

# 修士論文

## 冷却分子を用いた電子陽子質量比の 恒常性の検証

指導教員：井上 慎 准教授

平成27年2月提出

東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻

37-136535 荻野 敦



# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の概要	2
1.3	本論文の構成	3
第 2 章	分子のエネルギー準位	5
2.1	分子の準位と電子陽子質量比	5
2.1.1	分子の角運動量の表記	5
2.1.2	分子のエネルギースケール	6
2.1.3	分子の振動準位	8
2.1.4	分子準位と $m_e/m_p$ の変化	10
2.1.5	KRb 分子の hyperfine structure	14
2.2	Zeeman shift	16
2.3	Stark shift	20
第 3 章	系統誤差の評価	25
3.1	分子の用意	25
3.2	Zeeman shift の測定	25
3.3	Stark shift	28
3.4	Collision shift	30
3.5	系統誤差のまとめ	31
第 4 章	統計誤差の改善に向けた実験	33
4.1	Ti:Sa laser(Matisse) の使用	33
4.2	新たな準位探し	35
4.2.1	(5)0 <sup>+</sup>	35
4.2.2	PA 光のスweepによる (5)0 <sup>+</sup> の準位探索	35

---

4.2.3	イオン化パルスのスイープによる分光 . . . . .	43
4.2.4	(5)0 <sup>+</sup> ,outer well の分光 . . . . .	46
4.2.5	他の振動準位の探索 . . . . .	48
第 5 章	電子陽子質量比の時間変化の検証	53
5.1	データの解析方法 . . . . .	53
5.2	電子陽子質量比の時間変化 . . . . .	56
第 6 章	まとめと展望	59
付録 A	WKB 近似	61
A.1	トンネル効果 . . . . .	65
付録 B	ECDL のロック回路のプリント基板化	69
謝辞		75
参考文献		77

# 目次

2.1.1	Hund's case(a) . . . . .	6
2.1.2	Hund's case(c) . . . . .	6
2.1.3	$a^3\Sigma^+$ のポテンシャル及び振動準位 . . . . .	8
2.1.4	$(3)0^+, v=123, J=1$ と $X^1\Sigma^+, v=91, J=0$ 及び原子の波動関数 . . . . .	9
2.1.5	ポテンシャルと振動準位の概念図 . . . . .	12
2.1.6	$X^1\Sigma^+, a^3\Sigma^+$ のポテンシャル . . . . .	13
2.1.7	$X^1\Sigma^+, a^3\Sigma^+$ のエネルギー感度 . . . . .	13
2.1.8	図 2.1.7 の $a^3\Sigma^+$ 付近を拡大した図 . . . . .	14
2.1.9	$X^1\Sigma^+(v = 86, J = 0), a^3\Sigma^+(v = 16, J = 0)$ の hyperfine structure . . . . .	15
2.2.1	$a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 1/2, F = 1$ 各 F の Zeeman shift の計算値 . . . . .	19
2.2.2	$X^1\Sigma^+, v = 86, J = 0, F_1 = 3/2, F = 0$ 各 F の Zeeman shift の計算値 . . . . .	19
2.3.1	$J = 0, F_1 = 3/2, F = 2$ から $J = 1, F_1 = 5/2, F = 3$ への遷移の Stark shift の 計算値 . . . . .	22
2.3.2	$J=1, F_1=1/2$ の Stark shift の計算値 . . . . .	23
2.3.3	$J=1, F_1=5/2$ の Stark shift の計算値 . . . . .	23
2.3.4	$J=1, F_1=3/2$ の Stark shift の計算値 . . . . .	24
2.3.5	$J=0, F_1=3/2$ の Stark shift の計算値 . . . . .	24
3.1.1	分子生成の概略図 . . . . .	26
3.2.1	マイクロ波遷移の Zeeman shift の様子 . . . . .	26
3.2.2	実験で測定する遷移 . . . . .	26
3.2.3	周波数測定のタイムシーケンス . . . . .	27
3.2.4	$m_F = 0, 1$ への遷移周波数の Zeeman shift の関係 . . . . .	27
3.3.1	$X^1\Sigma^+, v = 0$ の $J = 0, F_1 = 3/2, F = 2$ から $J = 1, F_1 = 5/2, F = 3$ へのマイ クロ波遷移のアンテナにかける電圧依存性 . . . . .	29

3.3.2	$X^1\Sigma^+, v = 86$ の $J = 0, F_1 = 3/2, F = 0$ から $a^3\Sigma^+, v = 16$ の $J = 0, F_1 = 1/2, F = 0$ へのマイクロ波遷移のアンテナにかける電圧依存性 . . . . .	29
3.4.1	Rb 原子を吹き飛ばす前後の吸収イメージング図 . . . . .	30
4.1.1	光会合レート $K(P)$ . . . . .	34
4.1.2	PA による分子数の入射光パワー依存性 . . . . .	34
4.2.1	$(5)0^+$ とその付近のポテンシャル . . . . .	36
4.2.2	$(5)0^+$ outer well- $X^1\Sigma^+$ 間の FCF . . . . .	36
4.2.3	$(5)0^+$ outer well- $a^3\Sigma^+$ 間の FCF . . . . .	37
4.2.4	分光に使う準位の概略図 . . . . .	37
4.2.5	$(6)1(v'=0)$ の回転構造 . . . . .	39
4.2.6	$(6)1(v'=1)$ の回転構造 . . . . .	39
4.2.7	$(2)2(v'=0)$ の回転構造 . . . . .	40
4.2.8	$(5)0^+(v' = 2), (4)0^-(v' = 2)$ の回転構造 . . . . .	40
4.2.9	$(5)0^+(v' = 0), (4)0^-(v' = 0)$ の回転構造 . . . . .	41
4.2.10	$(5)0^+(v' = 1), (4)0^-(v' = 1)$ の回転構造 . . . . .	41
4.2.11	パルスのスweepするときの準位図 . . . . .	44
4.2.12	色素パルスと 532 パルスの時間差 . . . . .	44
4.2.13	色素パルスのスweepしたときのイオン化信号 . . . . .	45
4.2.14	図 4.2.13 の 1 部を拡大した図 . . . . .	45
4.2.15	$(5)0^+$ , outer well での PA 信号 . . . . .	46
4.2.16	$(5)0^+$ , outer well での PA した分子のイオン化信号 . . . . .	47
4.2.17	$(5)0^+$ , outer well と $a^3\Sigma^+$ のいくつかの振動準位の波動関数 . . . . .	49
4.2.18	$(5)0^+$ , outer well と $a^3\Sigma^+$ の各振動準位間の FCF . . . . .	49
4.2.19	$(5)0^+$ , outer well の探索で PA 光をスweepした範囲。 . . . . .	50
4.2.20	$(5)0^+$ , outer well の振動準位 . . . . .	51
5.1.1	$X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$ から $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$ への遷移の信号 . . . . .	54
5.1.2	2014/12/10 の $m_F = 0$ への遷移周波数の測定結果 . . . . .	54
5.1.3	2014/12/10 の $m_F = 1$ への遷移周波数の測定結果 . . . . .	55
5.1.4	図 5.1.2 を図 5.1.3 を用いて磁場 0 のときの値に直したグラフ . . . . .	55
5.2.1	系統誤差が傾きに与える誤差 . . . . .	56
5.2.2	$X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$ から $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$ への遷移周波数の測定結果 . . . . .	57

---

A.1	ポテンシャルの例 . . . . .	62
A.1	トンネル効果を考えるポテンシャルの例 . . . . .	66
B.1	ロック回路の回路図 . . . . .	70
B.2	eagle で書いた回路図 . . . . .	71
B.3	eagle で書いたパターン図 . . . . .	72
B.4	プリント基板の写真 . . . . .	72
B.5	部品配置上の注意点 . . . . .	73





# 表目次

2.2.1	$a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 5/2$ 各 F の Zeeman shift の計算値 . . . . .	17
2.2.2	$a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 3/2$ 各 F の Zeeman shift の計算値 . . . . .	17
2.2.3	$a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 1/2$ 各 F の Zeeman shift の計算値 . . . . .	18
2.2.4	$X^1\Sigma^+, v = 86, J = 0, F_1 = 3/2$ 各 F の Zeeman shift の計算値 . . . . .	18
2.3.1	$X^1\Sigma^+, v = 0$ の hyperfine 準位の計算値 . . . . .	22
3.5.1	系統誤差 . . . . .	31
4.2.1	inner well の振動準位のエネルギー . . . . .	42
4.2.2	各振動準位のトンネル効果の時定数 . . . . .	51
B.1	抵抗やコンデンサの値 . . . . .	74



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の背景

1987年にレーザー冷却による磁気光学トラップが実現 [1] して以来、冷却原子の分野では様々な成果が実現されてきた。中でも最も代表的なものは 1995 年の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) の実現だろう [2],[3]。その他にも冷却原子系ではその高い制御性を生かし、様々な成果が上がっており ([4],[5],[6],[7] など)、今もなお世界中で活発に研究が行われている。

我々の研究室では冷却原子の分野の中でも極性分子の系を扱っている。極性分子は振動回転の自由度や、 $r^{-3}$  に比例する双極子-双極子相互作用などといって原子には無い特徴をもちそれらを利用した研究が期待されている [8]。冷却分子を生成する方法はバッファガス冷却 [9] やレーザー冷却によって直接分子を冷却する直接法と、冷却原子を Feshbach 会合 [10] や光会合 [11] によって会合させて冷却分子を作る間接法に大きく分けられる。分子は振動回転の自由度を持つためレーザー冷却が困難であり現在間接法によるものが研究が進んでいる。2008 年には Feshbach 会合と誘導ラマン断熱遷移 (STIRAP)[35] によって振動回転基底状態の  $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$  分子の生成に成功している [13]。直接法でも 2014 年に SrF 分子の MOT が実現している [14]。

本研究では極低温分子を用いた電子陽子質量比 (本論文中では  $\mu \equiv m_e/m_p, \mu' \equiv m_p/m_e$  とする) の時間変化の検証実験を行っている。物理定数には光速  $c$ 、万有引力定数  $G$ 、微細構造定数  $\alpha$  などと様々なものがあり基本的には名前の通り時間的空間的に不変な定数であると考えられている。しかし定数である証明がされているわけではなく、物理定数の不変性に関する多くの研究が行われている。実験において何かを測定するときは基準と比較する必要があるため測定によって得られる値は無次元量のみである。そのため物理定数の変化を検証するためには無次元量の物理定数 (微細構造定数  $\alpha$ 、電子陽子質量比  $\mu$ ) を見る必要がある。現在、超弦理論などといった宇宙論や素粒子物理の様々な理論において

物理定数の変化は許容されており、実験的にこれらの物理定数の変化を見ることは理論構築の手助けとなる [15]。

物理定数の変化を検証する方法として宇宙の遠方の星からの光を見ることで数 10 億年前に発せられた光を見るという方法がある。これによる成果として、電子陽子質量比が測定精度において時間変化していないというもの ( $\Delta\mu'/\mu' = (-1.0 \pm 0.8_{stat} \pm 1.0_{syst}) \times 10^{-7}$ ) [16]、逆に時間変化しているというもの (異なる 2 つの望遠鏡による測定でそれぞれ  $\Delta\mu'/\mu' = (8.5 \pm 3.6_{stat} \pm 2.2_{syst}) \times 10^{-6}$ ,  $(5.6 \pm 5.5_{stat} \pm 2.9_{syst}) \times 10^{-6}$ ) [17]、微細構造定数が宇宙のどこをみるかで異なることをみたもの [18] などがある。

また、実験室実験でも精密分光による検証が行われている。分子の振動エネルギー、回転エネルギーは分子の換算質量に依存し、一般的にそれぞれ  $\mu^{1/2}$ ,  $\mu$  に比例するため分子の分光は電子陽子質量比の変化を見る実験に適している。分子を用いた検証実験では  $SF_6$  の分光による  $\frac{1}{(m_p/m_e)} \frac{d}{dt}(m_p/m_e) = (-3.8 \pm 5.6) \times 10^{-14} \text{ yr}^{-1}$  が現在最も精度のよいものである [19]。原子、イオンを用いた実験においても原子核磁気モーメントが  $\alpha, \mu$  に依存するという理論計算 ([20] など) をもとに検証実験が行われている。原子、イオンでは 2014 年に  $^{171}\text{Yb}^+$  と  $^{133}\text{Cs}$  の分光によって電子陽子質量比に対して  $\dot{\mu}/\mu = 0.2(1.1) \times 10^{-16} \text{ yr}^{-1}$  [21]、微細構造定数に対して  $(1/\alpha)(d\alpha/dt) = -0.20(20) \times 10^{-16} \text{ /yr}$  [22] という精度の測定が行われている。分子の実験は換算質量を、原子の実験は原子核磁気モーメントの変化を実験的に見ようとしている。我々は極低温  $\text{KRb}$  分子を用いて DeMille の提案 [23] に基づき電子陽子質量比の時間変化の検証実験を行った。 $\mu$  の検証に関する提案としては他にも  $\text{N}_2^+$  を用いるもの [24] などがある。

## 1.2 本研究の概要

分子の振動準位のエネルギーは  $\sqrt{\mu}$  に比例しているため分子の振動準位間の遷移周波数もまた  $\sqrt{\mu}$  に比例している。そのため、振動準位間の遷移周波数  $\Omega$  が時間変化するかどうかを見ることは  $\mu$  が時間変化するかどうかを見ていることになる。このとき、 $\mu$  の変化に対する  $\Omega$  の変化の係数 (増幅率と呼ぶ) が重要であり、調和振動子の場合  $\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\mu}{\mu}$  となっている。実際の分子の振動準位間の遷移においても 1 つのポテンシャルを用いた場合は増幅率は  $\frac{1}{2}$  に近い値を取る。DeMille の提案 [23] は 2 原子分子が持つ重なっている 2 つのポテンシャルのそれぞれの振動準位間の遷移を用いることで増幅率を 1000 以上にできるというものである。[23] では  $\text{Cs}_2$  分子を例にとっているが我々の扱っている  $^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$  分子でも同様なことができると考えた。先行研究 [25] によって  $X^1\Sigma^+, v = 86 - a^3\Sigma^+, v = 16$  間の遷移において増幅率が -14890 になり我々の用いている遷移が  $\mu$  の時間変化の検証に適していることが分かっている。

本研究では  $\text{KRb}$  分子の  $X^1\Sigma^+, v = 86 - a^3\Sigma^+, v = 16$  間のマイクロ波遷移の周波数を正確

に測定することを目指した。系統誤差の原因となる Zeeman shift や Stark shift などの測定や測定の S/N を上げるためにより多くの分子を用意する方法の模索を行った。その結果、周波数測定 of 継続により  $\mu$  の時間変化に対して  $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = (0.30 \pm 1.00_{stat} \pm 0.16_{sys}) \times 10^{-14} / \text{year}$  という測定結果を得た。

## 1.3 本論文の構成

本論文は以下のような構成となっている。

- 第 1 章では本研究の背景及び目的を述べた。
- 第 2 章では本研究に用いる分子のエネルギー準位について述べ、それが電子陽子質量比の変化に敏感であることを示す。また、電場、磁場に対してどう変化するか of 計算についても述べる。
- 第 3 章では我々の用いる系の系統誤差を評価し、それを減らした実験について述べる。
- 第 4 章では S/N 比の改善に向けて信号を大きくすることを目指した実験について述べる。
- 第 5 章では本研究による電子陽子質量比 of 時間変化 of 検証結果について述べる。
- 第 6 章では本研究のまとめと今後の展望を述べる。



## 第 2 章

# 分子のエネルギー準位

### 2.1 分子の準位と電子陽子質量比

この章では分子のエネルギー準位と電子陽子質量比との関係について述べる。

#### 2.1.1 分子の角運動量の表記

本論文中での角運動量の表記を 2 原子分子でよく使われる Hund's case (a),(c) を例に述べる。(Hund's case は (a),(b),(c),(d),(e) がある [26],[27].)

