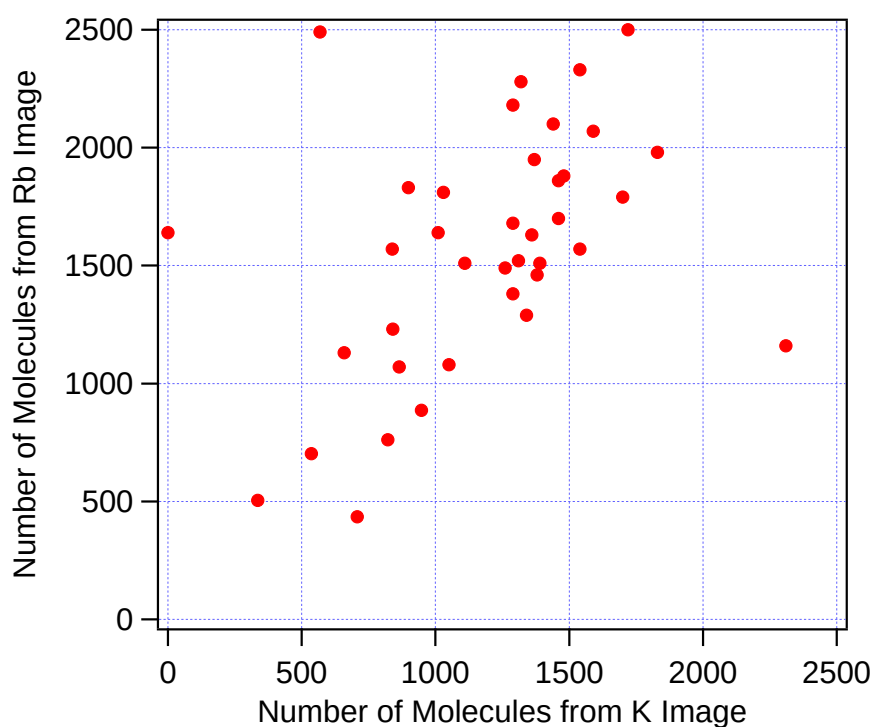


図 6.10: 分子のフィッティングの比較:

同サンプルに対するフィッティングの結果を K のイメージ光からのフィッティングを横軸に、Rb のイメージ光からのフィッティングを縦軸にプロットし、比較した。

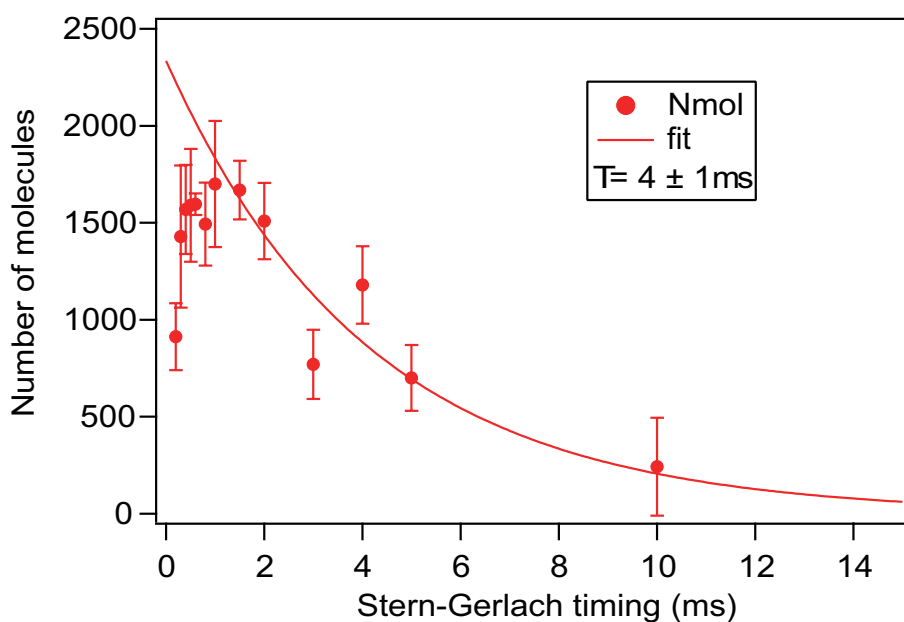


図 6.11: Stern-Gerlach のタイミングに対する生成分子数の変化

6.4.2 原子雲のオーバーラップの向上

三次元光格子中での分子の生成を試みる前に原子雲同士のオーバーラップについてより詳細に調べる。

KRb 原子雲の重力方向の位置合わせ

809 nm 光トラップ中で相対サグが解消されていることはトラップ周波数の比較によりなされているが、BEC はサイズが小さい為、より詳細に位置合わせをすることで、オーバーラップの大幅な改善が期待できる。また多くの場合交差型光トラップ中で実験が行われ、cross 側の光トラップは 1080 nm を用いている為これも重力サグに多少の影響を及ぼす。従って実際に分子の生成に用いるトラップを用いてオーバーラップを評価するのが、良いと考えられる。

まず Phase contrast imaging を用いて、side imaging により同時 BEC の相対位置のずれを直接 *in-trap* のイメージングにより測定した。809 nm 光トラップの周波数を変化させることで相対位置を調整することができる。図 6.12 にその結果を示す。

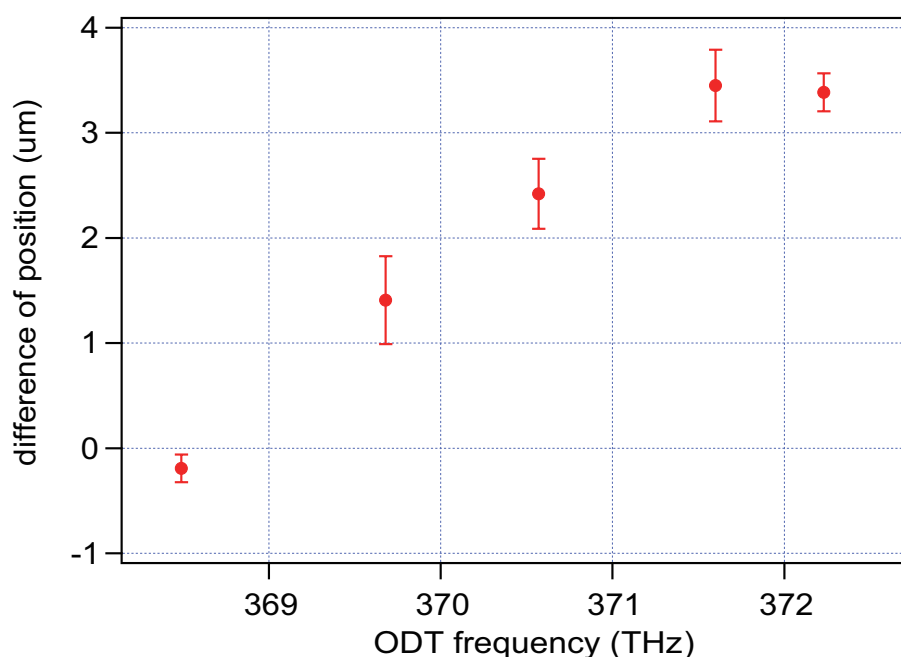


図 6.12: 809 nm 光トラップの周波数に対する同時 BEC の相対位置の変化

これまで周波数は 370.5 THz 付近を用いていたため、2.5 μm 程度の相対位置のずれがあったと考えられる。従って周波数を 369 THz 付近に変更すれば、オーバーラップの改善が期待できる。

実際に周波数を変化させながら分子の生成数を比較した所、図 6.13 の様になった。実験条件のバラつきによる誤差が大きいですが、概ね 369.5 THz 付近で生成数が最大になる様に思われる。実際この後、これまでよりも分子生成数は安定するようになった。尚より細かく見ると、いくつかの周波数で分子数の大幅な減少を確認した。恐らく特定の周波数で分

子の遷移をたたいてしまっていると考えられる。これについては後にさらに詳細に調べてあるので、そちらを参照の事。

尚 369.5 THz では波長 812 nm 程度となるが、本研究では光トラップの呼び方は 809 nm トラップで統一する。

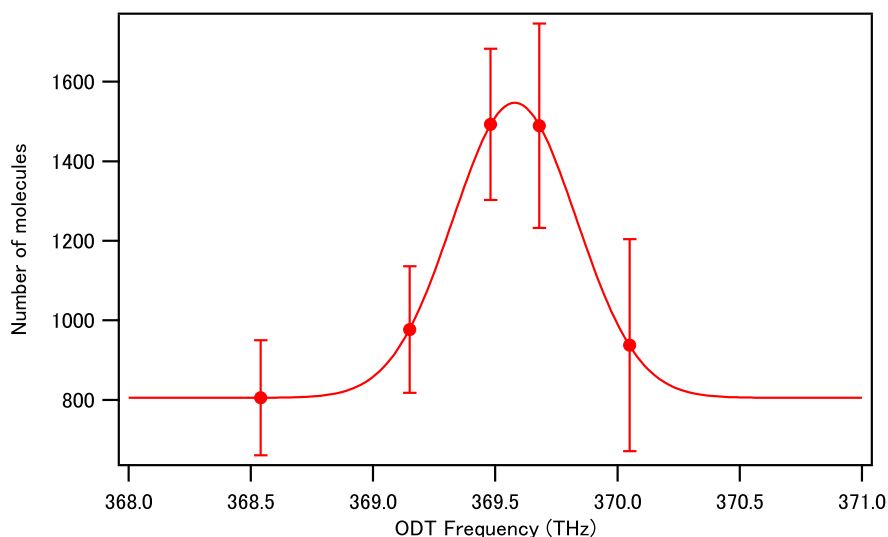


図 6.13: 光トラップの周波数に対する分子の生成数の変化

混合時の散乱長依存性

同時 BEC のオーバーラップは相互散乱長によっても変化する。節 3.3.2 の議論により、散乱長を負に持っていけば、原子雲のオーバーラップが最大になることが期待できる。ただし、その際三体ロス係数も上昇する為、ロスやヒーティングが起こる可能性がある。実際に混合時の相対散乱長を変化させ分子の生成数を比較した。結果は図 6.14 の様になる。

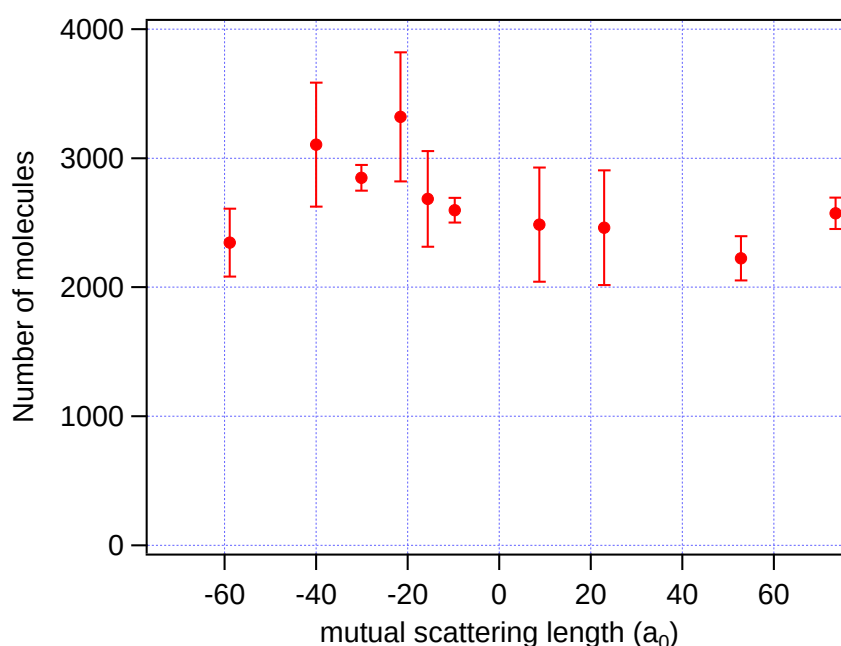


図 6.14: 混合時の相互散乱長に対する分子の生成数の変化

概ね $-20a_0$ 付近で分子生成数が最大になる為、この値を採用した。尚混合領域外も確認したが、生成分子数はさらに減少し、効率は良くならないということが分かった。