- Hund's case (a)

原子核の回転と電子の運動の相互作用が弱く、電子の運動が分子軸と強くカップルしている場合、図 2.1.1 のような case (a) によるモデルが有効となる。図中の黒い点は分子を構成する 2 つの原子を表す。 $\mathbf{L}$  が電子の軌道角運動量、 $\mathbf{S}$  が電子のスピン角運動量、 $\mathbf{N}$  が核の回転の角運動量、 $\mathbf{J}$  が全角運動量を表す。電子の運動が分子軸と強く結びついているため、 $\mathbf{L}$  の分子軸射影  $\mathbf{\Lambda}$  と  $\mathbf{S}$  の分子軸射影  $\mathbf{\Sigma}$  が良い量子数となる。 $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{R}$  である。

Hund's case (a) において  $\Lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$  の状態のことを  $\Sigma, \Pi, \Delta, \Phi, \dots$  と表記する。

- Hund's case (c)

電子の運動と分子軸の結びつきよりもスピン軌道相互作用の方が大きい場合は case (c) となる。この場合先に  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{S}$  を合成した  $\mathbf{J}_a$  を考えその分子軸射影を  $\mathbf{\Omega}$  とする。 $\mathbf{J} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{N}$  である。

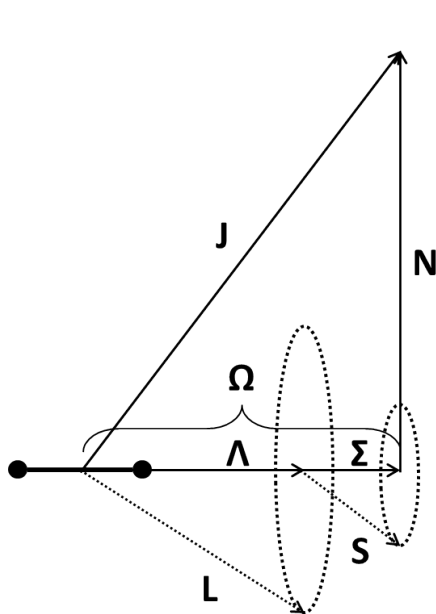


図 2.1.1 Hund's case(a)

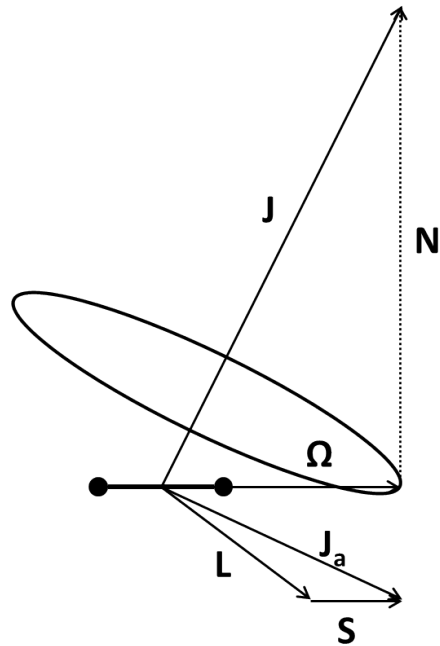


図 2.1.2 Hund's case(c)

## 2.1.2 分子のエネルギースケール

ここでは [28],[29] に基づき分子のエネルギー準位についてまとめる。分子は原子が複数集まって構成され、そのエネルギー構造は原子よりも複雑になる。しかし原子核の質量  $M$  と電子の質量  $m$  の比が非常に大きいことを考えると、電子の運動を考えると核は空間的に固定されたものとみなす近似が有効となる。さらに原子核の運動は重心運動と回転運動と振動運動に分けることができる。重心運動は分子のエネルギー準位に影響しないため分子のエネルギーは電子的 ( $E_e$ )、振動的 ( $E_v$ )、回転的 ( $E_r$ ) にわけることができる。これらのエネルギーの大きさを考えていくと、電子を  $a$  の長さの領域に閉じ込めるエネルギーは  $E_e \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}$  程度 (長さ  $a$  の 1 次元量子井戸のエネルギー固有値を考えた) である。振動のエネルギーは核間距離を  $a$  動かして電子のエネルギー  $E_e$  分エネルギーを変えることを考えると

$$\frac{1}{2}M\omega^2 a^2 \sim E_e \quad (2.1.1)$$



より  $E_v \sim \sqrt{\frac{m}{M}} E_e$  となる。回転エネルギーは長さ  $a$  の物体が角運動量  $\hbar$  で運動しているときのエネルギーより  $E_r \sim \frac{\hbar^2}{2Ma^2} \sim \frac{m}{M} E_e$  となる。以上より 3 つのエネルギーのオーダーは

$$E_e : E_v : E_r \sim 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M} \sim 10000 : 100 : 1 \quad (2.1.2)$$

と見積もることができる。

### Born-Oppenheimer 近似

ここで電子が  $n$  個、原子核が  $N$  個で構成される分子がポテンシャル  $V$  中で運動する Schrödinger 方程式を考えると

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 - \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + V \right) \phi = E\phi \quad (2.1.3)$$

と書ける。原子核を空間的に固定して考えると電子の波動関数は核の座標  $\mathbf{R}_j$  に対する座標  $\mathbf{r}_i$  の関数として  $u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i)$  となり、そのエネルギー固有値を  $U(\mathbf{R}_j)$  とすると、 $u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i)$  が満たす方程式は

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 + V \right) u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) = U(\mathbf{R}_j) u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) \quad (2.1.4)$$

となる。 $\phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_j) = u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) w(\mathbf{R}_j)$  と書いて式 (2.1.4) と共に式 (2.1.3) に代入すると

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) \left( -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + U(\mathbf{R}_j) - E \right) w(\mathbf{R}_j) \\ = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \left( w(\mathbf{R}_j) \nabla_j^2 u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) + 2\nabla_j w(\mathbf{R}_j) \cdot \nabla_j u_{\mathbf{R}_j}(\mathbf{r}_i) \right) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

と書ける。ここで  $u$  の  $\mathbf{R}_j$  依存性を無視すると右辺がゼロとなり原子核の運動はポテンシャル  $U(\mathbf{R}_j)$  中の粒子の運動の Schrödinger 方程式

$$\left( -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 + U(\mathbf{R}_j) \right) w(\mathbf{R}_j) = Ew(\mathbf{R}_j) \quad (2.1.6)$$

の形に収まる。以上の近似を Born-Oppenheimer 近似と呼ぶ。分子の振動準位のエネルギー等を計算するときポテンシャル  $U(\mathbf{R}_j)$  が必要となるが、式 (2.1.4) を解くことは一般的に困難であり分子のポテンシャルを求めることは難しい。本研究では Ab initio 計算によって KRb 分子のポテンシャルを計算した [30] と実験値によって fitting したポテンシャル [31],[32] の値を用いている。

### 2.1.3 分子の振動準位

式 (2.1.6) を解くことで振動準位を求めることができる。WKB 近似 (詳細は付録) を用いて振動準位のエネルギーや波動関数を求めることはできるが本研究ではそれらを計算するのは LEVEL というプログラムによって行っている。LEVEL とは R.J. Le Roy 氏が公開している計算プログラムであり分子のポテンシャルを入力するとエネルギー準位や波動関数などの計算結果を出力するものである [33]。図 2.1.3 は LEVEL を用いて KRb 分子のもつポテンシャル  $a^3\Sigma^+$  の振動準位を求めた結果である。黒い線がポテンシャルの形であり、赤い線がそれぞれの振動エネルギー準位である。このポテンシャルは 33 個の振動準位を持つ。振動準位はエネルギーの低いものから  $v=0,1,2,\dots$  とラベリングする。分子のポテンシャルは多くの場合図 2.1.3 のような形をしていて底の方は調和振動子のように振動準位がほぼ等間隔でならんでおり、エネルギーが高く束縛状態を持たなくなる解離限界に近づくにつれて振動準位の間隔は狭くなっていく。

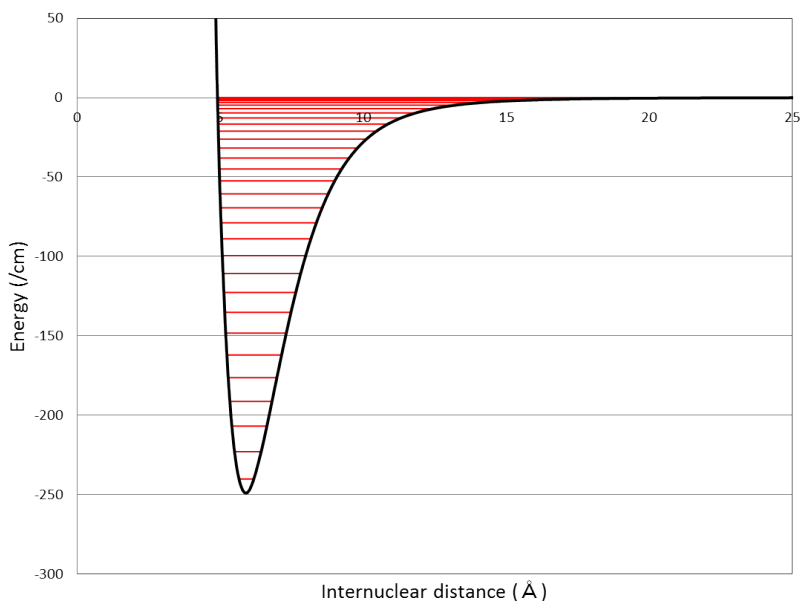


図 2.1.3  $a^3\Sigma^+$  のポテンシャル及び振動準位

#### Franck-Condon Factor

分子の遷移を考える際、Franck-Condon Factor(以下 FCF) という値が重要となる。例として KRb 分子の  $(3)0^+$  ポテンシャルの  $v=123, J=1$  の準位と  $X^1\Sigma^+$  ポテンシャルの  $v=91, J=0$  の準位間の遷移を考える。ポテンシャルの図及びそれぞれの準位の波動関数は

図 2.1.4 のようになっている。FCF は上準位の波動関数を  $\psi(R)$  下準位の波動関数を  $\psi(R)'$  とおくと、

$$FCF = \left| \int \psi'(R)^* \psi(R) dR \right|^2 \quad (2.1.7)$$

で与えられる。これは下準位と上準位の波動関数がどれだけ重なっているかであり FCF が大きければ遷移確率が大きい。また、ポテンシャルがだんだんゆるやかになっているため分子の波動関数は図のように外側に行くほど振動がゆるやかになり、一番右の山がもっとも大きな腹を持つ。この腹の位置が下準位と上準位でよく重なっているかどうかを見るとおおざっぱに FCF が大きい組み合わせを予想することができる。

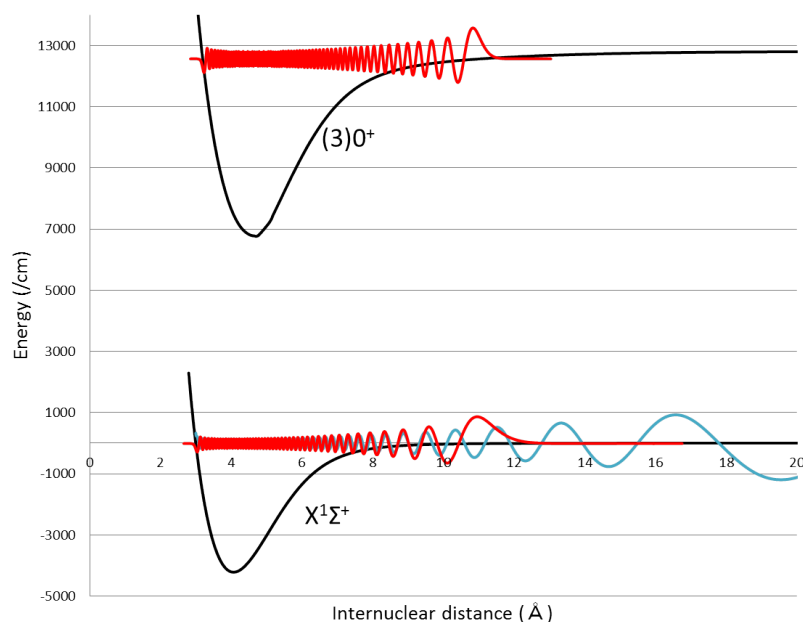


図 2.1.4 (3)0<sup>+</sup>, v=123, J=1 と X<sup>1</sup>Σ<sup>+</sup>, v=91, J=0 及び原子の波動関数