これらのオーバーラップの改善により、概ね 3×10^3 個程度の分子を安定的に生成できるようになった。生成効率は 8% 程度となる。尚、K と Rb の原子数も調整してみたが、強い依存性は確認できず、また生成分子数が増えることはなかったので、原子数に関しては概ね最適値で実験できていたと考えられる。

6.5 三次元光格子中での分子の生成

三次元光格子中で分子を高効率に生成するには、原子を光格子の振動基底状態に導入し、かつ空間的にもそれぞれの原子が重なるようにする必要がある。

6.5.1 三次元光格子へのロード

まず原子が光格子の振動基底状態に導入できているかどうかを確認する為に、Band-Mapping の実験を行った。図 6.15 にその様子を示す。Dual BEC を 50 ms 程度の時間をかけて三次元光格子に導入する。三次元光格子の深さは、モット絶縁体ができるのに十分な深さまで上昇させる。その後 5 ms 程度の時間をかけて調和トラップに開放し、quasi-momentum を momentum に転写する。K、Rb どちらも 1st Brillouin zone 内に分布しており、ほとんど全ての原子を振動基底状態に導入できている。概ね 50-100 ms 程度のローディング時間で十分断熱的に導入できていることが分かった。ローディング時間を 50 ms より小さくしていくと、2nd Brillouin zone に分布する原子が増えてくる。

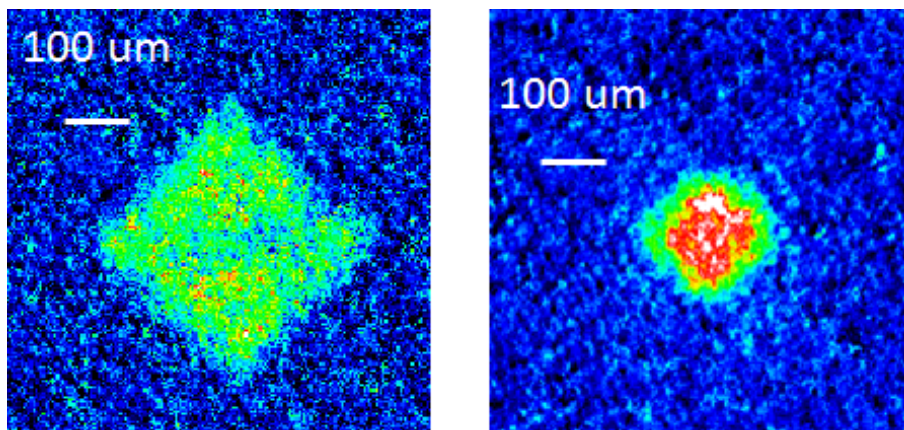


図 6.15: 二原子種同時バンドマッピング:

左 (右) の画像が K (Rb) のイメージング画像であり、TOF15.7 ms (16.3 ms) 後の画像である。

6.5.2 三次元光格子中での分子生成

光格子ちゅうで分子を生成するには、まず ODT(B) と 809 nm の交差型光トラップ中で原子を重ね合わせる。この時の相互散乱長は $a_{\text{KRb}} \sim -20 a_0$ (85 G) に調整してある。この際、三次元光格子を用いる為に ODT(B) は途中でソレノイドシャッターを開き、うち返しを入れることによって光格子に移行する。この時の光格子は浅く、十分超流動状態であり K、Rb を混合するのに支障はない。この過程に 300 ms 程度を用いて、OL(B) と 809 nm の交差型トラップ中に K、Rb の BEC を導入する。その後 90 ms 程度で三次元光格子を立ち上げる。この時原子のトンネリングは充分抑えられている。磁場を滑らかに変化させる為に、79.5 G 程度 ($\sim -440 a_0$) まで磁場を近づけたのちに 1-4 ms 程度の磁場スイープにより、分子を生成する。その後光格子を瞬時に立ち下げ、Stern-Gelrach の方法により原子と分子を分離する。この時分子の拡散を少なくする為、809 nm 光トラップは入れたままにしてある。その後磁場を逆方向にスイープして分子を原子に解離させる。この時光トラップは同時に切る。その後それぞれの共鳴光により、原子、分子をイメージングした結果が、図 6.16 である。分子数は 4×10^3 個程度となり、概ね 10% 程度の変換効率である。スイープ時間は 1-4 ms 程度までほとんど生成分子数は変わらず、トンネリングの抑制効果が現れている。

さらに生成分子数を上げる為、809 nm 光トラップの水平方向のビーム径 $w_z = 135 \mu\text{m}$ を $w_z = 310 \mu\text{m}$ まで広げた。この時のイメージ画像が図 6.17 となり生成分子数が 8×10^3 個程度となる。生成効率は 20% 程度となり、かなりの高効率で分子の生成が行われている。

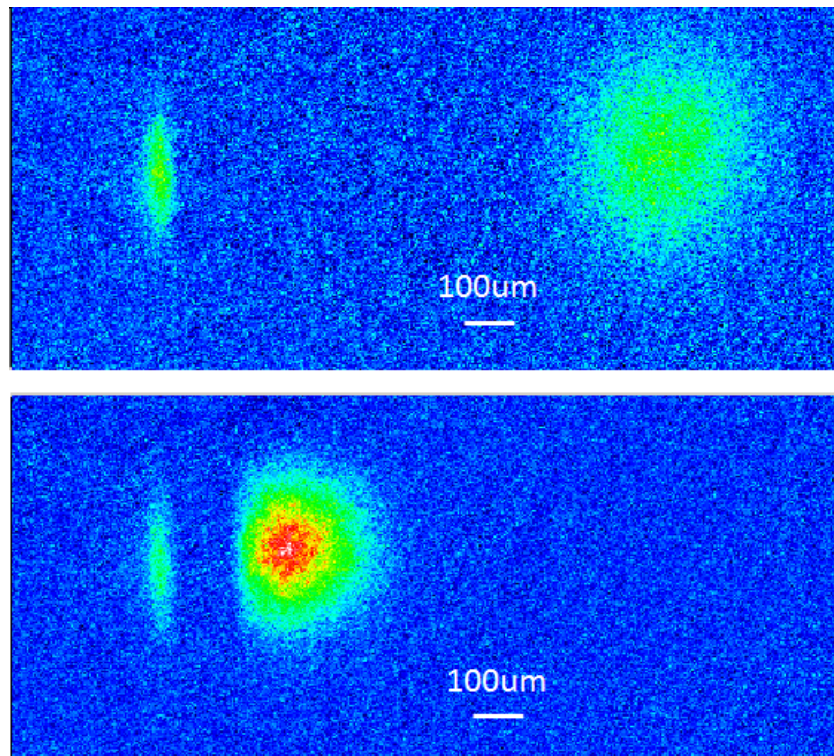


図 6.16: 光格子中での分子の生成

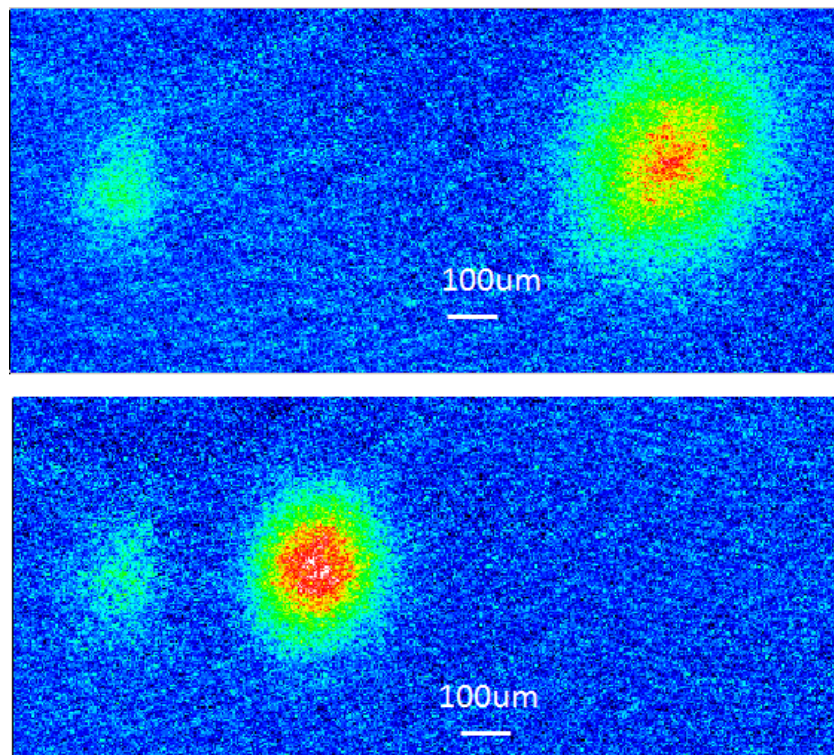


図 6.17: 光格子中での分子の生成 (wide 809nm trap)

6.5.3 KRb 原子雲の重力方向の位置合わせ (with lattice)

光トラップ中でも 809 nm 光トラップの周波数の調整により、KRb 原子雲の位置合わせを行ったが、同様に光格子中でも位置の微調整を行った。光トラップの周波数に対して、生成分子数をプロットすると、図 6.18 の様になる。

水平方向のビーム径を変更前 (normal trap、緑三角)、変更後 (wide trap、赤丸) の二回実験を行った。今回周波数依存性を詳細に調べた結果、光トラップ中の生成と比べて緩やかな変化が見られた。いずれも、生成効率のピークは光トラップ中と同様、369 THz 付近となった。ガウシアンによるフィッティングによると、ピークの周波数は、369.2(2) THz (normal trap)、368.9(0.1) THz (wide trap) となった。

また、今回いくつかの周波数で分子の生成が全く見られなかった (青四角)。エラーバーは原子数の測定限界が 500 個程度であると考えてつけてある。これらの点の周波数間隔は、およそ 400 GHz で一定であり、分子の振動準位を直接たたいていると思われる。従って、これらの点を避ける様に周波数を設定する。

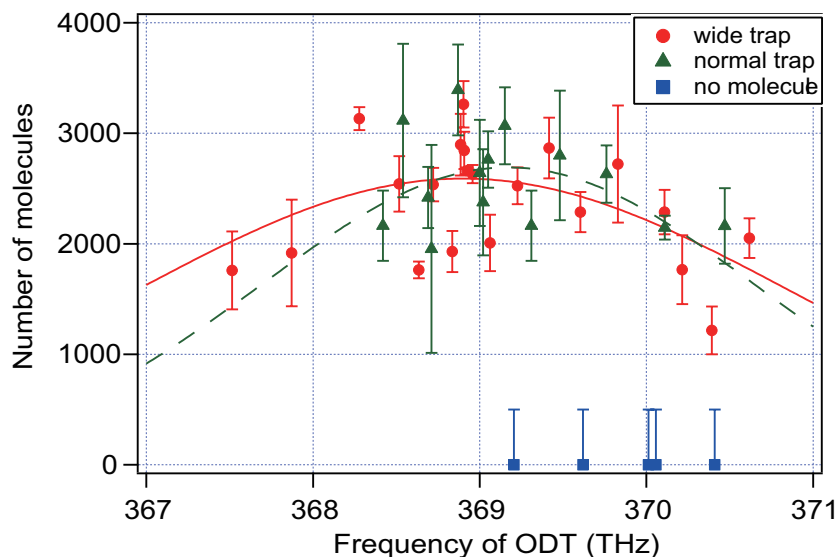


図 6.18: 光トラップの周波数に対する分子の生成数の変化

6.5.4 原子の吹き飛ばし

三次元光格子に分子をいれても、残った原子のトンネリングにより寿命が制限されることになる。K のトンネリングレートにより分子の寿命は制限されており、寿命は 10 ms 程度である。残った原子を吹き飛ばすことにより、寿命を延ばすことができる。吹き飛ばしは RF 遷移と共鳴光の組み合わせにより行う。まず線幅の小さい RF により、原子のみを別の準位に移す。その後、共鳴により原子のみを吹き飛ばす。K は RF 遷移により $|1, 1\rangle \rightarrow |1, 0\rangle \rightarrow |1, -1\rangle \rightarrow |2, -2\rangle$ と遷移させ、光学遷移は $|F = 2, m_F = -2\rangle \rightleftharpoons |F' = 3, m_{F'} = -3\rangle$ の closed transition により吹き飛ばす。Rb は RF 遷移により $|1, 1\rangle \rightarrow |2, 2\rangle$ と遷移させ、光学遷移は $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightleftharpoons |F' = 3, m_{F'} = 3\rangle$ の closed transition により吹き飛ばす。K に対して、 $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightleftharpoons |F' = 3, m_{F'} = 3\rangle$ の遷移を使わないのは、上状態と下状態

の超微細構造分裂が 70 G 付近でほぼ一致する為、分子も一緒に吹き飛ばしてしまう為である。吹き飛ばしにより、K 原子のほとんどと Rb 原子の 90% 程度を吹き飛ばすことができる。Rb 原子の吹き飛ばしは RF 遷移の効率により制限されている。また吹き飛ばしの際の非弾性衝突により分子数が 10-20% 程度減少する。吹き飛ばし後のイメージングは図 6.19 の様になる。光格子を断熱的に立ち下げた後、TOF を行う。この時のロスはほとんど無視できる。これにより分子の温度を評価することが可能となる。分子の温度は 60-80 nK 程度になり。低温の分子集団が生成できている。

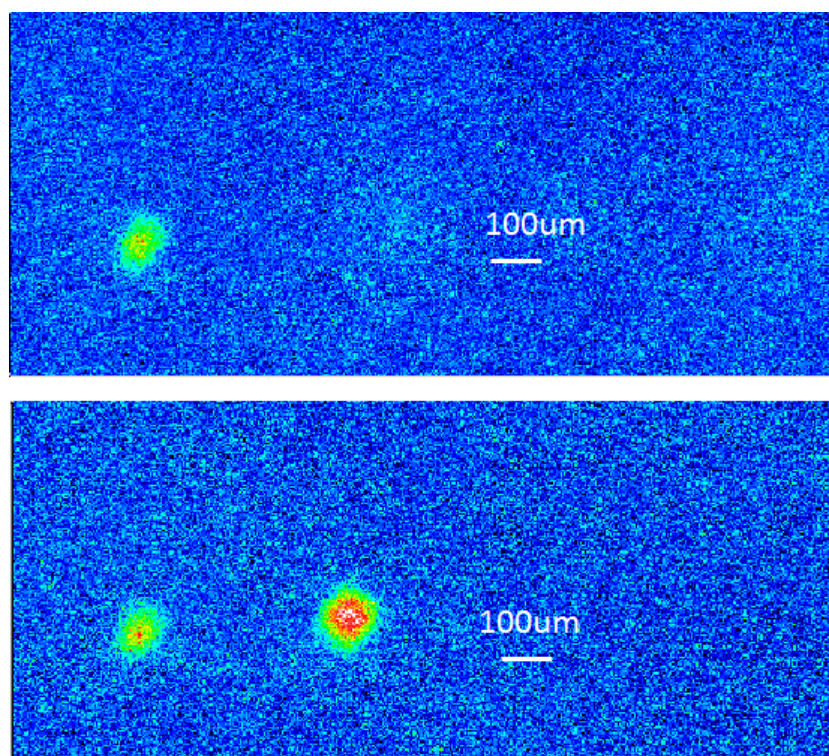


図 6.19: 光格子中での分子の生成 (原子吹き飛ばし後)

6.5.5 分子の寿命測定

原子の吹き飛ばしに加えて、光格子の光源の ASE の除去及び強度の安定化を行ったことにより、分子の長寿命化に成功した。図 6.20 に分子の寿命測定の結果を示す。分子の寿命は 210(15) ms で十分長寿命な分子を生成できている。

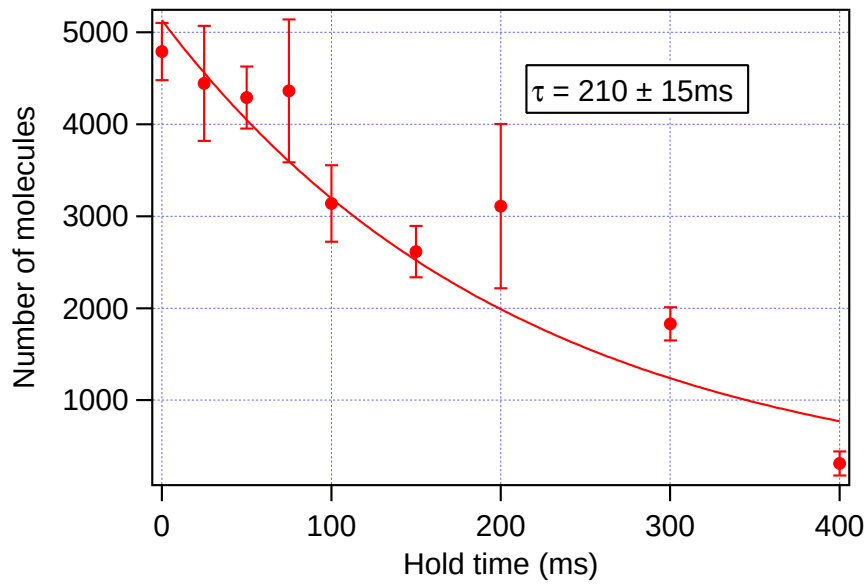
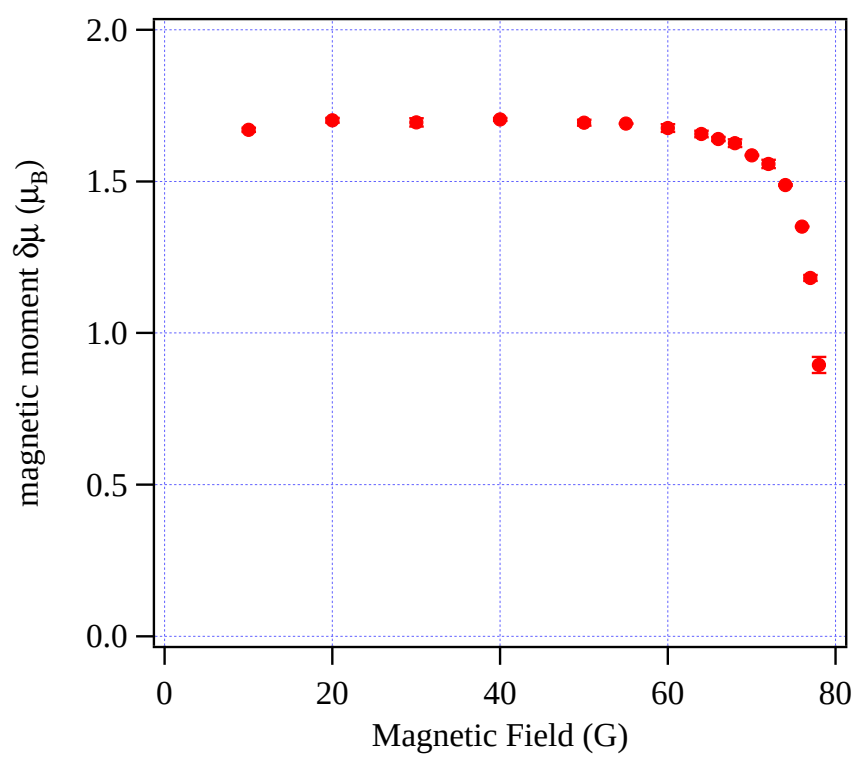


図 6.20: 光格子中での分子の寿命測定

6.5.6 分子の磁気モーメントの測定

分子の性質を示すものとして、分子の磁気モーメントの磁場依存性がある。三次元光格子中で 100 ms かけて磁場を変化させ、その後光格子から分子を開放し、Stern-Gerlach の方法により、原子と分子を分離させる。磁場勾配による加速時間を一定で、解放後の速度を測定することで、分子の磁気モーメントを測定する。磁場勾配の値は Rb 原子の速度から較正する。測定結果を図 6.21 に示す。共鳴から離れると一定値に収束し、Closed channel fraction が 1 に近づいたことを示す。収束値は $\delta\mu = 1.69 \mu_B$ となる。これは、先行研究の計算値 $\delta\mu = 1.59 \mu_B$ にほぼ一致する。またこの測定が可能であることは、磁場の全領域で光格子による長寿命化が有効であることを示す。

図 6.21: 分子の磁気モーメント $\delta\mu$ の磁場依存性

第7章 Rb原子-KRb分子間の二体ロス係数の決定

原子・分子間散乱にも、エフィモフ共鳴が観測されることが知られている。実際 ^{40}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体散乱係数に共鳴の観測が報告されている [45]。比較の為、本研究では ^{41}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体散乱係数を決定する。

^{41}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体ロスは次のレート方程式で示される。

$$\frac{dn_{\text{Rb}}}{dt} = -\beta n_{\text{Rb}} n_{\text{KRb}} - \frac{n_{\text{Rb}}}{\tau_{\text{Rb}}} \quad (7.1)$$

$$\frac{dn_{\text{KRb}}}{dt} = -\beta n_{\text{Rb}} n_{\text{KRb}} - \frac{n_{\text{KRb}}}{\tau_{\text{KRb}}} \quad (7.2)$$