### 原子の波動関数

分子の波動関数と同様に分子のポテンシャルに遠方から入射してくる粒子の波動関数を求めることができる。これは束縛状態にないものでありつまりは 2 原子分子が 1 つ 1 つの原子に解離している状態の波動関数である。その表式は [34] より以下のようなになる。V はポテンシャル、C(R,E) は規格化因子、 $m^*$  は換算質量である。これを用いて  $f(R,E)$  を

計算したものが図 2.1.4 中の青い線である。

$$f(R, E) = \sqrt{\frac{2m^*}{\pi\hbar^2}} \frac{1}{C(E)} a(R, E) \sin(b(R, E)) \quad (2.1.8)$$

$$a(R, E) = \frac{1}{\sqrt{k_{local}(R, E)}} \quad (2.1.9)$$

$$b(R, E) = \int_{R_i}^R k_{local}(R', E) dR' + \frac{\pi}{4} \quad (2.1.10)$$

$$k_{local}(R, E) = \sqrt{k^2 - \frac{2m^*V(R)}{\hbar^2}} \quad (2.1.11)$$

$$k^2 = \frac{2m^*E}{\hbar^2} \quad (2.1.12)$$

#### 2.1.4 分子準位と $m_e/m_p$ の変化

電子陽子質量比  $\mu$  が分子ポテンシャルにどのように依存するかを [23] に基づいて説明する。エネルギー準位の間隔  $\Omega$  を実験で測定するときそれが  $\mu$  の変化にどのように関係するかを考える。まず感度と増幅率という 2 つのパラメータを定義する。 $\mu$  の変化の割合  $\Delta\mu/\mu$  に対する  $\Omega$  の絶対的な変化は

$$\partial_\mu \Omega \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial(\ln \mu)} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu/\mu} \quad (2.1.13)$$

であり  $\partial_\mu \Omega$  を感度と呼ぶ。 $\Omega$  の測定が線幅  $\Gamma/S$  比  $S$  で行われるとき  $\delta\Omega = \Gamma/S$  の不確かさでの測定となり、このとき  $\Delta\mu/\mu$  の測定の不確かさは

$$\delta\left(\frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = \frac{\delta\Omega}{\partial_\mu \Omega} = \frac{\Gamma}{S \partial_\mu \Omega} \quad (2.1.14)$$

となる。 $\Omega$  の相対的な変化は

$$\frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega} = \frac{\partial \Omega/\Omega}{\partial \mu/\mu} \quad (2.1.15)$$

であり、この  $\frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega}$  を増幅率と呼ぶ。その他の系統誤差を十分小さくできていれば、

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \simeq \frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega} \left(\frac{\Delta\mu}{\mu}\right) \quad (2.1.16)$$

となり、 $\mu$  の変化率と増幅率の乗算が  $\Omega$  の変化率となって測定できる。

ここからは分子の振動エネルギー準位の  $\mu$  依存性を考えていく。 $m_e$  を固定し  $\mu$  の変化は全て  $m_p$  の変化によるものとする。このとき式 (2.1.4) から得られるポテンシャルは  $m_p$  によらないため変化しない。また振動準位のエネルギー  $E_v$  は WKB 近似 (詳細は付

録) から得られる式

$$\int_{R_i}^{R_o} \sqrt{2M(E_v - V(R))} dR = \hbar\pi \left( v + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.17)$$

で考える。R は核間距離、 $R_i, R_o$  はそれぞれ内側、外側の転回点、 $V(R)$  はポテンシャル、 $M$  は分子を構成する 2 原子の換算質量である。原子核の質量は主に陽子の質量で決まるため  $M \propto m_p \propto \mu^{-1}$  である。 $\mu$  の変化に対する振動準位のエネルギーの感度を  $\Omega$  と同様に

$$\partial_\mu E_v \equiv \frac{\partial E_v}{\partial \mu / \mu} \quad (2.1.18)$$

と定義する。ここで異なる 2 つの振動準位  $v = v_1, v_2$  の間のエネルギー  $\Omega = |E_{v_1} - E_{v_2}|$  を測定することを考える。このとき  $\partial_\mu \Omega = |\partial_\mu E_{v_1} - \partial_\mu E_{v_2}|$  である。式 (2.1.17) の両辺を  $v$  で微分すると

$$M \frac{\partial E_v}{\partial v} \int_{R_i}^{R_o} \frac{dR}{\sqrt{2M(E_v - V(R))}} = \pi \hbar \quad (2.1.19)$$

となり、両辺を  $v$  で微分すると  $\frac{\partial M}{\partial \mu} = -\frac{M}{\mu}$  を用いて、

$$M \frac{\partial E_v}{\partial \mu} \int_{R_i}^{R_o} \frac{dR}{\sqrt{2M(E_v - V(R))}} = \frac{\pi \hbar}{2\mu} \left( v + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.20)$$

が得られる。式 (2.1.18), (2.1.19), (2.1.20) より状態密度を  $\rho(E_v) = (\partial E_v / \partial v)^{-1} \simeq (E_v - E_{v-1})^{-1}$  として、エネルギー感度は

$$\partial_\mu E_v = \frac{v + \frac{1}{2}}{2\rho(E_v)} \quad (2.1.21)$$

という形に書ける。

図 2.1.5 のような分子のポテンシャルにおいてこのエネルギー感度がどのようにになっているかを考える。まず、ポテンシャルの底の付近では分子の振動は調和振動子でよく近似され、 $E_v = \hbar\omega \left( v + \frac{1}{2} \right)$  であり、 $\partial_\mu E_v = E_v / 2$  である。このように  $v$  が小さい方の振動準位では  $\partial_\mu E_v$  は  $E_v$  に比例して大きくなっていく。 $v$  が大きくなって解離限界  $D$  に近づいてくると調和振動子での近似は成り立たなくなり、振動準位間隔は狭くなっていく。そのため  $\rho(E_v)$  は大きくなっていき  $\partial_\mu E_v$  は小さくなる。以上より、 $\partial_\mu E_v$  はどこかの振動準位で最大値を持つことがわかる。図 2.1.7 は我々の用いる  $\text{KRb}$  分子の基底状態の 2 つのポテンシャル  $X^1\Sigma^+, a^3\Sigma^+$  に関してエネルギー感度  $\partial_\mu E_v$  を計算したものである。横軸に解離限界からのエネルギー  $E_v - D$ 、縦軸に  $\partial_\mu E_v$  をプロットしている。同一のポテンシャルの振動準位間の遷移を考えると振動準位が大きく離れた準位間の遷移なら  $\partial_\mu \Omega$  は大きくなるがそれと共に  $\Omega$  も大きくなるため、増幅率  $\frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega}$  を大きくすることができない。しかし、図 2.1.5 のような解離限界が共通している深いポテンシャル  $X$  と浅いポテンシャル  $Y$  が

重なっているような状況だと増幅率を大きくとるような遷移が可能となる。X の高い振動準位ではエネルギー感度  $\partial_\mu E_{v_X}$  が大きく、Y の低い振動準位では  $\partial_\mu E_{v_Y}$  が小さい。そのような2つの準位がエネルギー的に近くに存在し、 $\Omega$  が小さくとれる場合が有り得る。このとき感度は

$$\partial_\mu \Omega = \partial_\mu E_{v_X} - \partial_\mu E_{v_Y} \simeq \partial_\mu E_{v_X} \quad (2.1.22)$$

であり、増幅率は

$$\frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega} \simeq \frac{\partial_\mu E_{v_X}}{E_{v_X} - E_{v_Y}} \quad (2.1.23)$$

となる。KRb 分子の基底状態の2つのポテンシャル  $X^1\Sigma^+$ ,  $a^3\Sigma^+$  は増幅率を大きく取れる遷移が存在し、それが  $X^1\Sigma^+, v=86$ - $a^3\Sigma^+, v=16$  間の遷移 (図 2.1.8 の緑の点の間の遷移) である。先行研究 [25] からこの遷移の増幅率が-14890 だと分かっている。

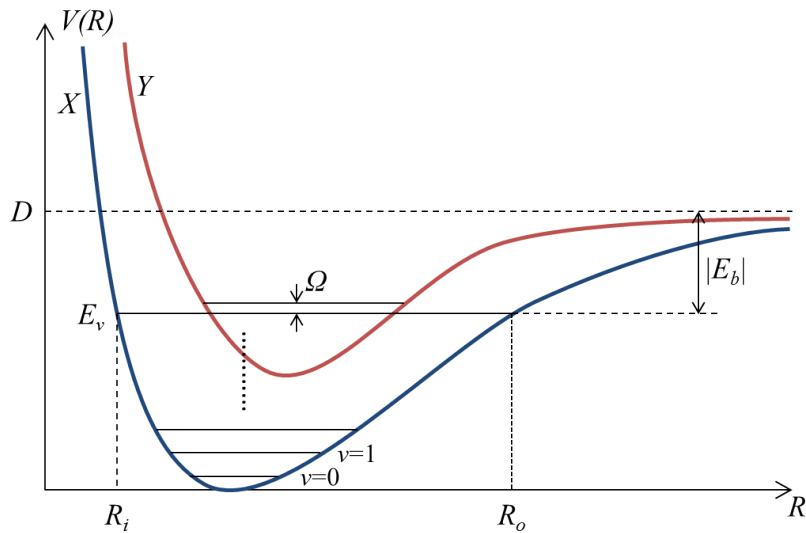
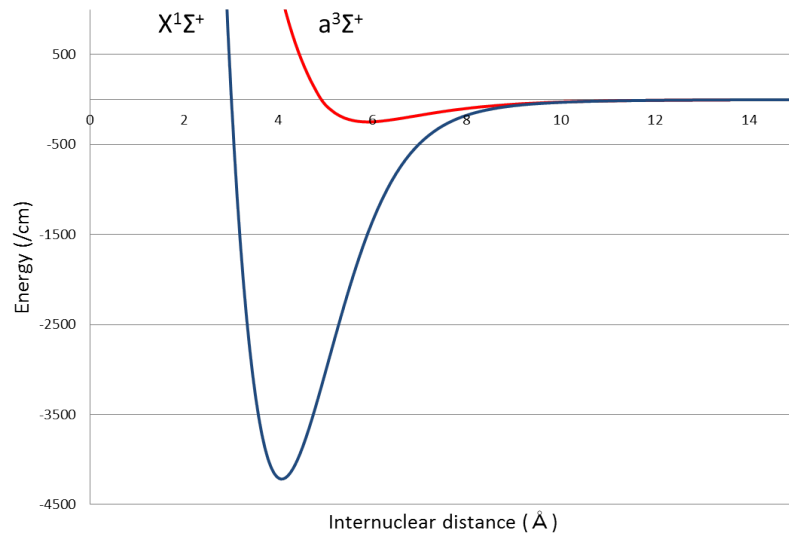
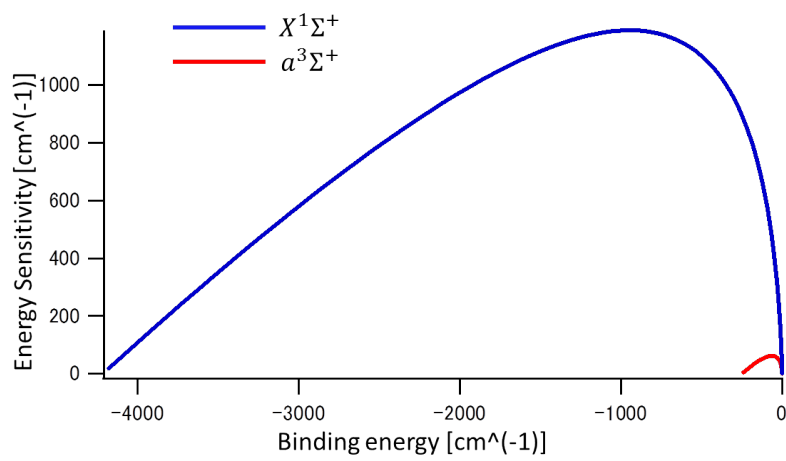


図 2.1.5 ポテンシャルと振動準位の概念図

図 2.1.6  $X^1\Sigma^+$ ,  $a^3\Sigma^+$  のポテンシャル図 2.1.7  $X^1\Sigma^+$ ,  $a^3\Sigma^+$  のエネルギー感度

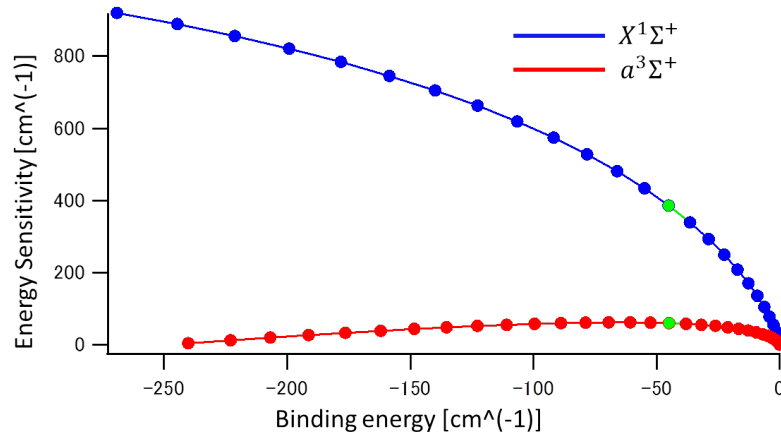


図 2.1.8 図 2.1.7 の  $a^3\Sigma^+$  付近を拡大した図

### 2.1.5 KRb 分子の hyperfine structure

本研究において我々は  $^{41}\text{K}^{86}\text{Rb}$  分子の  $X^1\Sigma^+, v = 86$  と  $a^3\Sigma^+, v = 16$  との間の遷移を見るがそれぞれの準位には超微細構造 (hyperfine structure) が存在する。その分裂の様子は図 2.1.9 のようになっている、合わせて 14 個の準位に分裂している。分光において磁気副準位がなるべく少ない遷移がいいと考え、本研究では  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0$  と  $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1$  との間の遷移周波数を測定する。