β は ^{41}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体ロス係数を示す。上式より、原子・分子の密度分布の変化を測定すれば良いことが分かる。解析の為、式 7.1、7.2 を空間積分すると、

$$\frac{dN_{\text{Rb}}}{dt} = -\beta I_{\text{KRb-Rb}} - \frac{N_{\text{Rb}}}{\tau_{\text{Rb}}} \quad (7.3)$$

$$\frac{dN_{\text{KRb}}}{dt} = -\beta I_{\text{KRb-Rb}} - \frac{N_{\text{KRb}}}{\tau_{\text{KRb}}} \quad (7.4)$$

となる。ここで、 $I_{\text{KRb-Rb}}$ は空間積分を示し、

$$I_{\text{KRb-Rb}} \equiv \int n_{\text{KRb}} n_{\text{Rb}} d\mathbf{r} \quad (7.5)$$

で定義される。さらに式 7.3、7.4 を時間 t_1 から t_2 で積分すると、

$$N_{\text{Rb}}(t_2) - N_{\text{Rb}}(t_1) = -\beta \int_{t_1}^{t_2} I_{\text{KRb-Rb}} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{N_{\text{Rb}}}{\tau_{\text{Rb}}} dt \quad (7.6)$$

$$N_{\text{KRb}}(t_2) - N_{\text{KRb}}(t_1) = -\beta \int_{t_1}^{t_2} I_{\text{KRb-Rb}} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{N_{\text{KRb}}}{\tau_{\text{KRb}}} dt \quad (7.7)$$

となる。今回一体レートは二体レートに比べて十分小さいと考えられる。従って式 7.7 より一体の項を無視する。

分子・原子間の二体ロス係数を決定するに辺り、原子の三体ロス係数で用いた、PCI による非破壊測定を用いることはできない。従ってロスカーブを測定する際の、初期原子（分子）数の揺らぎが精度を制限する。長期揺らぎの影響をできるだけ、排除する為、測定時間はランダムに選び、また直近二回の測定から時間積分（差分）を得る。すなわち式 7.7 より、

$$\Delta N_{\text{KRb}} = -\beta I_{\text{KRb-K}} \Delta t \quad (7.8)$$

を得る。ここで ΔN_{KRb} は直近二回の測定の分子数差、 $I_{\text{KRb}}\Delta t$ は空間積分の時間積分を台形積分で近似した値である。ここで、式 7.6 ではなく、式 7.7 を元にした理由は、初期の KRb 分子数の揺らぎの方が Rb 原子数の揺らぎより小さく、正確な値が期待できるからである。

密度分布は *in-trap* の測定はできないので、TOF イメージから温度を測定し、トラップ周波数を用いてボルツマン分布から算出する。ここで、Feshbach 分子のトラップ周波数は、分子が感じるポテンシャル及び分子の質量がそれぞれの原子の和であると考え、

$$\omega_{\text{KRb}} = \sqrt{\frac{2U_{\text{KRb}}}{m_{\text{KRb}}\omega^2}} \quad (7.9)$$

$$= \sqrt{\frac{2(U_{\text{K}} + U_{\text{Rb}})}{(m_{\text{K}} + m_{\text{Rb}})\omega^2}} \quad (7.10)$$

$$= \sqrt{\frac{m_{\text{K}}}{m_{\text{K}} + m_{\text{Rb}}} \frac{2U_{\text{K}}}{m_{\text{K}}\omega^2} + \frac{m_{\text{Rb}}}{m_{\text{K}} + m_{\text{Rb}}} \frac{2U_{\text{Rb}}}{m_{\text{Rb}}\omega^2}} \quad (7.11)$$

$$= \sqrt{\frac{m_{\text{K}}}{m_{\text{K}} + m_{\text{Rb}}}} \omega_{\text{K}} + \sqrt{\frac{m_{\text{Rb}}}{m_{\text{K}} + m_{\text{Rb}}}} \omega_{\text{Rb}} \quad (7.12)$$

と計算できる。

式 7.8 より $I_{\text{KRb-K}}\Delta t$ を横軸に、 ΔN_{KRb} を縦軸にプロットすると、その傾きとして $-\beta$ が得られる。図 7.1 にその様子を示す。線形回帰により $-\beta$ を求める。縦軸のずれは、初期分子数の揺らぎに由来する。各磁場でこの測定を繰り返し、 β の散乱長依存性を求める。

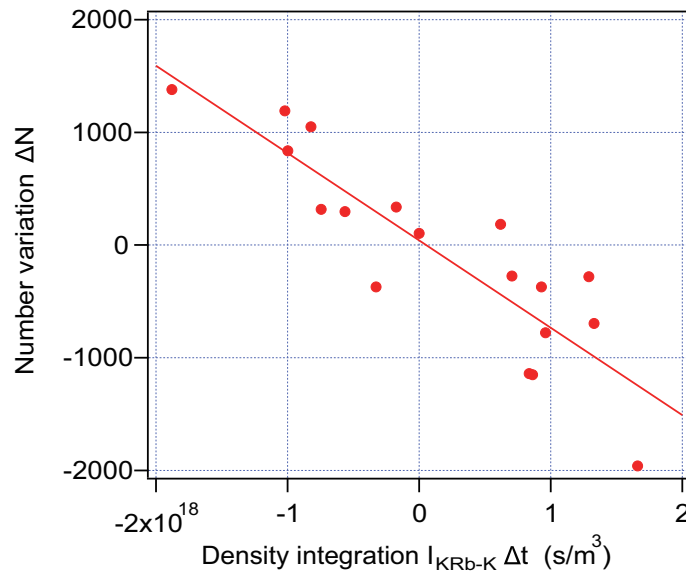


図 7.1: 二体ロス係数の決定

7.1 二体ロス係数の測定

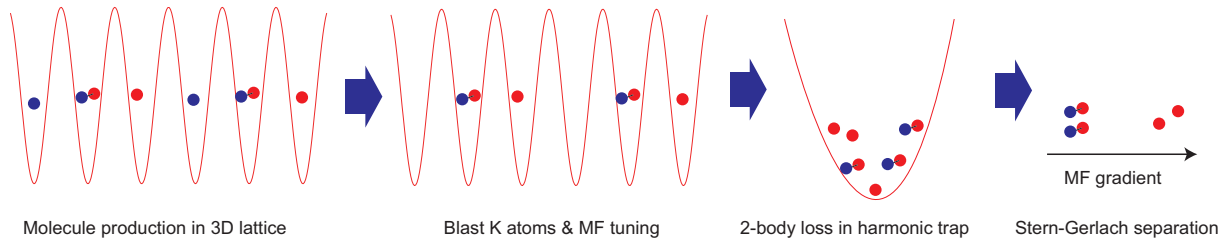


図 7.2: 二体ロス係数の測定の手順

二体ロス係数の測定の手順の模式図を図 7.2 に示す。図に示す様に、まず三次元光格子中で分子を生成する。その後、K 原子、Rb 原子を RF 遷移と共鳴光により吹き飛ばす。Rb 原子は RF 遷移の効率が悪いので、ある程度数の原子が残る。三次元光格子中で、磁場を滑らかに変化させ (10 ms) その後三次元光格子から調和トラップ中に開放する。これは 5 ms で行われる。この時点で用意された原子と分子は $N_{\text{Rb}} = 7 \times 10^3$ 個程度、 $N_{\text{KRb}} = 4 \times 10^3$ 個程度である。温度は共に $T_{\text{Rb}} = T_{\text{KRb}} = 60\text{--}80\text{ nK}$ 程度である。密度は $n_{\text{Rb}} = 2 \times 10^{11}\text{ cm}^{-3}$ 、 $n_{\text{KRb}} = 1 \times 10^{11}\text{ cm}^{-3}$ 程度となる。トラップ中での捕獲時間は $0.1\text{--}20\text{ ms}$ 程度である。その後光トラップから解放し、相互散乱長 $a_{\text{KRb}} \sim 0 a_0$ 付近 (磁場変化 1 ms) で磁場勾配をかけて分子と原子を分離する (4 ms)。その後 3 ms の磁場変化で分子を原子に解離し K、Rb それぞれの共鳴光により原子・分子をイメージングする。TOF 時間は K の共鳴光の時点で $T_{\text{TOF,K}} = 10.2\text{ ms}$ 、Rb の共鳴光の時点で $T_{\text{TOF,Rb}} = 10.8\text{ ms}$ となる。

各磁場で測定を行い、前節で説明した解析方法により二体ロス係数 β を得る。散乱長と磁場の対応は、coupled-channel calculation によるものを使用する。測定結果は図 7.3 のようになる。

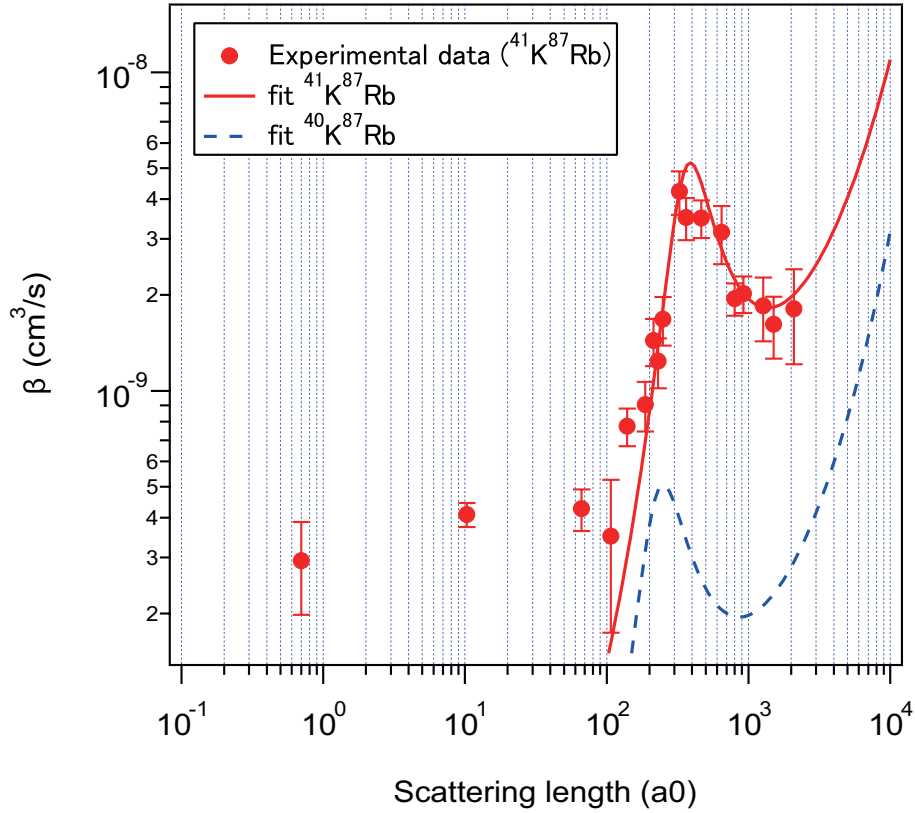


図 7.3: Rb 原子-KRb 分子間の二体ロス係数の磁場依存性:

^{40}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体ロス係数のフィッティングカーブは文献 [45] のデータを用いた。

図 7.3 で示す様に、二体ロス係数に共鳴が観測される。共鳴の性質を調べる為、Effective field theory によるフィッティングを行う。Effective field theory による理論式は、

$$\beta(a) = C_\beta \frac{\sinh(2\eta^*)}{\sin^2[s_0 \ln(a/a_*)] + \sinh^2(\eta_*)} \frac{\hbar a}{m_1} \quad (7.13)$$

で与えられる [46]。 m_1 はここでは K の質量となる。式 7.13 は、等核原子の系での式 2.166 を異核原子の系に拡張したものである。これは $a_{\text{KRb}} \gg r_{\text{vdW}}$ で有効な近似であると考えられる。本研究では、 $a_{\text{KRb}} > 2r_{\text{vdW}} = 144 a_0$ でフィッティングを行った。参考の為、 ^{40}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体ロス係数のフィッティングカーブ [45] も一緒にプロットした。

表 7.1 に結果をまとめる。 ^{41}K - ^{87}Rb 系の結果 [45] と ^{40}K - ^{87}Rb 系の結果（本研究）を比較した。

まずロス係数の絶対値を表す C_β の値が、大きく異なっている。フィッティングエラーは ± 2 程度である。ただし、どちらの系でも原子・分子数の系統誤差の可能性もある。本研究では原子数の見積もりに 20% 程度の系統誤差があると考えられる。即ち、二体ロス係数に 44% 程度の系統誤差が考えられる。よって CC_β の系統誤差は ± 8.8 と見積もられる。また温度の違い（本研究:60-80 nK、JILA の実験:300 nK 程度 [45]）によって、絶対値に差がでる可能性がある [132]。

次に η_* はフィッティング誤差の範囲で一致している。今の所非弾性パラメータである η_* については普遍性を示す理論が存在しない。従って η_* については結果を述べるに留める。

重要なのは三体パラメータ a_* の結果である。これには有意な差が見られる。フィッティングエラーは $\pm 10 a_0$ 程度でこれは統計誤差を含む。系統誤差を考える。まず磁場揺らぎに由来する、系統誤差が考えられる。共鳴の中心 $360 a_0$ で磁場に対する散乱長の感度は、 $360 a_0/\text{G}$ である。節 4.6.3 の議論により、この付近の磁場揺らぎは、 $\pm 50 \text{ mG}$ 程度である。また、同様に磁場校正、散乱長と磁場の変換に $\pm 100 \text{ mG}$ の系統誤差が考えられる。従って磁場の系統誤差はこれらの二乗和の平方根をとって、 $\pm 150 \text{ mG}$ となる。よって散乱長に対して、 $\pm 54 a_0$ の系統誤差が考えられる。また、フィッティングの範囲の最小値を変えると、 a_* の値が $\pm 30 a_0$ 程度変化する。二つの系統誤差の二乗和の平方根をとると、 $\pm 62 a_0$ が系統誤差となる。 a_* の値は系統誤差を含めても、 ^{41}K - ^{87}Rb 系と、 ^{40}K - ^{87}Rb 系で異なることになる。

a_* が異なる理由はまず ^{40}K と ^{41}K のわずかな質量差が考えられる。しかし、この差は数% 程度であり、スケーリングパラメータ s_0 の違いはほとんどない。次に考えられるのは、フェッシュバハ共鳴の強さを示す s_{res} の違いである。これは大きく異なっており、 a_* の有意な差を引き起こす可能性がある。最近の研究結果により、等核原子の場合でも a_* は s_{res} の違いにより大きく変わりうるといった実験 [41]、理論 [42] があり K-Rb の系でも同様のことが起きている可能性がある。現在理論 [133] との比較を行っているところである。三体パラメータの理論と実験の比較はこれまでなされていない。本研究の結果は異核の系の三体现象に重要な知見を与えると考えられる。

表 7.1: 二体ロス係数のフィッティング結果:

^{40}K - ^{87}Rb 分子・ ^{87}Rb 原子間の二体散乱係数のフィッティング結果は文献 [45] のデータを用いた。誤差の添え字は fit はフィッティングエラーを、sys は系統誤差を示す。

	a_*	η_*	C_β	s_{res}	$s_0(\text{K-Rb-Rb})$
$^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$	$360(19)_{\text{fit}}(62)_{\text{sys}}$	$0.24(3)_{\text{fit}}$	$20(2)_{\text{fit}}(8.8)_{\text{sys}}$	0.81	0.6444
$^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$	$230(10)_{\text{fit}}(30)_{\text{sys}}$	$0.26(3)_{\text{fit}}$	$3.2(2)_{\text{fit}}$	1.96	0.6536

第8章 まとめと今後の展望

8.1 本研究のまとめ

本論文は、極低温 ^{41}K - ^{87}Rb フェッシュバッハ分子に関する実験的研究をまとめたものである。本研究での主な成果として、以下の二つが挙げられる。

一つは、 ^{41}K - ^{87}Rb 間の二つのフェッシュバッハ共鳴近傍における三体ロス係数の決定である。共鳴近傍での三体ロス係数はエフィモフ状態の性質によって決定される。また共鳴近傍での三体ロス係数は、フェッシュバッハ分子の生成効率を上げるという観点からも重要である。しかしこれは実験的には異核原子の系、特にボーズ粒子の混合系の場合困難である。なぜなら三体衝突のチャンネルが複数ある為に粒子数の時間発展はそれぞれの粒子の初期原子数に強く依存するからである。本研究ではこの問題を非破壊イメージングの導入により解決した。同一原子集団の時間発展を直接観測することにより、初期原子数にほとんど依存しない三体ロス係数の測定が可能となった。これにより共鳴近傍全体に渡って十分な精度で三体ロス係数が決定できた。また測定結果から共鳴間/同位体間において測定範囲内では三体ロス係数が異ならないということが分かった。

もう一つの成果は、原子・分子間 (^{87}Rb 原子と ^{41}K - ^{87}Rb 分子) の二体ロス係数における共鳴の観測である。原子と分子の混合状態とエフィモフ状態が交わる場所で、二体ロス係数が増大することが知られており、そこでの散乱長 a_* は三体パラメータの内の一つである。よって共鳴を観測することで三体パラメータを決定できる。問題となるのは、フェッシュバッハ分子の生成効率と短い寿命である。本研究では、まず特殊な波長の光トラップを用いることで ^{41}K と ^{87}Rb の同時縮退気体を空間的に完全に重ね合わせ、さらに三次元光格子を用いることでフェッシュバッハ分子と原子との衝突を抑制した。これらの組み合わせにより、フェッシュバッハ分子を長寿命かつ高効率に生成することに成功した。得られた原子と分子の混合体から二体係数の散乱長依存性を測定した所、そこに共鳴を観測し、共鳴の位置から三体パラメータ a_* を決定した。決定された a_* の値をこれまでの報告例と比較した所、共鳴間/同位体間で異なっており、これは従来の理論では説明できない。すなわち三体パラメータはファンデアワールス長のみで決まっているのではなく、フェッシュバッハ共鳴の性質を取り入れた、より詳細な理論が必要な事を示している。

8.2 今後の展望

今後の展望を以下に述べる。まず異核原子の少数多体系の研究としては、broad 共鳴での原子・分子散乱の観測、KRb 分子-K 原子間の散乱の観測が挙げられる。本研究での成果により、異核原子のエフィモフ状態の三体パラメータ a_* はフェッシュバッハ共鳴の共鳴の強さ

を示すパラメータ s_{res} に強く依存する可能性があるということが分かった。 ^{41}K - ^{87}Rb 間には、本研究で原子・分子間共鳴を見た $s_{\text{res}} = 0.81$ のフェッシュバッハ共鳴の他に $s_{\text{res}} = 25.8$ の broad 共鳴に分類されるフェッシュバッハ共鳴が存在する。従ってこのフェッシュバッハ共鳴についても同様の実験を行い、三体パラメータを測定すればより有益な情報を与えることが期待できる。また ^{41}K - ^{87}Rb の場合、 K-K-Rb の三体衝突についても禁制ではない。従って原子・分子間散乱に同様の共鳴が現れる可能性があり、これは質量比に対する実験的情報を与え非常に重要な知見を与える。

また極低温極性分子の生成に関する実験についても述べる。今後の課題として異核フェッシュバッハ分子の縮退の達成や振動基底状態分子の生成が挙げられる。本研究では長寿命なフェッシュバッハ分子の生成に成功したが、未だ縮退には達していない。これは変換効率が現在 20% 程度にとどまっていることが原因であり、より変換効率を高めることで縮退が達成できると考えられる。それには三次元光格子への充填方法や原子雲同士の空間的重なり確保の仕方等を見直す必要があると考えられる。また振動基底状態への遷移を実際に行うことも重要である。これには本研究で生成したフェッシュバッハ分子に STIRAP を適用することで達成できる。既に STIRAP に用いる遷移の選定は行われており、光源も用意してあるので [113, 95]、後は実際に適用するだけである。本研究でフェッシュバッハ分子を安定的に生成できるようになったので、十分可能であると考えられる。

付 録 A ^{41}K 、 ^{87}Rb の光学特性

^{41}K [109] 及び ^{87}Rb [110] の光学特性を以下に示す。

表 A.1: ^{41}K の D line の特性

D2 line		
Frequency	$\omega/2\pi$	391.016 406 21(12) THz
Wavelength	λ	766.700 458 70(2) nm
Natural linewidth	$\Gamma/2\pi$	6.035(11) MHz
Saturation intensity	I_s	1.75 mW/cm ²
$4^2S_{1/2}$ magnetic dipole	a_{hf}	$h \cdot 127.006\,935\,2(6)$ MHz
$4^2P_{3/2}$ magnetic dipole	a_{hf}	$h \cdot 3.363(25)$ MHz
$4^2P_{3/2}$ electric quadrupole	b_{hf}	$h \cdot 3.351(71)$ MHz
D1 line		
Frequency	$\omega/2\pi$	389.286 294 205(62) THz
Wavelength	λ	770.107 919 92 nm

表 A.2: ^{87}Rb の D line の特性

D2 line		
Frequency	$\omega/2\pi$	384.230 484 468 5(62) THz
Wavelength	λ	780.241 209 686(13) nm
Natural linewidth	$\Gamma/2\pi$	6.0666(18) MHz
Saturation intensity	I_s	1.669 33(35) mW/cm ²
$5^2S_{1/2}$ magnetic dipole	a_{hf}	$h \cdot 3.417\,341\,305\,452\,145(45)$ GHz
$5^2P_{3/2}$ magnetic dipole	a_{hf}	$h \cdot 84.7185(20)$ MHz
$5^2P_{3/2}$ electric quadrupole	b_{hf}	$h \cdot 12.4965(37)$ MHz
D1 line		
Frequency	$\omega/2\pi$	377.107 463 380(11) THz
Wavelength	λ	794.978 851 156(23),nm

付 録 B 原子と光の相互作用

B.1 光トラップ

原子の共鳴周波数に対して離調をつけた周波数のレーザーを原子に当てると原子には電気双極子が誘起される、これと光電場との相互作用により作られたポテンシャルを原子は感じるようになる。このポテンシャルを利用したトラップのことを光双極子トラップ (ODT: Optical Dipole Trap) という。光トラップを作る際には、レーザーの離調、強度を適切に調節することによってポテンシャル深さ、光散乱レート等を制御する必要がある。光トラップに関しては Rudolf Grimm らによって詳しく議論されており [134]、以降はそれを参考にしている。