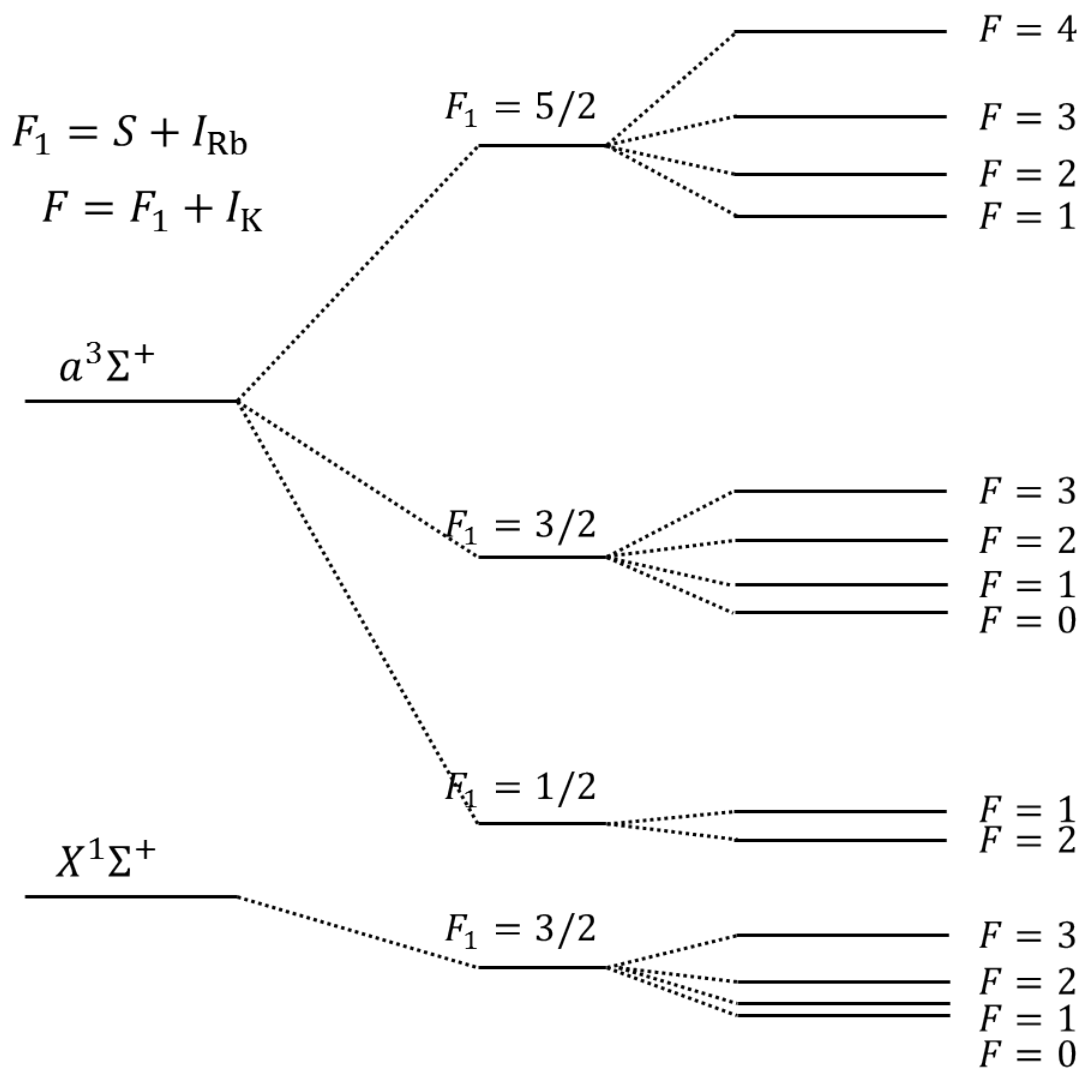


図 2.1.9  $X^1\Sigma^+(v = 86, J = 0)$ ,  $a^3\Sigma^+(v = 16, J = 0)$  の hyperfine structure

## 2.2 Zeeman shift

我々の用いる  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0$ - $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1$  間の遷移は片方の準位が  $F=1$  であり磁気副準位として  $m_F = 0, \pm 1$  を持つ。その中で  $m_F = \pm 1$  の準位は磁場に対して大きくシフトしまうため、我々は  $m_F = 0$  への遷移周波数を正確に測定することを目標としている。磁場が 0 付近で測定を行うと 3 つの磁気副準位が重なってしまうため、それらを分離する程度には磁場をかける必要がある。その時に  $m_F = 0$  の準位も Zeeman shift を受けてしまうため、我々の測定する遷移の磁場に対するふるまいを正確にする必要がある。この節では Zeeman shift の計算による見積りについて述べる。式 2.2.1 のような hyperfine 準位のハミルトニアンに Zeeman 効果の項 (式 2.2.2) を加えたもので Zeeman shift の大きさを計算した。

$$\mathcal{H}_0 = A_{\text{Rb}}\mathbf{S}_{\text{Rb}} \cdot \mathbf{I}_{\text{Rb}} + A_{\text{K}}\mathbf{S}_{\text{K}} \cdot \mathbf{I}_{\text{K}} \quad (2.2.1)$$

$$\mathcal{H}_{\text{Zeeman}} = g_{\text{Rb}}\mu_{\text{B}}BI_{\text{Rb}}^z + g_{\text{K}}\mu_{\text{B}}BI_{\text{K}}^z + g_e\mu_{\text{B}}B(S_{\text{Rb}}^z + S_{\text{K}}^z) \quad (2.2.2)$$

$\mathbf{S}_{\text{Rb}}, \mathbf{S}_{\text{K}}$  は Rb, K の電子スピン、 $\mathbf{I}_{\text{Rb}}, \mathbf{I}_{\text{K}}$  は Rb, K の核スピン、 $A_{\text{Rb}}, A_{\text{K}}$  は fitting parameter で実験値と計算値が近くなるように fitting した値を用いる [25]。  $g_{\text{Rb}}, g_{\text{K}}, g_e$  は Rb 原子核, K 原子核, 電子の g 因子、 $\mu_{\text{B}}$  はボーア磁子、 $B$  は磁場の大きさである。右肩の  $z$  は  $z$  成分を表す。計算して得られた Zeeman shift のグラフを

$$f(B) = a_1B + a_2B^2 \quad (2.2.3)$$

で fitting したときの係数をまとめたものが表 2.2.1~表 2.2.4 である。first は  $a_1$  の値、second は  $a_2$  の値を書いてある。  $m_F = 0$  の fitting は  $a_1 = 0$  に固定している。

図 2.2.1, 図 2.2.2 は実験に用いる準位のそれぞれの磁気副準位がどのように Zeeman shift するかを表したものである。図を見ると、  $m_F = 0$  から  $m_F = 0$  への遷移は磁場の 2 乗に比例したシフトをして、  $m_F = 0$  から  $m_F = 1$  への遷移は磁場に比例したシフトをすることがわかる。

表 2.2.1  $a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 5/2$  各 F の Zeeman shift の計算値

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4	2.798.E+06	3.709.E-05
3	2.098.E+06	3.004.E+03
2	1.399.E+06	5.146.E+03
1	6.994.E+05	6.429.E+03
0		6.854.E+03
-1	-6.994.E+05	6.422.E+03
-2	-1.399.E+06	5.135.E+03
-3	-2.098.E+06	2.994.E+03
-4	-2.798.E+06	5.876.E-05

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3	2.409E+06	-2.562E+03
2	1.606E+06	3.727E+03
1	8.030E+05	7.474E+03
0		8.699E+03
-1	-8.030E+05	7.423E+03
-2	-1.606E+06	3.666E+03
-3	-2.409E+06	-2.552E+03
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2	2.088E+06	-7.757E+03
1	1.044E+06	6.677E+03
0		1.116E+04
-1	-1.044E+06	6.204E+03
-2	-2.088E+06	-7.684E+03
-3		
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2		
1	1.982E+06	-1.878E+04
0		-2.445E+04
-1	-1.982E+06	-1.825E+04
-2		
-3		
-4		

表 2.2.2  $a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 3/2$  各 F の Zeeman shift の計算値

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3	1.061E+06	-4.273E+02
2	7.076E+05	2.869E+03
1	3.538E+05	4.851E+03
0		5.514E+03
-1	-3.538E+05	4.857E+03
-2	-7.076E+05	2.878E+03
-3	-1.061E+06	-4.273E+02
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2	7.953E+05	-2.418E+03
1	3.977E+05	6.518E+03
0		9.507E+03
-1	-3.977E+05	6.528E+03
-2	-7.953E+05	-2.425E+03
-3		
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2		
1	4.326E+05	-9.832E+03
0		3.202E+04
-1	-4.326E+05	-9.849E+03
-2		
-3		
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2		
1		
0		-4.594E+04
-1		
-2		
-3		
-4		

表 2.2.3  $a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 1/2$  各 F の Zeeman shift の計算値

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2		
1	3.910E+05	5.550E+03
0		8.018E+03
-1	-3.910E+05	5.672E+03
-2		
-3		
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2	-1.014E+06	-1.300E+03
1	-5.069E+05	-8.481E+03
0		-1.096E+04
-1	5.069E+05	-8.604E+03
-2	1.014E+06	-1.302E+03
-3		
-4		

表 2.2.4  $X^1\Sigma^+, v = 86, J = 0, F_1 = 3/2$  各 F の Zeeman shift の計算値

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3	2.388E+04	-1.467E+01
2	1.592E+04	-5.239E+01
1	7.959E+03	-7.520E+01
0		-8.298E+01
-1	-7.959E+03	-7.558E+01
-2	-1.592E+04	-5.286E+01
-3	-2.388E+04	-1.468E+01
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2	-8.564E+03	-2.163E+02
1	-4.282E+03	-1.195E+02
0		-8.298E+01
-1	4.282E+03	-1.194E+02
-2	8.564E+03	-2.151E+02
-3		
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2		
1	-7.997E+03	-2.103E+02
0		-1.314E+01
-1	7.997E+03	-2.097E+02
-2		
-3		
-4		

MF	first (Hz/G)	second (Hz/G <sup>2</sup> )
4		
3		
2		
1		
0		-2.341E+02
-1		
-2		
-3		
-4		

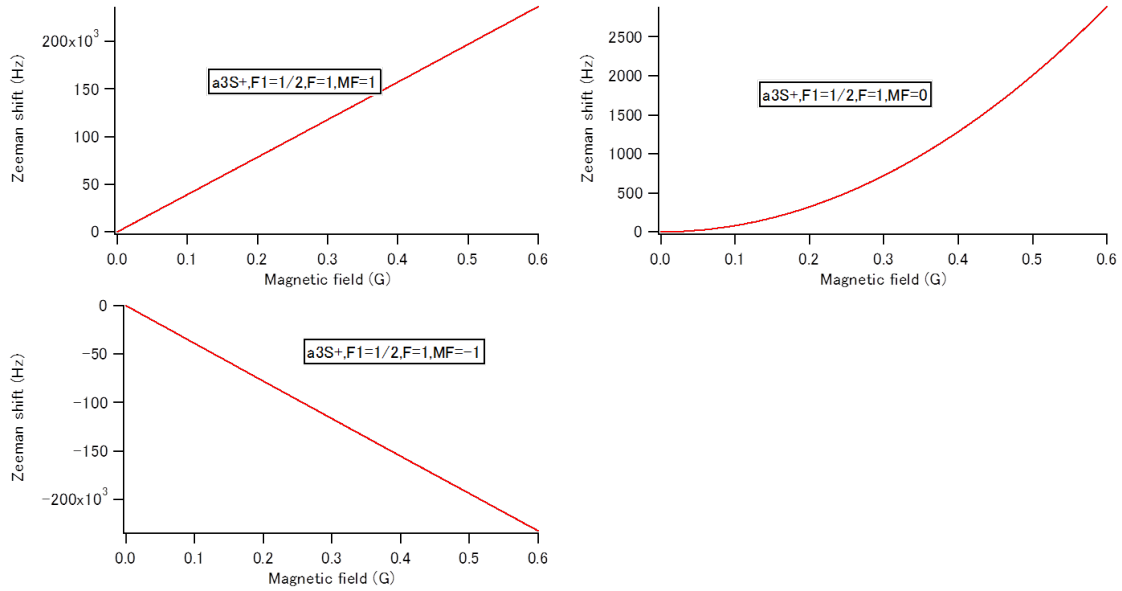


図 2.2.1  $a^3\Sigma^+, v=16, J=0, F_1=1/2, F=1$  各 F の Zeeman shift の計算値

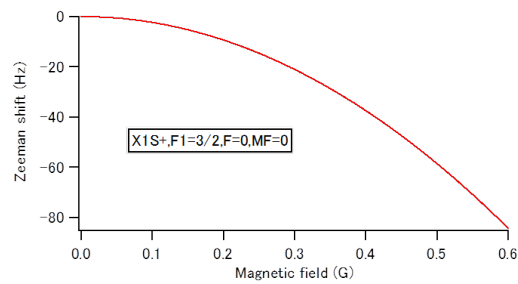


図 2.2.2  $X^1\Sigma^+, v=86, J=0, F_1=3/2, F=0$  各 F の Zeeman shift の計算値

## 2.3 Stark shift

分子のエネルギー準位は空間内の電場によって Stark shift を受ける。我々の実験ではチャンバー内の電場の大きさを測定するために、 $X^1\Sigma^+, v=0$  の hyperfine 間の遷移を用いている。 $m_e/m_p$  の実験では  $v=86$  の遷移を見るが、 $v=0$  の方が分極率が大きく受ける Stark shift が大きいため、電場の大きさを見るのに向いているからである。 $X^1\Sigma^+, v=0$  に分子を生成することは先行研究 [35] により既に可能である。