B.1.1 誘起双極子と光電場の相互作用

周波数 ω の電場 $\mathbf{E}$ によって、双極子 $\mathbf{p}$ が誘起されるとする。このとき、通常 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}\tilde{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) + c.c.$ 、 $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}\tilde{p}\exp(-i\omega t) + c.c.$ と複素表示で書ける。ここで $\hat{\mathbf{e}}$ は単位分極ベクトルである。双極子の大きさ $\hat{p}$ と電場の大きさ $\tilde{E}$ は、

$$\hat{p} = \alpha \tilde{E} \quad (\text{B.1})$$

と書ける。 α は複素分極率であり、 ω に依存する。

このとき、相互作用ポテンシャルは以下の様に書ける。

$$U_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I \quad (\text{B.2})$$

ここで $\langle \dots \rangle$ は時間平均を示す。電場強度は $I = 2\epsilon_0 c |\tilde{E}|^2$ であり、 $\frac{1}{2}$ は、誘起された双極子であることを反映している。これより、ポテンシャルは光強度と感受率の実部に依存することが分かる。

一方光散乱について考えると、振動子が電場から吸収するパワーは、

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \mathbf{E} \rangle = 2\omega \text{Im}(\tilde{p} \tilde{E}^*) = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I \quad (\text{B.3})$$

光をエネルギー $\hbar\omega$ を持った光子の流れであると考え、光子の散乱レートは以下の様に書ける。

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.4})$$

これは光強度と分極率の虚部に依存する量である。

以上により、ポテンシャルと散乱レートは、位置に依存する光強度 $I(\mathbf{r})$ と分極率 $\alpha(\omega)$ によって書けることが分かった。

B.1.2 原子の分極率

原子の分極率は振動子モデルでは、運動方程式 $\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = -eE(t)/m_e$ から直接求めることができ、

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} \quad (\text{B.5})$$

であるここで ω_0 は原子の共鳴周波数であり、

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \quad (\text{B.6})$$

は古典振動子モデルでの減衰率であるが、ここで共鳴周波数における減衰率 $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_\omega$ を導入すると、分極率は以下のように書ける。

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (\text{B.7})$$

光トラップに使うような十分離調をとっている場合では、振動子モデルでの減衰率は励起状態からの自然放出レートと置き換えることができ、

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\langle e | \mu | g \rangle|^2 \quad (\text{B.8})$$

となる。

B.1.3 双極子ポテンシャルと散乱レート

式 B.7 を式 B.2、B.4 を代入することで、

$$U_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.10})$$

を得る。ここで $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ とすると $|\Delta| \ll \omega_0$ を通常満たすので、 $\omega_0 + \omega$ の項は無視することができる（回転波近似）、

$$U_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.11})$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.12})$$

となる。光トラップの基本的な物理は以上の二つの方程式で記述できる。ここで、

$$\hbar\Gamma_{sc} = \frac{\Gamma}{\Delta} U_{dip} \quad (\text{B.13})$$

であるが、これから次のことが分かる。

- $\Delta < 0$ （赤方離調）では、 $U_{dip} < 0$ となり引力ポテンシャルが作られ、 $\Delta > 0$ （青方離調）では斥力ポテンシャルが作られる。
- U_{dip} は $\frac{1}{\Delta}$ に比例し、 Γ_{sc} は $\frac{1}{\Delta^2}$ に比例する。即ち光散乱を抑えて深いポテンシャルを作るには、離調を大きくとって（far-detuned）強度を強くする必要がある。

以上の議論は理想的な二準位系の場合であるが、通常電子の遷移には多数の準位が関与しており、それらの寄与を考える必要がある。特にアルカリ原子の場合スピン軌道相互作用による、D線二重項（D-line doublet）がある。D1線、D2線両方の寄与を考慮したポテンシャル及び散乱レートを以下に示す。

$$U_{dip} = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \left(\frac{2 + \mathcal{P} g_F m_F}{\Delta_{2,F}} + \frac{1 - \mathcal{P} g_F m_F}{\Delta_{1,F}} \right) I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.14})$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2 \Gamma^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{2}{\Delta_{2,F}^2} + \frac{1}{\Delta_{1,F}^2} \right) I(\mathbf{r}) \quad (\text{B.15})$$

ここで g_F は Landé の g 因子、 ω_0 は D 線二重項の中心周波数、 $\mathcal{P}$ はレーザーの偏光（ $\mathcal{P} = 0, \pm 1$ はそれぞれ直線偏光、 $\sigma^\pm$ 偏光を示す。）、 m_F は磁気量子数であり、 $\Delta_{1,F}$ 、 $\Delta_{2,F}$ は、D1 線及び D2 線（基底状態 $^2S_{1/2}$, F 状態から $^2P_{3/2}$, $^2P_{1/2}$ の超微細構造分裂の中心までのエネルギー差に対応）からの離調を示している。

B.1.4 ガウシアンビームによる光トラップ

光トラップには通常集光されたガウシアンビームを使う。 z 方向に伝搬する TEM00 モードのガウシアンビームの強度分布 $I(r, z)$ は、パワーを P 、 $1/e^2$ 半径を $w(z)$ 、動径方向を r として、以下のように書ける。

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} \exp\left(-2\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad (\text{B.16})$$

ここで、

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (\text{B.17})$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right) \quad (\text{B.18})$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{B.19})$$

である。 z_R はレイリー長、 w_0 は焦点でのビーム半径、 $R(z)$ は波面の曲率半径を示す。

光強度は、 $(r, z) = (0, 0)$ で最大となり赤方離調をとった光を入射させるとこの点をトラップ中心としたトラップポテンシャルをつくることのできる。ポテンシャル深さ $U_0 =$

$U_{dip}(r=0, z=0)$ は、式 B.14 に $I_0 = 2P/\pi w_0^2$ を代入したものとなる。トラップ中心近傍ではポテンシャルは調和型に近似できて、

$$U_{dip}(r, z) \cong -U_0 \left[1 - 2 \left(\frac{r}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (\text{B.20})$$

となる。トラップ周波数及びアスペクト比は

$$\omega_r = \sqrt{\frac{4U_0}{mw_0^2}} \quad (\text{B.21})$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2U_0}{mz_R^2}} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\omega_r}{\omega_z} = \sqrt{2} \frac{\pi \omega_0}{\lambda} \quad (\text{B.23})$$

となる。

B.1.5 重力ポテンシャルによるトラップ位置のシフト

実際の実験の場合、原子には光トラップによる調和ポテンシャルに加えて、重力によるリニアポテンシャルが加わる為、重力方向のポテンシャルは以下のように書ける。

$$U(y) = \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + mgy = \frac{1}{2} m \omega_y^2 \left(y + \frac{g}{\omega_y^2} \right)^2 - \frac{mg^2}{2\omega_y^2} \quad (\text{B.24})$$

ω_y は光トラップによるポテンシャルを $U_{dip} = m\omega_y^2 y^2/2$ で近似した時のトラップ周波数である。これよりトラップ中心は重力ポテンシャルの影響によりシフトすることが分かる。これを重力サグ (gravitational sag) という。重力サグの大きさ d は、

$$d = -\frac{g}{\omega_y^2} \quad (\text{B.25})$$

となり、重力方向のトラップ周波数で決まることが分かる。質量の異なる二粒子を用いた場合、通常重力サグの大きさに違いが出る為、トラップ中心がずれることになる。その大きさ Δd は、

$$\Delta d = \left| \frac{g}{\omega_{y,1}^2} - \frac{g}{\omega_{y,2}^2} \right| \quad (\text{B.26})$$

となる。 $\omega_{y,1}, \omega_{y,2}$ はそれぞれの粒子の重力方向のトラップ周波数である。

B.2 光と原子の相互作用の半古典論

節 B.1 において、古典論により光双極子ポテンシャル及び光散乱レートを求めることができたが、式 B.11 や式 B.12 において、共鳴点 $\omega = \omega_0$ でのポテンシャルや散乱レートを

求めようとするとう発散してしまい、これは実際にはありえない。古典論と半古典論の大きな違いは飽和が起きるかどうかである。二準位系での厳密なポテンシャルや散乱レートを求めるには、光ブロッホ方程式を定常状態で解く必要がある。ここでは結果のみを述べる。詳細は教科書 [135] を参照のこと。

ポテンシャルや散乱レートを表すには飽和パラメーター s を用いると簡単に表現できる。

$$s \equiv \frac{|\Omega|^2}{2|\gamma/2 - i\delta|^2} = \frac{|\Omega|^2/2}{\delta^2 + \gamma^2/4} \equiv \frac{s_0}{1 + (2\delta/\gamma)^2} \quad (\text{B.27})$$

ここで、 $\Omega \equiv -eE_0/\hbar \langle e|r|g \rangle$ はラビ周波数、 γ は自然放出レート、 δ は共鳴周波数からの離調であり、また s_0 は共鳴点での飽和パラメータで、

$$s_0 \equiv |\Omega|^2/\gamma^2 = I/I_s \quad (\text{B.28})$$

である。 I_s は飽和強度で

$$I_s \equiv \pi\hbar c/3\lambda^3\tau \quad (\text{B.29})$$

である ($\tau \equiv 1/\gamma$)。光散乱レートは、

$$\gamma_p = \frac{s_0\gamma/2}{1 + s_0 + (2\delta/\gamma)^2} \quad (\text{B.30})$$

となる。

参考文献

- [1] S. N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese (Plancks Law and Light Quantum Hypothesis). *Z. Phys.*, **26**, p. 178, (1924).
- [2] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, p. 261, (1924).
- [3] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, p. 3, (1925).
- [4] Steven Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, Alex Cable, and A. Ashkin. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, pp. 48–51, (1985).
- [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, **269**, pp. 198–201, (1995).
- [6] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, pp. 3969–3973, (1995).
- [7] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, **392**, pp. 151 – 154, (1998).
- [8] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin. Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, p. 040403, (2004).
- [9] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hansch, and Immanuel Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultra-cold atoms. *Nature*, **415**, pp. 39–44, (2001).
- [10] Herman Feshbach. A unified theory of nuclear reactions. ii. *Annals of Physics*, **19**, pp. 287 – 313, (1962).
- [11] Markus Greiner, Cindy A. Regal, and Deborah S. Jin. Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas. *Nature*, **426**, p. 537, (2003).