この節では  $X^1\Sigma^+, v=0$  の hyperfine 準位が電場に対してどのようにシフトするのかを計算した。計算は [27] に基づき以下のような式 ( $H_{HF}$ ) を用いて行った。 $H_{rot}$ (式 (2.3.2)) は回転のエネルギー、 $H_1, H_2$ (式 (2.3.3),(2.3.4)) はそれぞれ K,Rb の電気四重極相互作用、 $H_{c1}, H_{c2}$ (式 (2.3.5),(2.3.6)) はそれぞれ K,Rb の回転角運動量と核スピン間の相互作用、 $H_{c3}, H_{c4}$ (式 (2.3.7)) はそれぞれ核スピン間の双極子、スカラー相互作用、 $H_S$  は分子の電気双極子モーメントと電場の相互作用を表す。式 (2.3.2)~式 (2.3.9) は各成分の行列要素の計算式であり、これによって得られた行列の固有エネルギーを mathematica で計算した。

$$H_{HF} = H_{rot} + H_1 + H_2 + H_{c1} + H_{c2} + H_{c3} + H_{c4} + H_S \quad (2.3.1)$$

$$H_{rot} [J, F_1, F, J', F'_1, F'] = \delta_{J,J'} \delta_{F_1,F'_1} \delta_{F,F'} B J(J+1) \quad (2.3.2)$$

$$H_1 [J, F_1, F, J', F'_1, F'] = \frac{eq_1 Q_1}{4} \delta_{F_1,F'_1} \delta_{F,F'} (-1)^{J+J'+F_1+I_1-\Lambda_2} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \\ \times \begin{Bmatrix} I_1 & J' & F_1 \\ J & I_1 & 2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} J & 2 & J' \\ -\Lambda_2 & 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 2 & I_1 \\ -I_1 & 0 & I_1 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

$$H_2 [J, F_1, F, J', F'_1, F'] = \frac{eq_2 Q_2}{4} \delta_{M_F, M'_F} \delta_{F,F'} (-1)^{2F'_1+F+I_2+2J+2+I_1} \\ \times \sqrt{(2F'_1+1)(2F_1+1)(2J+1)(2J'+1)} \\ \times \begin{Bmatrix} I_2 & F'_1 & F \\ F_1 & I_2 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 & J & I_1 \\ J' & F'_1 & 2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} J & 2 & J' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 2 & I_2 \\ -I_2 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

$$H_{c1} [J, F_1, F, J', F'_1, F'] = c_1 \delta_{J,J'} \delta_{F_1,F'_1} \delta_{F,F'} (-1)^{J+F_1+I_1} \\ \times \sqrt{J(J+1)(2J+1)I_1(I_1+1)(2I_1+1)} \begin{Bmatrix} I_1 & J & F_1 \\ J & I_1 & 1 \end{Bmatrix} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned}
H_{c_2} [J, F_1, F, J', F'_1, F'] &= c_2 \delta_{J,J'} \delta_{F,F'} (-1)^{2F'_1+F+I_2+J+I_1+1} \\
&\times \sqrt{(2F'_1+1)(2F_1+1)J(J+1)(2J+1)I_2(I_2+1)(2I_2+1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} I_2 & F'_1 & F \\ F_1 & I_2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 & J & I_1 \\ J & F'_1 & 1 \end{Bmatrix} \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{c_3} [J, F_1, F, J', F'_1, F'] &= c_3 \delta_{F,F'} (-1)^{F'_1+F+I_2+J} \\
&\times \sqrt{30(2F_1+1)(2F'_1+1)(2J+1)(2J'+1)I_2(I_2+1)(2I_2+1)I_1(I_1+1)(2I_1+1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} J & J' & 2 \\ I_1 & I_1 & 1 \\ F_1 & F'_1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & 2 & J' \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{c_4} [J, F_1, F, J', F'_1, F'] &= c_4 \delta_{J,J'} \delta_{F,F'} (-1)^{F'_1+F+I_2+F_1+J+1+I_1} \\
&\times \sqrt{(2F'_1+1)(2F_1+1)I_1(I_1+1)(2I_1+1)I_2(I_2+1)(2I_2+1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} I_2 & F'_1 & F \\ F_1 & I_2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 & I_1 & J \\ I_1 & F'_1 & 1 \end{Bmatrix} \quad (2.3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_S [J, F_1, F, M_F, J, F'_1, F', M'_F, E_Z] &= -\delta_{M_F, M'_F} \mu_0 E_Z (-1)^{(F-M_F+F'+F_1+1+I_2+F'_1+J+1+I_1+J)} \\
&\times \sqrt{(2F'+1)(2F+1)(2F'_1+1)(2F_1+1)(2J'+1)(2J+1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} F & 1 & F' \\ -M_F & 0 & M_F \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F & F_1 & I_2 \\ F'_1 & F' & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 & J & I_1 \\ J' & F'_1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & 1 & J' \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

表 2.3.1 は電場がないときのエネルギーの計算値である。実験で電場の大きさを測定する際は  $X^1\Sigma^+, v=0$  の  $J=0, F_1=3/2, F=2$  から  $J=1, F_1=5/2, F=3$  へのマイクロ波遷移を用いる。その遷移の Stark shift のグラフが図 2.3.1 である。 $J=0, F_1=3/2, F=2$  は磁気副準位によるシフトの差がなく、 $J=1, F_1=5/2, F=3$  の磁気副準位によって分裂している。図 2.3.1 中に書いてある  $M_F$  は  $J=1, F_1=5/2, F=3$  のものである。電場をかけたときに各準位がどのようにシフトするかを計算したものが図 2.3.2~図 2.3.5 である。

表 2.3.1  $X^1\Sigma^+, v=0$  の hyperfine 準位の計算値

J	F1	F	Energy(Hz)
1	1/2	2	2191120774
1	1/2	1	2191109259
1	5/2	1	2190875187
1	5/2	4	2190844949
1	5/2	2	2190810043
1	5/2	3	2190793639
1	3/2	2	2190505960
1	3/2	3	2190454555
1	3/2	1	2190446769
1	3/2	0	2190401532
0	3/2	3	2063
0	3/2	2	-710
0	3/2	1	-2570
0	3/2	0	-3504

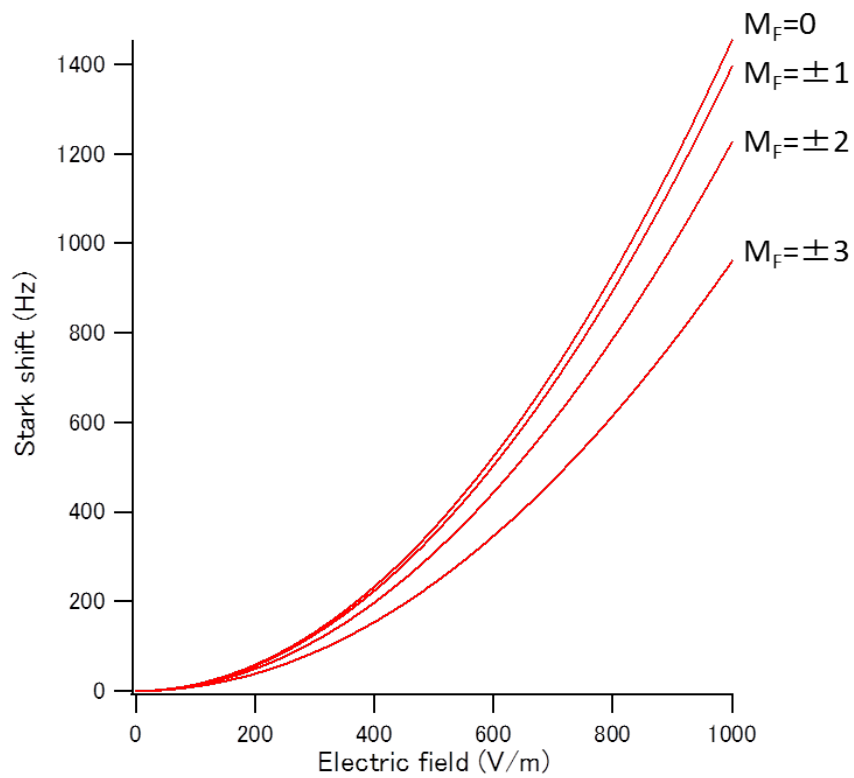


図 2.3.1  $J=0, F_1=3/2, F=2$  から  $J=1, F_1=5/2, F=3$  への遷移の Stark shift の計算値。  $F=3$  の準位の  $M_F$  によって分かれている。



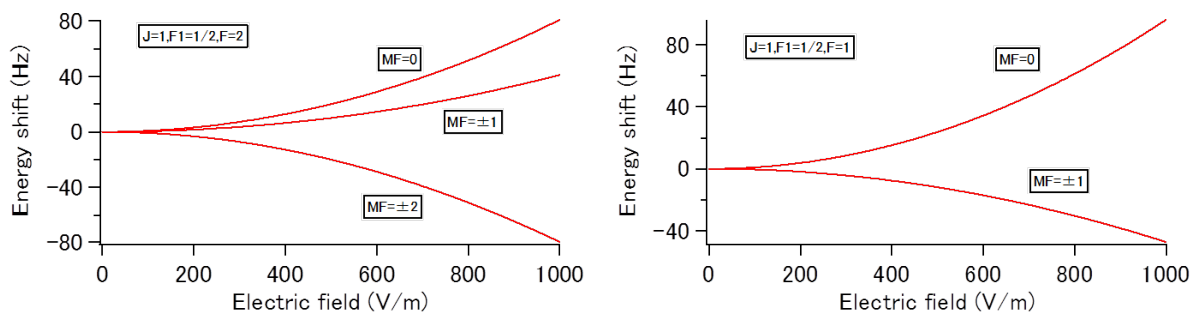


図 2.3.2  $J=1, F_1=1/2$  の Stark shift の計算値

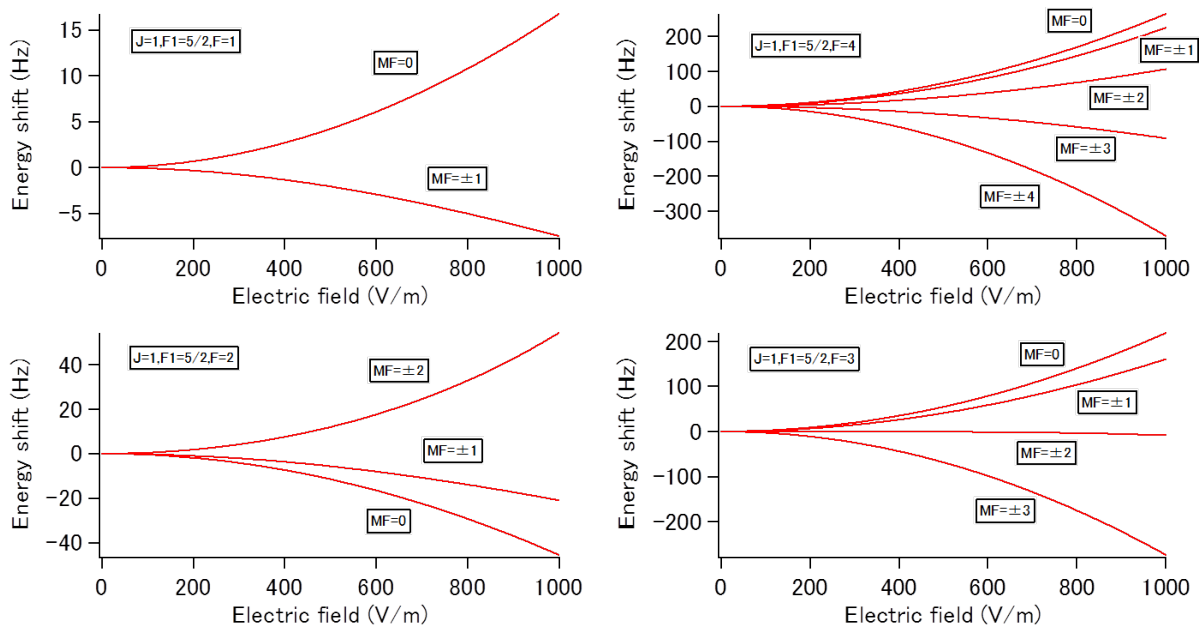


図 2.3.3  $J=1, F_1=5/2$  の Stark shift の計算値

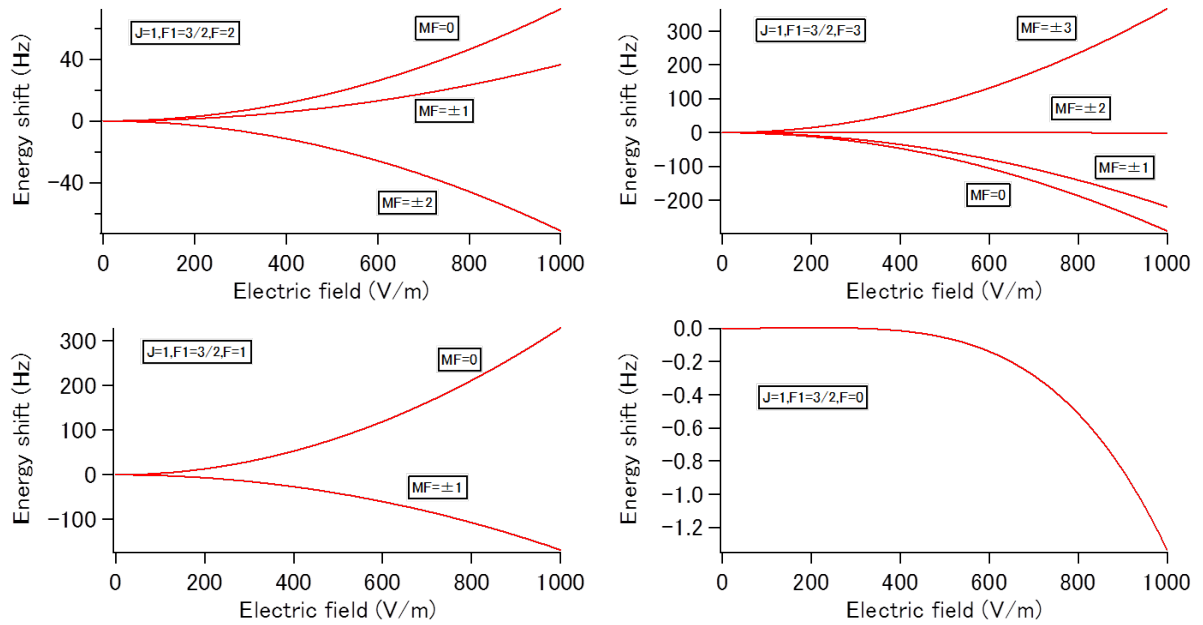


図 2.3.4  $J=1, F_1=3/2$  の Stark shift の計算値

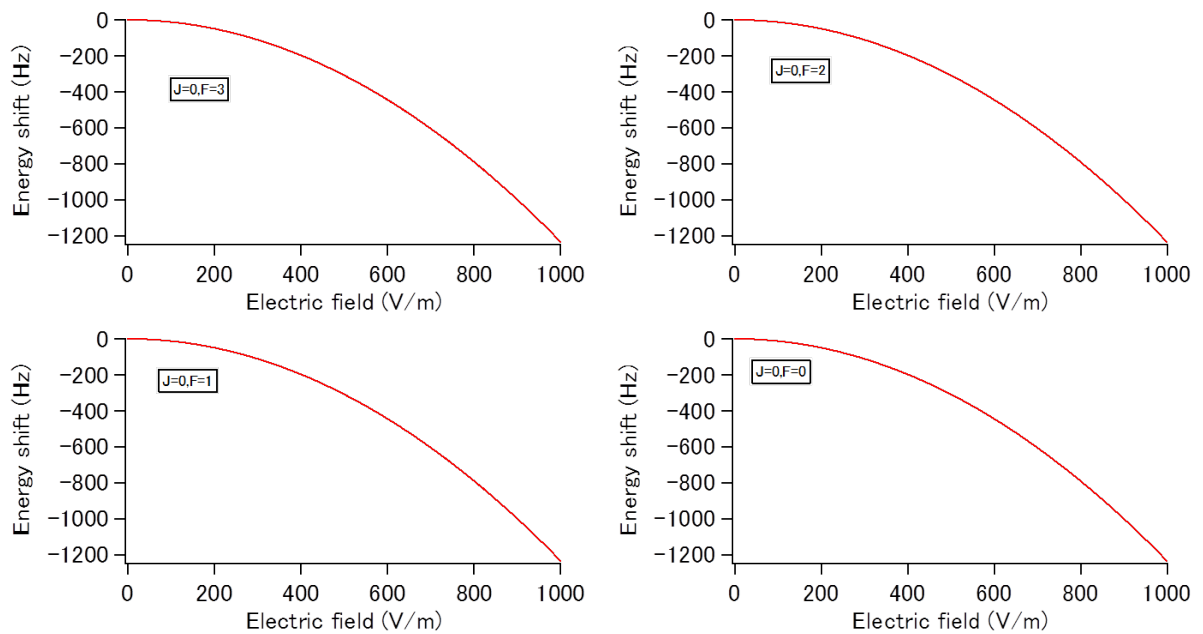


図 2.3.5  $J=0, F_1=3/2$  の Stark shift の計算値

## 第 3 章

# 系統誤差の評価

### 3.1 分子の用意

我々の実験では  $X^1\Sigma^+, v=86$  に分子を用意する必要がある。分子を用意するまでは先行研究 [36],[25] で既に達成している。分子を作成するプロセスの概要を描いたものが図 3.1.1 である。まず初めに磁気光学トラップ (MOT) によって真空チャンバー内の同じ位置に  $^{41}\text{K}, ^{87}\text{Rb}$  を冷却してトラップする。トラップされた原子数等は dispenser に流す電流や工学系のアラインメントによって変化するが典型的な値として、Rb の温度、原子数、中心密度は  $70\ \mu\text{K}, 3 \times 10^7, 3 \times 10^{10}\ \text{/cm}^3$ 、K の温度、原子数、中心密度は  $280\ \mu\text{K}, 5 \times 10^6, 8 \times 10^9\ \text{/cm}^3$  である。冷却された原子集団に分子の励起状態と共鳴するような光を当てて分子を作成する (光会合、Photoassociation)。光会合によって作られた励起状態の分子は自然放出によって基底状態に遷移する。我々の利用している励起状態は  $X^1\Sigma^+, v = 91$  との FCF(Franck-Condon Factor) が大きく、そこに最も多くの分子が落ちてくる。光会合によって作られた  $v=91$  の分子を実験に使う状態 ( $X^1\Sigma^+, v = 86, J = 0, F_1 = 3/2, F = 0$ ) に移すのは STIRAP(STImulated Raman Adiabatic Passage) [?] によって行う。STIRAP によって  $X^1\Sigma^+, v = 86, J = 0, F_1 = 3/2, F = 0$  にできた分子をマイクロ波遷移によって  $a^3\Sigma^+, v = 16, J = 0, F_1 = 1/2, F = 1$  に遷移させ、それをパルスレーザーによってイオン化し MCP(micro-channel plate) で検出している。

### 3.2 Zeeman shift の測定

この節では  $m_e/m_p$  の時間変化の検出に使う遷移 ( $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$  から  $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$  への遷移) の Zeeman shift の測定について述べる。上準位の  $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1$  は磁気副準位  $m_F$  が  $0, \pm 1$  の 3 つ存在するため、磁場をかけると 3 つに分かれる。その様子を見たものが図 3.2.1 である。図中の  $m_F$

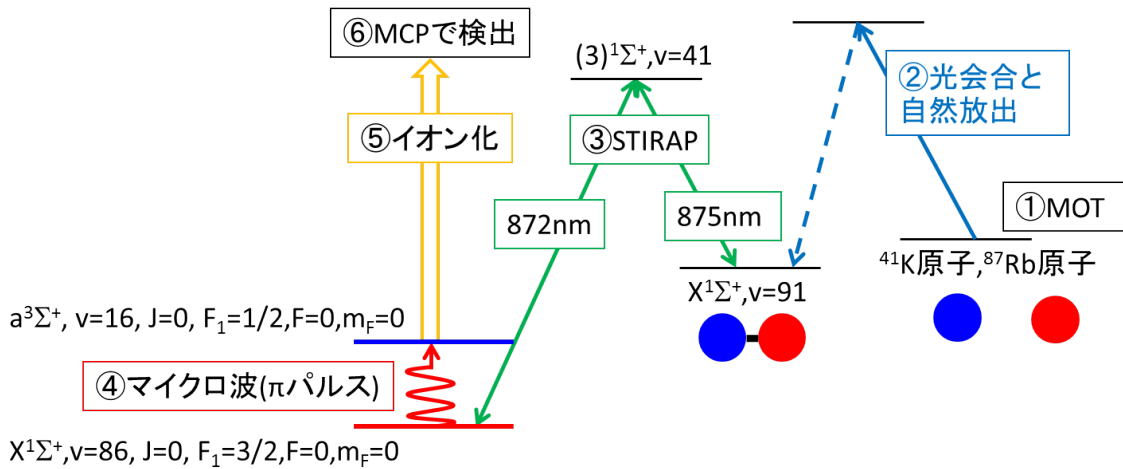


図 3.1.1 分子生成の概略図

は上準位の  $m_F$  を書いている。節 2.2 で計算したように、 $m_F = \pm 1$  の準位は磁場に比例して対称に大きくシフトし、 $m_F = 0$  の準位は磁場の 2 乗に比例して小さくシフトする。精密に知りたい準位は  $m_F = 0$  への遷移だが磁場の大きさを測定するために  $m_F = +1$  への遷移を用いる。実験では図 3.2.3 のように  $m_F = 0, 1$  への遷移周波数をそれぞれ 2.5 s かけて測定することを交互に繰り返すという方法をとる。2.5 s 毎に磁場測定のための遷移をみることで  $m_F = 0, 1$  の測定が時間的に分離しないようにしている。磁場を変化させながら

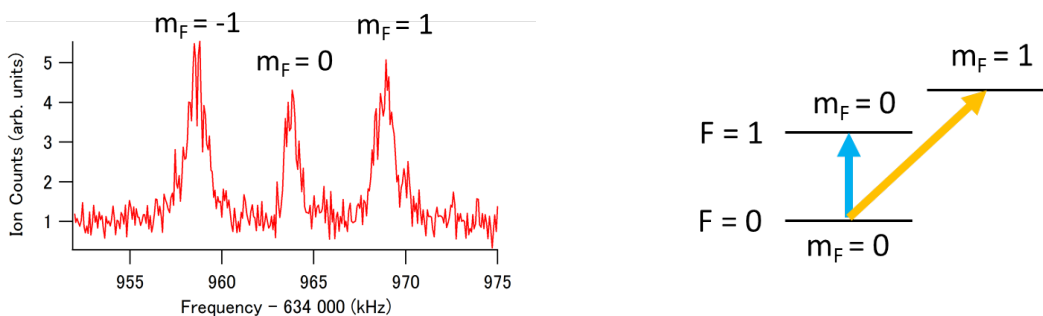


図 3.2.1 マイクロ波遷移の Zeeman shift の様子

図 3.2.2 実験で測定する遷移

$m_F = 0, 1$  への遷移周波数を同時に測定していき、横軸に  $m_F = 0$  への遷移周波数、縦軸に  $m_F = 1$  への遷移周波数をプロットしたグラフが図 3.2.4 である。 $m_F = 0, 1$  への遷移周波数はそれぞれ磁場の 2 次, 1 次に比例してシフトするため、図のような 2 次関数のグラフとなる。フィッティングは  $y = b_1 \sqrt{x} + b_2 x$  で行っていて、 $b_1 = 781.197(6)$ ,  $b_2 = 4251.4(6)$  となった。これによって  $m_F = 1$  への遷移周波数の値から、 $m_F = 1$  への遷移周波数の Zeeman shift の大きさがわかるようになった。図 3.2.4 のフィッティングのエラーバーが

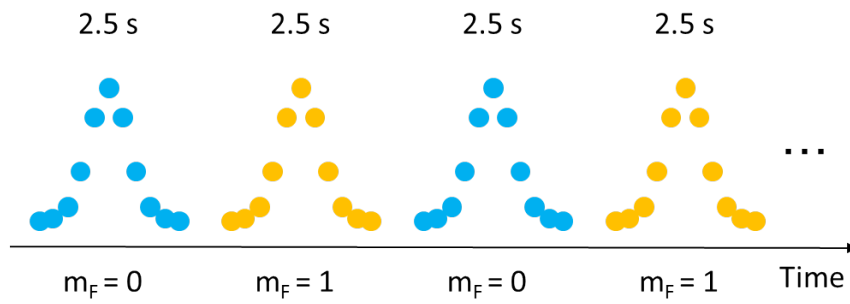
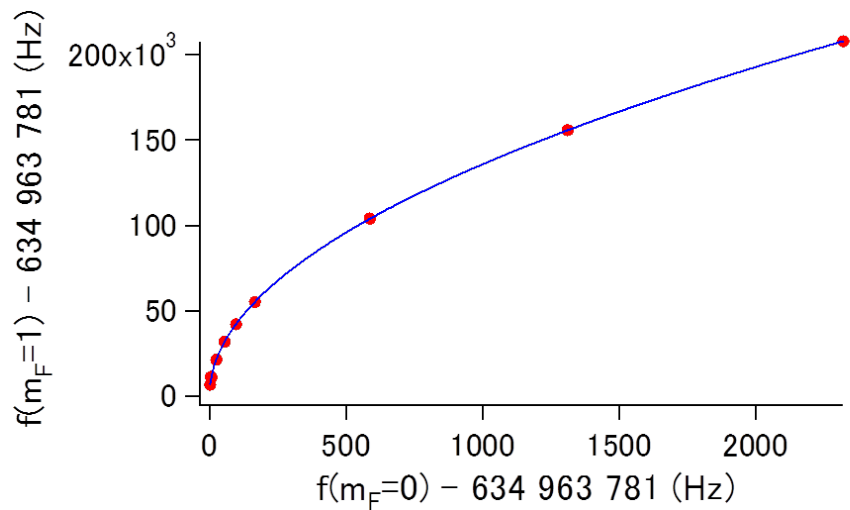


図 3.2.3 周波数測定的时间シーケンス

磁場測定の系統誤差になるがその大きさは  $0.6 \text{ mHz}$  である。

図 3.2.4  $m_F = 0, 1$  への遷移周波数の Zeeman shift の関係

### 3.3 Stark shift

我々が実験に利用している  $X^1\Sigma^+(v=86)$ ,  $a^3\Sigma^+(v=16)$  の hyperfine 準位はそれぞれ空間の電場による Stark shift を受ける。そのため分子準位の正確な分光をするためには、実験中にどのような Stark shift を受けているかを正確に知る必要がある。

我々の実験では MCP(micro-channel plate) を用いて分子イオンの検出を行っているため、真空チャンバー内に電場が存在している。MCP にかける電圧は常に一定なため、dispenser とマイクロ波アンテナに電圧をかけることでマイクロ波を当てている間に分子にかかる電場を可能な限り小さくすることを目指した。

電場の測定は  $\mu$  の変化の検証に使う遷移ではなく KRb 分子の振動基底状態の遷移である  $X^1\Sigma^+, v=0$  の  $J=0, F_1=3/2, F=2$  から  $J=1, F_1=5/2, F=3$  への遷移を用いた。振動準位が低い方が核間距離が小さく分極率が大きくなり Stark shift が大きいため電場の変化を見やすいからである。図 3.3.1 はマイクロ波アンテナにかける電圧を変化させたときの Stark shift の様子であり電場に対して 2 次関数でシフトが起こっている。このフィッティングからアンテナに  $-7.657$  V かけたときに Stark shift が最小となることがわかる。実験中は MCP に  $-2.00$  V の電圧をかけているのだが、この表示桁の精度から MCP の電圧の誤差は  $0.01$  V である。この誤差が Stark shift の系統誤差となるが、それは  $X^1\Sigma^+, v=0$  の  $J=0, F_1=3/2, F=2$ - $J=1, F_1=5/2, F=3$  間の遷移において  $10$  mHz である。電子陽子質量比の恒常性検証に用いる  $X^1\Sigma^+, v=86, F_1=3/2, F=0, m_F=0$ - $a^3\Sigma^+, v=16, F_1=1/2, F=1, m_F=0$  間の遷移の Stark shift も同様にして測定すると図 3.3.2 のグラフが得られた。図 3.3.1 と図 3.3.2 のグラフを  $y = y_0 + a(x - x_0)^2$  の式でフィッティングすると  $a$  の値がそれぞれ  $a=0.0474(2), 0.0043(4)$  となった。これより  $X^1\Sigma^+, v=86, F_1=3/2, F=0, m_F=0$ - $a^3\Sigma^+, v=16, F_1=1/2, F=1, m_F=0$  間の遷移の Stark shift は  $J=0, F_1=3/2, F=2$ - $J=1, F_1=5/2, F=3$  間の遷移の  $10$  分の  $1$  であるため、この遷移の測定における系統誤差は  $1$  mHz となる。