- [12] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H. C. Nägerl, and R. Grimm. Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms. *Nature*, **440**, p. 315, (2006).
- [13] S. B. Papp, J. M. Pino, and C. E. Wieman. Tunable miscibility in a Dual-Species Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, p. 040402, (2008).
- [14] J. Stuhler, A. Griesmaier, T. Koch, M. Fattori, T. Pfau, S. Giovanazzi, P. Pedri, and L. Santos. Observation of Dipole-Dipole Interaction in a Degenerate Quantum Gas. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, p. 150406, (2005).
- [15] K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M. H. G. de Miranda, A. Pe'er, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, and J. Ye. A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules. *Science*, **322**, pp. 231–235, (2008).
- [16] E. Hodby, S. T. Thompson, C. A. Regal, M. Greiner, A. C. Wilson, D. S. Jin, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Production Efficiency of Ultracold Feshbach Molecules in Bosonic and Fermionic Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, p. 120402, (2005).
- [17] Jens Herbig, Tobias Kraemer, Michael Mark, Tino Weber, Cheng Chin, Hanns-Christoph Nägerl, and Rudolf Grimm. Preparation of a pure molecular quantum gas. *Science*, **12**, p. 1510, (2003).
- [18] Kevin E. Strecker, Guthrie B. Partridge, and Randall G. Hulet. Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, p. 080406, (2003).
- [19] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm. Pure Gas of Optically Trapped Molecules Created from Fermionic Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, p. 240402, (2003).
- [20] K. Xu, T. Mukaiyama, J. R. Abo-Shaeer, J. K. Chin, D. E. Miller, and W. Ketterle. Formation of Quantum-Degenerate Sodium Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, p. 210402, (2003).
- [21] Stephan Dürr, Thomas Volz, Andreas Marte, and Gerhard Rempe. Observation of Molecules Produced from a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, p. 020406, (2004).
- [22] Tyler D. Cumby, Ruth A. Shewmon, Ming-Guang Hu, John D. Perreault, and Deborah S. Jin. Feshbach-molecule formation in a Bose-Fermi mixture. *Phys. Rev. A*, **87**, p. 012703, (2013).
- [23] T. Mukaiyama, J. R. Abo-Shaeer, K. Xu, J. K. Chin, and W. Ketterle. Dissociation and Decay of Ultracold Sodium Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, p. 180402, (2004).

- [24] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, and K Bongs. Ultracold Heteronuclear Molecules in a 3D Optical Lattice. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, p. 120402, (2006).
- [25] G. Thalhammer, K. Winkler, F. Lang, S. Schmid, R. Grimm, and J. Hecker Denschlag. Long-Lived Feshbach Molecules in a Three-Dimensional Optical Lattice. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, p. 050402, (2006).
- [26] Johann G. Danzl, Manfred J. Mark, Elmar Haller, Mattias Gustavsson, Russell Hart, Jesus Aldegunde, Jeremy M. Hutson, and Hanns-Christoph Nägerl. An ultracold high-density sample of rovibronic ground-state molecules in an optical lattice. *Nature Physics*, **6**, p. 0265, (2010).
- [27] V. Efimov. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Physics Letters B*, **33**, pp. 563 – 564, (1970).
- [28] M. Zaccanti, B. Deissler, C. D’errico, M. Fattori, M. Jona-Lasinio, S. Müller, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno. Observation of an Efimov spectrum in an atomic system. *nat. phys.*, **5**, p. 586, (2009).
- [29] V. N. Efimov. Weakly-bound states of three resonantly-interacting particles. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **12**, p. 589, (1971).
- [30] J P D’Incao, Chris H Greene, and B D Esry. The short-range three-body phase and other issues impacting the observation of efimov physics in ultracold quantum gases. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **42**, p. 044016, (2009).
- [31] A. Wenz, T. Lompe, T. Ottenstein, F. Serwane, G. Zürn, and S. Jochim. Universal trimer in a three-component fermi gas. *Phys. Rev. A*, **80**, p. 040702, (2009).
- [32] Noam Gross, Zav Shotan, Servaas Kokkelmans, and Lev Khaykovich. Observation of Universality in Ultracold ^7Li Three-Body Recombination. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, p. 163202, (2009).
- [33] P. Dyke, S. Pollack, and R. Hulet. Finite-range corrections near a Feshbach resonance and their role in the Efimov effect. *Phys. Rev. A*, **88**, p. 023625, (2013).
- [34] Sanjukta Roy, Manuele Landini, Andreas Trenkwalder, Giulia Semeghini, Giacomo Spagnolli, Andrea Simoni, Marco Fattori, Massimo Inguscio, and Giovanni Modugno. Test of the Universality of the Three-Body Efimov Parameter at Narrow Feshbach Resonances. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, p. 053202, (2013).
- [35] R. Wild, P. Makotyn, J. Pino, E. Cornell, and D. Jin. Measurements of Tan’s Contact in an Atomic Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, p. 145305, (2012).
- [36] M. Berninger, A. Zenesini, B. Huang, W. Harm, H.-C. Nägerl, F. Ferlaino, R. Grimm, P. Julienne, and J. Hutson. Universality of the Three-Body Parameter for Efimov States in Ultracold Cesium. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, p. 120401, (2011).

- [37] Noam Gross, Zav Shotan, Servaas Kokkelmans, and Lev Khaykovich. Nuclear-Spin-Independent Short-Range Three-Body Physics in Ultracold Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, p. 103203, (2010).
- [38] Jia Wang, J. D’Incao, B. Esry, and Chris Greene. Origin of the Three-Body Parameter Universality in Efimov Physics. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, p. 263001, (2012).
- [39] Pascal Naidon, Shimpei Endo, and Masahito Ueda. Physical origin of the universal three-body parameter in atomic efimov physics. *Phys. Rev. A*, **90**, p. 022106, (2014).
- [40] D. Petrov. Three-boson problem near a narrow feshbach resonance. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 143201, (2004).
- [41] A. Zenesini, B. Huang, M. Berninger, H.-C. Nägerl, F. Ferlaino, and R. Grimm. Resonant atom-dimer collisions in cesium: Testing universality at positive scattering lengths. *Phys. Rev. A*, **90**, p. 022704, (2014).
- [42] Yujun Wang and Paul S. Julienne. Universal van der Waals physics for three cold atoms near Feshbach resonances. *nat. phys.*, **10**, p. 768, (2014).
- [43] Eric Braaten and H.-W. Hammer. Universality in few-body systems with large scattering length. *Physics Reports*, **428**, pp. 259 – 390, (2006).
- [44] G. Barontini, C. Weber, F. Rabatti, J. Catani, G. Thalhammer, M. Inguscio, and F. Minardi. Observation of Heteronuclear Atomic Efimov Resonances. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, p. 043201, (2009).
- [45] Ruth Bloom, Ming-Guang Hu, Tyler Cumby, and Deborah Jin. Tests of Universal Three-Body Physics in an Ultracold Bose-Fermi Mixture. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, p. 105301, (2013).
- [46] K. Helfrich, H.-W. Hammer, and D. Petrov. Three-body problem in heteronuclear mixtures with resonant interspecies interaction. *Phys. Rev. A*, **81**, p. 042715, (2010).
- [47] Yujun Wang, Jia Wang, J. D’Incao, and Chris Greene. Universal Three-Body Parameter in Heteronuclear Atomic Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, p. 243201, (2012).
- [48] Shih-Kuang Tung, Karina Jimenez-Garcia, Jacob Johansen, Colin V. Parker, and Cheng Chin. Geometric Scaling of Efimov States in a ${}^6\text{Li}$ - ${}^{133}\text{Cs}$ Mixture. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, p. 240402, (2014).
- [49] R. Pires, J. Ulmanis, S. Häfner, M. Repp, A. Arias, E. D. Kuhnle, and M. Weidemüller. Observation of Efimov Resonances in a Mixture with Extreme Mass Imbalance. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, p. 250404, (2014).
- [50] C. J. Pethick and H. Smith. ボーズ・アインシュタイン凝縮. 吉岡書店, (2005). 町田一成 訳.

- [51] 猪木慶治, 河合光. 量子力学 I, II. 講談社, (1994).
- [52] Thorsten Köhler, Krzysztof Góral, and Paul S. Julienne. Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances. *Rev. Mod. Phys.*, **78**, pp. 1311–1361, (2006).
- [53] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, and Eite Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, pp. 1225–1286, (2010).
- [54] Yujun Wang, Jose P. D’Incao, and Brett D. Esry. Chapter 1 - Ultracold Few-Body Systems. In *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Vol. 62, pp. 1 – 115. Academic Press, (2013).
- [55] G. F. Gribakin and V. V. Flambaum. Calculation of the scattering length in atomic collisions using the semiclassical approximation. *Phys. Rev. A*, **48**, pp. 546–553, (1993).
- [56] L. D. Landau. On the theory of transfer of energy at collisions II. *Phys. Z. Sowjetunion*, **2**, p. 46, (1932).
- [57] Clarence Zener. Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, **137**, pp. 696–702, (1932).
- [58] Jan Chwedeńczuk, Krzysztof Góral, Thorsten Köhler, and Paul S. Julienne. Molecular production in two component atomic fermi gases. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 260403, (2004).
- [59] Julienne P.S., Tiesinga E., and Köhler T. Making cold molecules by time-dependent Feshbach resonances. *Journal of Modern Optics*, **51**, pp. 1787–1806(20), (2004).
- [60] S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon. Degenerate atom-molecule mixture in a cold Fermi gas. *Phys. Rev. A*, **69**, p. 031602, (2004).
- [61] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle. Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, p. 120403, (2004).
- [62] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm. Pure Gas of Optically Trapped Molecules Created from Fermionic Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, p. 240402, (2003).
- [63] J. J. Zirbel, K.-K. Ni, S. Ospelkaus, T. L. Nicholson, M. L. Olsen, P. S. Julienne, C. E. Wieman, J. Ye, and D. S. Jin. Heteronuclear molecules in an optical dipole trap. *Phys. Rev. A*, **78**, p. 013416, (2008).
- [64] Cristian Ospelkaus. *Fermi-Bose Mixtures —From mean-field interactions to ultracold chemistry*. PhD thesis, Universität Hamburg, (2006).

- [65] S. T. Thompson, E. Hodby, and C. E. Wieman. Ultracold Molecule Production via a Resonant Oscillating Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, p. 190404, (2005).
- [66] C. Weber, G. Barontini, J. Catani, G. Thalhammer, M. Inguscio, and F. Minardi. Association of ultracold double-species bosonic molecules. *Phys. Rev. A*, **78**, p. 061601, (2008).
- [67] Thomas M. Hanna, Thorsten Köhler, and Keith Burnett. Association of molecules using a resonantly modulated magnetic field. *Phys. Rev. A*, **75**, p. 013606, (2007).
- [68] S. B. Papp and C. E. Wieman. Observation of Heteronuclear Feshbach Molecules from a $^{85}\text{Rb} - ^{87}\text{Rb}$ Gas. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, p. 180404, (2006).
- [69] J. J. Zirbel, K.-K. Ni, S. Ospelkaus, J. P. D’Incao, C. E. Wieman, J. Ye, and D. S. Jin. Collisional Stability of Fermionic Feshbach Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, **100**, p. 143201, (2008).
- [70] G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, and M. Inguscio. Double Species Bose-Einstein Condensate with Tunable Interspecies Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **100**, p. 210402, (2008).
- [71] G. Thalhammer, G. Barontini, J. Catani, F. Rabatti, C. Weber, A. Simoni, F. Minardi, and M. Inguscio. Collisional and molecular spectroscopy in an ultracold Bose-Bose mixture. *New Journal of Physics*, **11**, p. 055044, (2009).
- [72] Andrea Simoni, Matteo Zaccanti, Chiara D’Errico, Marco Fattori, Giacomo Roati, Massimo Inguscio, and Giovanni Modugno. Near-threshold model for ultracold KRb dimers from interisotope Feshbach spectroscopy. *Phys. Rev. A*, **77**, p. 052705, (2008).
- [73] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, and Eite Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, pp. 1225–1286, (2010).
- [74] A. Pashov, O. Docenko, M. Tamanis, R. Ferber, H. Knöckel, and E. Tiemann. Coupling of the $X\ ^1\Sigma^+$ and $a\ ^3\Sigma^+$ states of KRb. *Phys. Rev. A*, **76**, p. 022511, (2007).
- [75] H. M. J. M. Boesten, C. C. Tsai, J. R. Gardner, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar. Observation of a shape resonance in the collision of two cold ^{87}Rb atoms. *Phys. Rev. A*, **55**, pp. 636–640, (1997).
- [76] H. M. J. M. Boesten, J. M. Vogels, J. G. C. Tempelaars, and B. J. Verhaar. Properties of cold collisions of ^{39}K atoms and of ^{41}K atoms in relation to Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, **54**, pp. R3726–R3729, (1996).
- [77] G. Ferrari, M. Inguscio, W. Jastrzebski, G. Modugno, G. Roati, and A. Simoni. Collisional Properties of Ultracold K-Rb Mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, p. 053202, (2002).

- [78] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Dynamics of Component Separation in a Binary Mixture of Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, pp. 1539–1542, (1998).
- [79] K. M. Mertes, J. W. Merrill, R. Carretero-González, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, and D. S. Hall. Nonequilibrium Dynamics and Superfluid Ring Excitations in Binary Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, p. 190402, (2007).
- [80] H. Wang, A. N. Nikolov, J. R. Ensher, P. L. Gould, E. E. Eyler, W. C. Stwalley, J. P. Burke, J. L. Bohn, Chris. H. Greene, E. Tiesinga, C. J. Williams, and P. S. Julienne. Ground-state scattering lengths for potassium isotopes determined by double-resonance photoassociative spectroscopy of ultracold ^{39}K . *Phys. Rev. A*, **62**, p. 052704, (2000).
- [81] L. D. Landau and E. M. Lishitz. *Quantum Mechanics*. New York, (1980).
- [82] H. Bethe and R. Peierls. Quantum theory of the dipion. *Proc. Roy. Soc. London. A*, **148**, pp. 146–156, (1935).
- [83] Kerson Huang and C. Yang. Quantum-mechanical many-body problem with hard-sphere interaction. *Phys. Rev.*, **105**, pp. 767–775, (1957).
- [84] L. Thomas. The Interaction Between a Neutron and a Proton and the Structure of H^3 . *Phys. Rev.*, **47**, pp. 903–909, (1935).
- [85] V. Efimov. Low-energy properties of three resonantly interacting particles. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **29**, p. 546, (1979).
- [86] J Macek. Properties of autoionizing states of he. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, **1**, p. 831, (1968).
- [87] L. D. Faddeev. Scattering theory for a three particle system. *Sov. Phys. JETP*, **12**, p. 1014, (1961).
- [88] B. Esry, Chris Greene, and H. Suno. Threshold laws for three-body recombination. *Phys. Rev. A*, **65**, p. 010705, (2001).
- [89] B D Esry and J P D’Incao. Efimov physics in ultracold three-body collisions. *Journal of Physics: Conference Series*, **88**, p. 012040, (2007).
- [90] 鳥井寿夫. ルビジウム原子気体のボース・アインシュタイン凝縮体の生成および原子波干渉計への応用. 博士論文, 東京大学, (2000).
- [91] P. Ruprecht, M. Holland, K. Burnett, and Mark Edwards. Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms. *Phys. Rev. A*, **51**, pp. 4704–4711, (1995).

- [92] J. Roberts, N. Claussen, S. Cornish, E. Donley, E. Cornell, and C. Wieman. Controlled Collapse of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, pp. 4211–4214, (2001).
- [93] Elizabeth A. Donley, Neil R. Claussen, Simon L. Cornish, Jacob L. Roberts, Eric A. Cornell, and Carl E. Wieman. Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Nature*, **412**, p. 295, (2001).
- [94] Hiroki Saito and Masahito Ueda. Mean-field analysis of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, **65**, p. 033624, (2002).
- [95] 長田有登. Experimental study on the dynamics of a dual-species Bose-Einstein condensate with tunable interactions. 修士論文, 東京大学, (2014).
- [96] Markus Greiner. *Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice potentials*. PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, (2003).
- [97] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, pp. 3108–3111, (1998).
- [98] B. DeMarco, C. Lannert, S. Vishveshwara, and T.-C. Wei. Structure and stability of Mott-insulator shells of bosons trapped in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, **71**, p. 063601, (2005).
- [99] Fabrice Gerbier, Artur Widera, Simon Fölling, Olaf Mandel, Tatjana Gericke, and Immanuel Bloch. Interference pattern and visibility of a Mott insulator. *Phys. Rev. A*, **72**, p. 053606, (2005).
- [100] D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof. Quantum phases in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, **63**, p. 053601, (2001).
- [101] 山陸芳之. 3次元光格子に閉じ込めたフェッシュバッハ分子. 修士論文, 東京大学, (2010).
- [102] Gretchen K. I, Jongchul Mun, Micah Boyd, Patrick Medley, Aaron E. Leanhardt, Luis G. Marcassa, David E. Pritchard, and Wolfgang Ketterle. "Imaging the Mott Insulator Shells by Using Atomic Clock Shifts". *Science*, **313**, pp. 649–652, (2006).
- [103] Simon Fölling, Artur Widera, Torben Müller, Fabrice Gerbier, and Immanuel Bloch. Formation of Spatial Shell Structure in the Superfluid to Mott Insulator Transition. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, p. 060403, (2006).
- [104] Fabrice Gerbier, Simon Fölling, Artur Widera, Olaf Mandel, and Immanuel Bloch. Probing Number Squeezing of Ultracold Atoms across the Superfluid-Mott Insulator Transition. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, p. 090401, (2006).
- [105] 野田開. Bose-Einstein Condensate in an Optical Lattice. 修士論文, 東京大学, (2009).

- [106] C. B. Alcock, V. P. Itkin, and M. K. Horrigan. Vapor pressure equations for the metallic elements:298-2500K. *Canadian Metallurgical Quarterly*, **23**, pp. 309–313, (1984).
- [107] 相川清隆. Preparation of ultracold atomic sources towards ground state polar molecules. 修士論文, 東京大学, (2008).
- [108] 福岡 健太齋藤 裕介. 混合ボース気体の共振器増幅光トラップに向けた単一モード dpss レーザーの開発. 卒業論文, 東京大学, (2010).
- [109] Tobias Gerard Tiecke. *Feshbach resonances in ultracold mixtures of the fermionic quantum gases 6Li and 40K* . PhD thesis, University of Amsterdam, (2009).
- [110] D. A. Steck. Rubidium 87 D Line Data. available online at <http://steck.us/alkalidata>, (revision 2.1.4, 23 December 2010).
- [111] J. Goldwin, S. B. Papp, B. DeMarco, and D. S. Jin. Two-species magneto-optical trap with ^{40}K and ^{87}Rb . *Phys. Rev. A*, **65**, p. 021402, (2002).
- [112] M. Prevedelli, F. S. Cataliotti, E. A. Cornell, J. R. Ensher, C. Fort, L. Ricci, G. M. Tino, and M. Inguscio. Trapping and cooling of potassium isotopes in a double-magneto-optical-trap apparatus. *Phys. Rev. A*, **59**, pp. 886–888, (1999).
- [113] Kiyotaka Aikawa. *All-optical selective formation of ultracold molecules in the rovibrational ground state*. PhD thesis, The university of Tokyo, (2011).
- [114] 加藤宏平. 異核フェッシェンバハ分子の生成・制御に関する研究. 修士論文, 東京大学, (2011).
- [115] David E. Pritchard. Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, p. 1336, (1995).
- [116] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Tightly Confining dc Magnetic Trap. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, p. 416, (1996).
- [117] 新栄拓人, 野田開. ^{41}K の蒸発冷却のための磁気トラップの製作. 卒業論文, 東京大学, (2007).
- [118] G. Breit and I. I. Rabi. Measurement of Nuclear Spin. *Phys. Rev.*, **38**, pp. 2082–2083, (1931).
- [119] 藤掛陽輔. ボース凝縮体の Phase Contrast Imaging. 卒業論文, 東京大学, (2008).
- [120] 長田有登. フェッシェンバハ分子の誘導ラマン断熱遷移による振動回転基底状態への遷移のための光源開発. 卒業論文, 東京大学, (2012).

- [121] Svetlana Kotochigova, Eite Tiesinga, and Paul S Julienne. Multi-channel modelling of the formation of vibrationally cold polar KRb molecules. *New Journal of Physics*, **11**, p. 055043, (2009).
- [122] 大島淳. 光トラップ中の極低温混合原子気体の相互作用制御. 卒業論文, 東京大学, (2009).
- [123] Silke Ospelkaus-Schwarzer. *Quantum Degenerate Fermi-Bose Mixtures of ^{40}K and ^{87}Rb in 3D Optical Lattices*. PhD thesis, Universität Hamburg, (2006).
- [124] Gretchen K. Campbell. *^{87}Rb Bose-Einstein Condensates in Optical Lattices*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, (2006).
- [125] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Coherence, Correlations, and Collisions: What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, pp. 337–340, (1997).
- [126] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, K. Sengstock, and K. Bongs. Interaction-Driven Dynamics of ^{40}K - ^{87}Rb Fermion-Boson Gas Mixtures in the Large-Particle-Number Limit. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, p. 020401, (2006).
- [127] Ming-Guang Hu, Ruth S. Bloom, Deborah S. Jin, and Jonathan M. Goldwin. Avalanche-mechanism loss at an atom-molecule Efimov resonance. *Phys. Rev. A*, **90**, p. 013619, (2014).
- [128] C. Klempt, T. Henninger, O. Topic, M. Scherer, L. Kattner, E. Tiemann, W. Ertmer, and J. J. Arlt. Radio-frequency association of heteronuclear Feshbach molecules. *Phys. Rev. A*, **78**, p. 061602, (2008).
- [129] 齋藤裕介. フェッシュバツハ会合の研究. 修士論文, 東京大学, (2012).
- [130] C. McKenzie, J. Hecker Denschlag, H. Häffner, A. Browaeys, Luís E. E. de Araujo, F. K. Fatemi, K. M. Jones, J. E. Simsarian, D. Cho, A. Simoni, E. Tiesinga, P. S. Julienne, K. Helmerson, P. D. Lett, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Photoassociation of Sodium in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, p. 120403, (2002).
- [131] M. Junker, D. Dries, C. Welford, J. Hitchcock, Y. P. Chen, and R. G. Hulet. Photoassociation of a Bose-Einstein Condensate near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, p. 060406, (2008).
- [132] Eric Braaten and H.-W. Hammer. Resonant dimer relaxation in cold atoms with a large scattering length. *Phys. Rev. A*, **75**, p. 052710, (2007).
- [133] Yujun Wang. private communication.

- [134] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller, and Yurii B. Ovchinnikov. Optical Dipole Traps for Neutral Atoms. *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, **42**, pp. 95 – 170, (2000).
- [135] H. J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer, (1999).