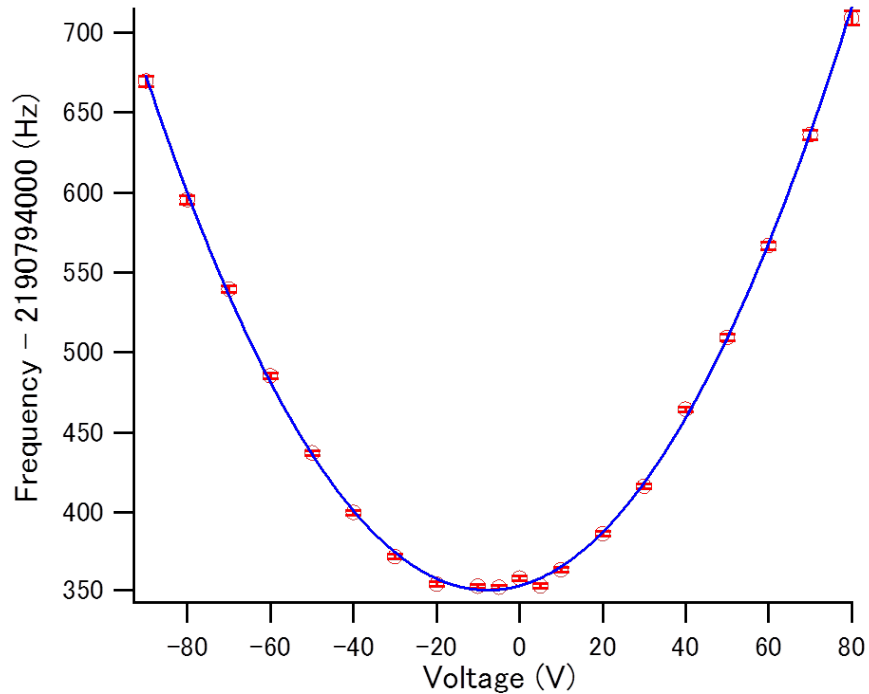


図 3.3.1  $X^1\Sigma^+, v=0$  の  $J=0, F_1=3/2, F=2$  から  $J=1, F_1=5/2, F=3$  へのマイクロ波遷移のアンテナにかける電圧依存性

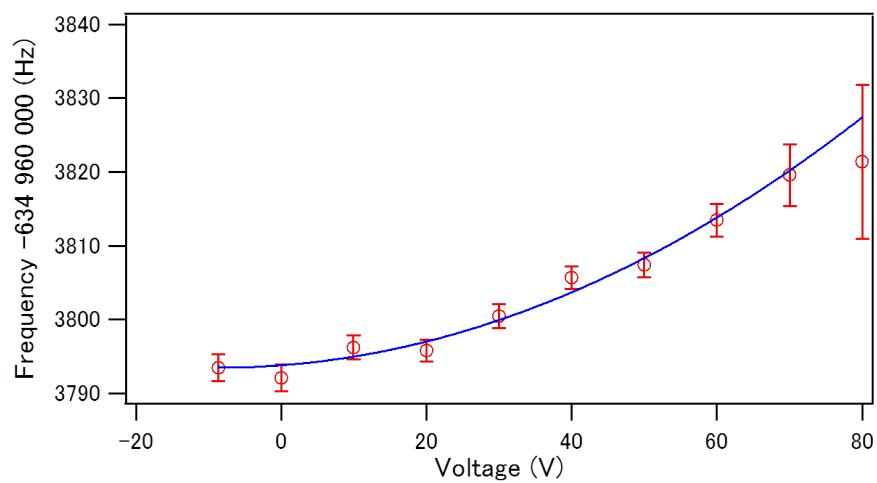


図 3.3.2  $X^1\Sigma^+, v=86$  の  $J=0, F_1=3/2, F=0$  から  $a^3\Sigma^+, v=16$  の  $J=0, F_1=1/2, F=0$  へのマイクロ波遷移のアンテナにかける電圧依存性

### 3.4 Collision shift

冷却原子集団の中の原子は周囲の原子密度に比例したエネルギーシフトを受けることが知られている [37]。これを衝突シフト (Collision shift) と呼ぶ。我々の系では生成した KRb 分子の周りに MOT によって集められた K,Rb 原子が存在している。この周囲の原子によって測定している分子のエネルギー準位がシフトしているかどうかを見るために、周囲に原子があるときとないときで周波数測定を行いその結果を比較した。図 3.4.1 は Rb 原子の吸収イメージング図であり、左が何もしないとき右が Rb 原子の共鳴光を当てた後の図である。K 原子も同様に吹き飛ばしている。

測定の結果

吹き飛ばしなし (原子による Collision shift あり) のとき  $634963783.753 \pm 0.152 \text{ Hz}$

吹き飛ばしあり (原子による Collision shift なし) のとき  $634963783.636 \pm 0.128 \text{ Hz}$

という結果が得られた。2つの周波数差は 117 mHz だがこれは測定の統計誤差よりも小さく、2つの結果の間に有意な差は見られなかった。今後の実験では常に周りの K,Rb 原子を吹き飛ばして測定を行い、原子による Collision shift をゼロにしている。分子同士の Collision shift は測定していないが、分子の密度は非常に小さいはずなので我々の測定においては無視できると考えている。



図 3.4.1 Rb 原子を吹き飛ばす前後の吸収イメージング図



### 3.5 系統誤差のまとめ

これまでの実験から本実験における系統誤差は表 3.5.1 のようになる。collision shift は無視できるほど小さいため表から外した。reference clock は我々が周波数標準として用いている Rb clock のスペックからくる誤差である。BBR shift は黒体輻射によるもので本研究で用いている真空チャンバーの温度は  $T=26.8 \pm 2.0$  °C になっておりこれからくるものである。10 mHz という値は [40] の遷移双極子モーメントをもとに元井上研究室助教の小林氏が計算してくれたものである。それぞれの系統誤差は独立なため、系統誤差の合計は全ての値の 2 乗和の平方根をとって 10 mHz となる。

表 3.5.1 系統誤差

	<b>Systematic</b>
Zeeman shift	0.6 mHz
Stark shift	1 mHz
Reference clock	2 mHz
BBR shift	10 mHz
<b>Total</b>	<b>10 mHz</b>



## 第 4 章

# 統計誤差の改善に向けた実験

### 4.1 Ti:Sa laser(Matisse) の使用

光会合 (Photoassociation,PA) によって作られる分子は入射光のパワー  $P$  に依存し、分子の生成レート  $K$  は  $P$  の関数として

$$K(P) = 4K_{\max} \frac{PP_{\text{sat}}}{(P + P_{\text{sat}})^2} \quad (4.1.1)$$

と書くことができる [38],[39]。グラフにすると図 4.1.1 のように書け、パワーが 0 から  $P_{\text{sat}}$  になるまでは  $K$  は増加していき、 $P_{\text{sat}}$  のときに最大値  $K_{\max}$  をとる。我々は今まで PA 光として ECDL の光を Tapered Amplifier で増幅した光を用いていて、そのパワーは 200 mW だった。これはまだ  $I_{\text{sat}}$  には届いていないだろうと考え PA 光の光源として Titanium: Sapphire Ring Laser の Matisse(Sirah,Spectra-Physics) を使用した。これによって最大で約 1W のパワーが得られるようになった。これを用いて PA 光のパワーに対する分子の信号依存性を測定すると、図 4.1.2 のようになった。式 4.1.1 によってフィッティングすると、 $K_{\max} = 137.9 \pm 7.4, P_{\text{sat}} = 954 \pm 185 \text{ mW}$  となった。測定点が少なくエラーバーが大きいが、 $K_{\max}$  に近い値のレートが得られていると考えられる。

Matisse を使用する以前は  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0 - a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$  間の遷移を 2200 点で測定したときは中心周波数の測定誤差は 0.5 Hz 程度であったが、Matisse の使用直後に同じ測定をしてみると信号が大きくなったため誤差が 0.24 Hz となり、S/N 比に大幅な改善が得られた。また、Matisse は周波数スイープが非常にしやすいという利点があり節 4.2 の新たな準位探しにおいて非常に役に立った。

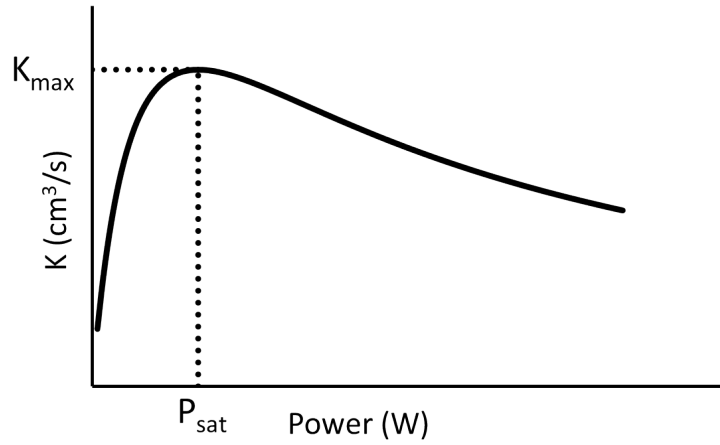
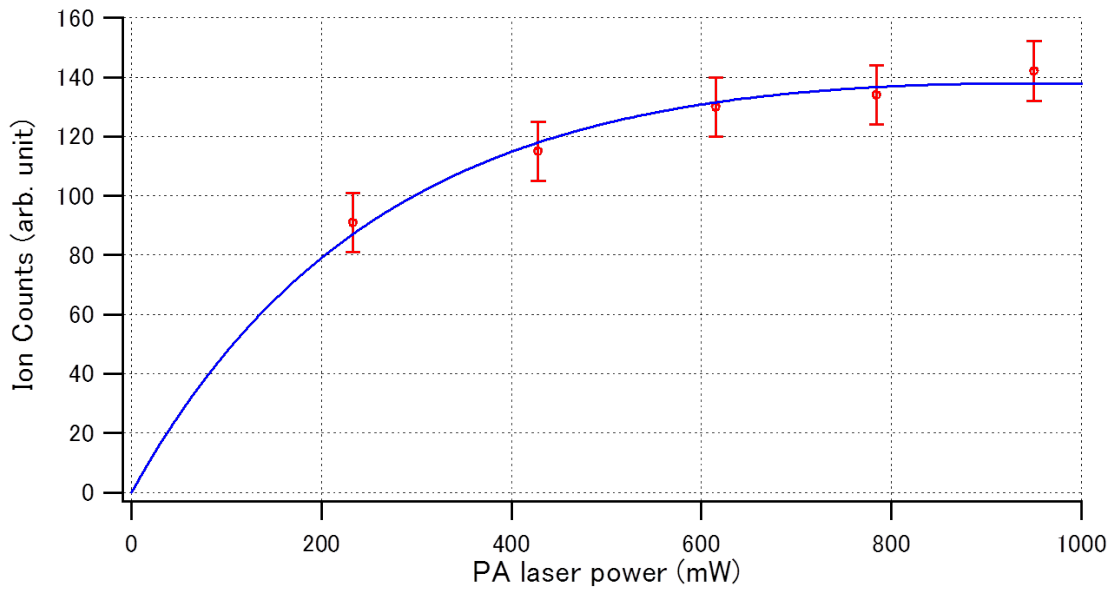
図 4.1.1 光会合レート  $K(P)$ 

図 4.1.2 PA による分子数の入射光パワー依存性

## 4.2 新たな準位探し

現在 PA には  $(3)0^+$  の振動準位を利用しているが、PA によって作られる分子は特定の準位に FCF が大きい方が良い。[30],[31] のポテンシャルを用いて計算してみると  $(5)0^+$  の振動準位は現在使っている準位よりも基底状態の準位と大きな FCF を持ち、PA 分子の量を増やすことができると期待された。この節ではその準位を探した実験について述べる。

### 4.2.1 $(5)0^+$

図 4.2.1 の赤い線で書かれたポテンシャルは今回新たな PA に使用する準位として期待された  $(5)0^+$  である。このポテンシャルは特殊な形をしていて、束縛状態を持つ井戸が 2 ヶ所ある。2 つの井戸のうち核間距離が小さい方の井戸を inner well、大きい方の井戸を outer well と呼ぶ。今回探索した準位は outer well のもつ準位である。outer well は計算だと  $v=0,1,2,3$  の 4 つの振動準位を持つ。

outer well はポテンシャルの幅が狭く、波動関数が局在するため、基底状態のポテンシャルの振動準位の外側の転回点と重なると FCF が大きくなる。そのため、この準位に分子を励起することができれば自然放出によってある特定の準位に多く分子が作られると考えられる。inner well も同様にポテンシャルの幅が狭いが、内側すぎるため基底状態のポテンシャルの外側の転回点と全く重ならない（むしろ内側の転回点と重なる）ため、FCF は大きくならない。

### $(5)0^+$ と基底状態のポテンシャルとの Franck-Condon Factor

$(5)0^+$  の outer well と基底状態のポテンシャル  $X^1\Sigma^+, a^3\Sigma^+$  との Franck-Condon Factor を計算した結果が図 4.2.2 と図 4.2.3 である。outer well の  $v'=0$  に着目すると、 $X^1\Sigma^+$  は  $v=86$ 、 $a^3\Sigma^+$  は  $v=17$  に 0.3 を越える大きな FCF を持っている。現在使っている  $(3)0^+$  の  $X^1\Sigma^+, v=91$  との FCF は 0.1 程度なので  $(5)0^+$  の outer well を利用した PA の方が多くの分子を作ることができると期待される。

### 4.2.2 PA 光のスweepによる $(5)0^+$ の準位探索

まず初めに PA 光の周波数をスweepすることで  $(5)0^+$  outer well のもつ準位を探した。実験の概要は図 4.2.4 のようになっており PA 光が共鳴すれば自然放出によって分子が基底状態まで遷移し、それがイオン化によって検出される。図 4.2.4 中の横にひかれた緑、青、赤の点線はそれぞれ K,Rb,KRb のイオン化に必要なエネルギーである。イオン化する基底状態の準位は  $(5)0^+, v'=0$  との FCF が大きく、イオン化周波数のわかっている

$a^3\Sigma^+, v=16$  を選んだ。PA によって分子がここに作られればイオン化され検出される。実験では PA 光の周波数は  $392.69\sim 399.019$  THz ( $13098.7\sim 13309.84$   $\text{cm}^{-1}$ ) の範囲をスイープした。その結果  $(5)0^+$  の outer well を見つけることができなかったが、 $(6)1$  や  $(2)2$  等の inner well の準位を 9 つ見つけた。

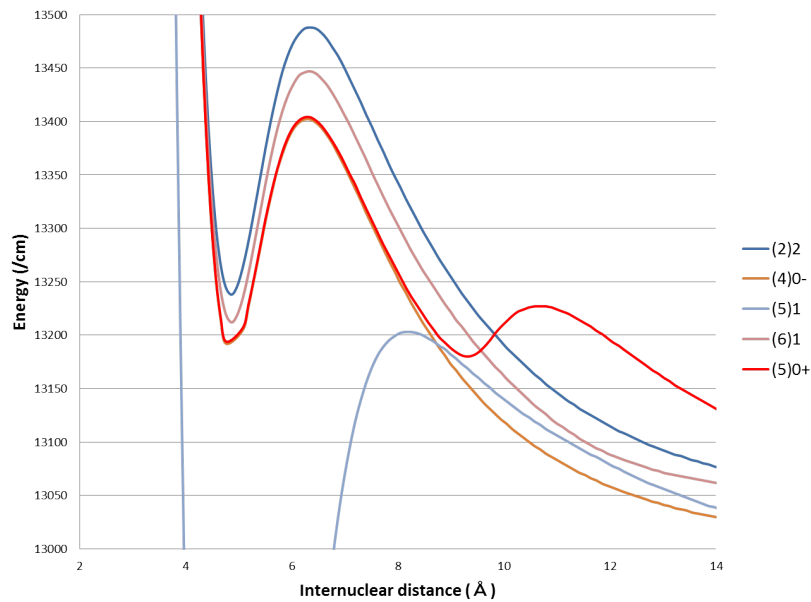


図 4.2.1  $(5)0^+$  とその付近のポテンシャル

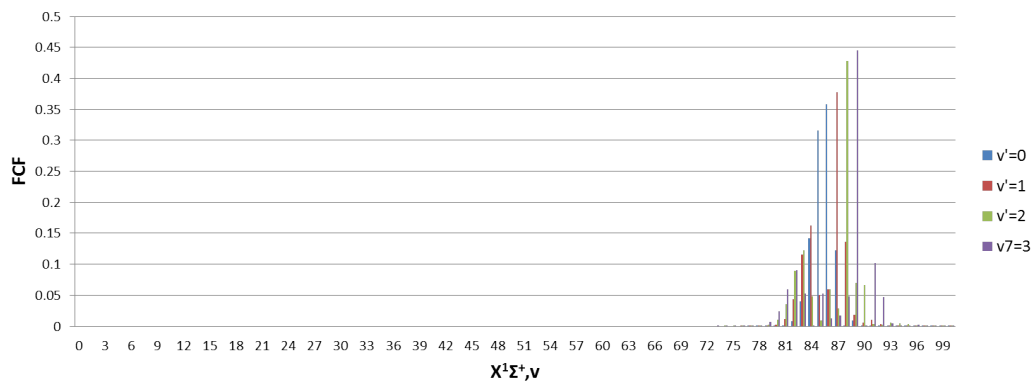


図 4.2.2  $(5)0^+$  outer well- $X^1\Sigma^+$  間の FCF

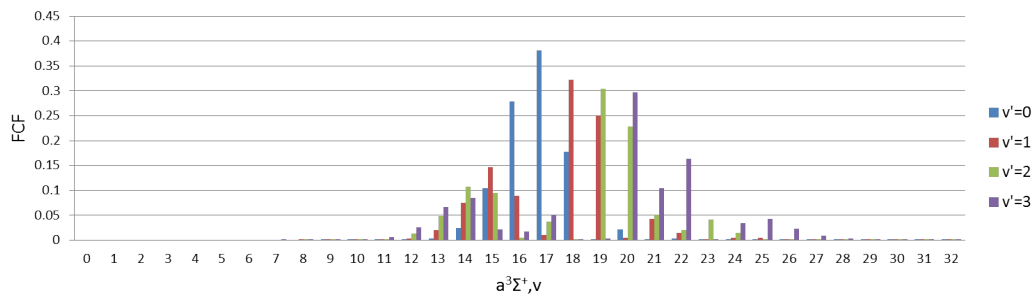


図 4.2.3 (5)0<sup>+</sup> outer well-a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup> 間の FCF

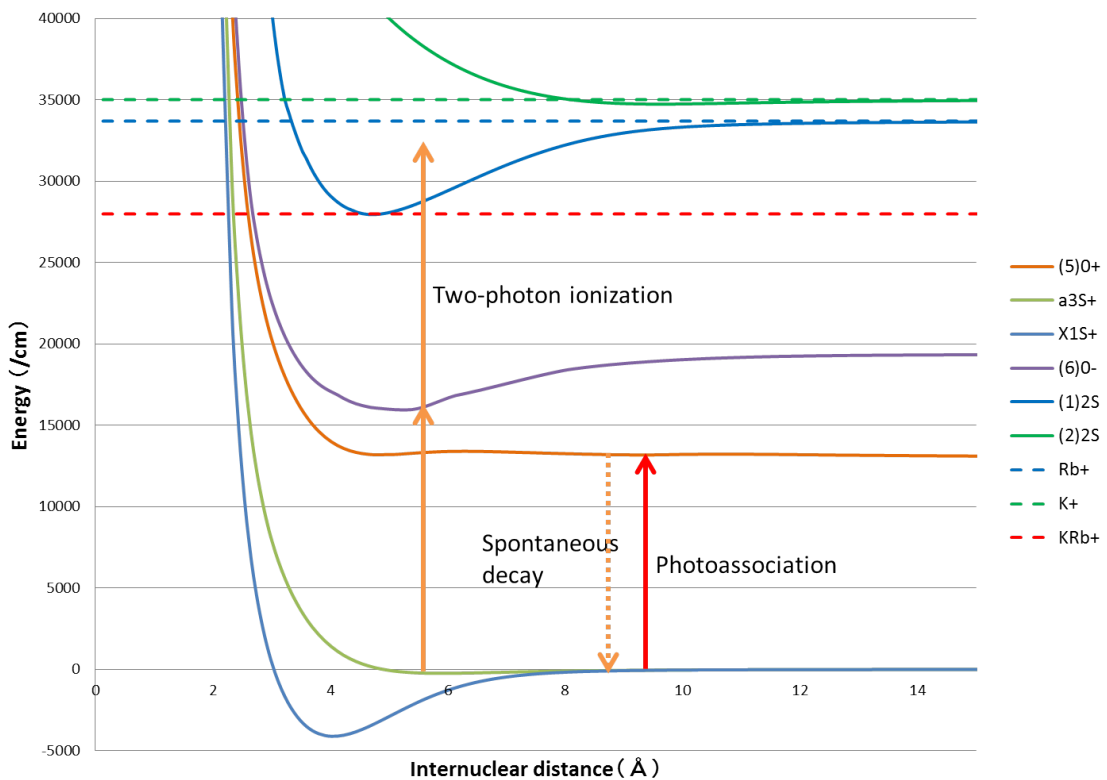


図 4.2.4 分光に使う準位の概略図。PA 光の周波数だけを変えて分光する。

### 分光結果

PA 光のスweepした範囲には (5)0<sup>+</sup> の inner well, outer well, (4)0<sup>-</sup>, (5)1, (6)1, (2)2 の振動準位が存在することが予想される。みつけた準位がどのポテンシャルの持つ振動準位なのかは回転準位の構造をみることで推測できる。回転のエネルギーは  $BJ(J+1)$  となっている。B は回転定数、J は節 2.1 で述べた全角運動量である。回転準位の間隔の比からその回転準位構造の J の最小値がわかる。J の最小値は電子ポテンシャルの  $\Omega$  の値であるため、回転準位の間隔を見ることで  $\Omega$  がいくつのポテンシャルの持つ振動準位かがわかる。また B も回転準位の間隔から求まる。分子が剛体だとすると換算質量  $m^*$ 、核間距離 R を用いて  $B = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2}$  と書けるので B の大きさから平均核間距離を見積もることができる。見つけた準位が何番目の振動準位であるかは、計算予想との比較で見積もるしかなく正確にはわからない。

以下、見つけた信号とどのポテンシャルかの割り当てを書いていく。

#### (6)1

PA 光をスweepしたときのイオン化信号が図 4.2.5。横軸は PA 光の周波数で縦軸が KRb 分子のイオン化信号の大きさである。信号が複数見えているのは回転準位が複数見えているからである。回転準位の構造から、見つけた準位のポテンシャルがどれかを推測する。図 4.2.5 の信号は間隔の比が 2:3:4:5 になっていて、ここからこの準位が  $\Omega=1$  のポテンシャルの準位だとわかる。また、最初の 2 つの信号の差は 3.03 GHz でありここから回転定数  $B=h \times 756 \text{ MHz}$  となる。回転定数から計算される平均核間距離は 4.9 Å であり、これは図 4.2.1 の (6)1 のポテンシャルの底の位置と概ね一致する。以上のように回転準位の構造から図 4.2.5 の信号は (6)1 のポテンシャルの持つ準位であることがわかる。計算されるエネルギーとの比較からこれは  $v'=0$  だと考えられる。

図 4.2.6 はもうひとつ見つけた (6)1 の準位である。1 つ目の 1 つ上の  $v'=1$  の準位だろう。

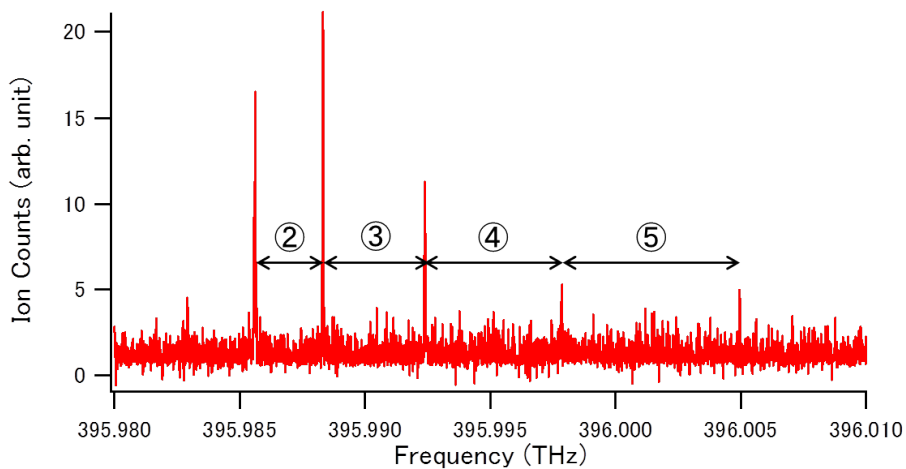
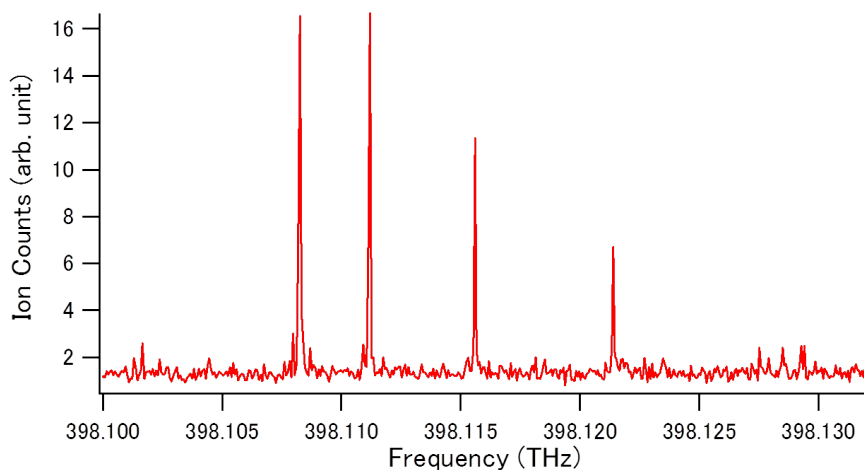
#### (2)2

図 4.2.7 は (2)2 の振動準位を見つけたときの信号である。hyperfine structure が大きく一つ一つの回転準位が分裂しているが、4 つの回転準位の信号が見えており、間隔の比が 3:4:5 になっている。ここから  $\Omega=2$  だとわかる。計算値との比較から  $v'=0$  と予想。

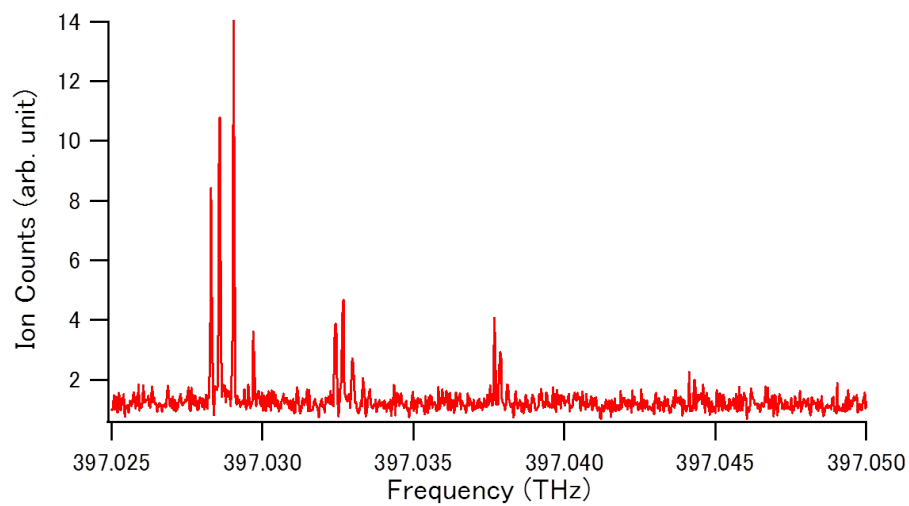
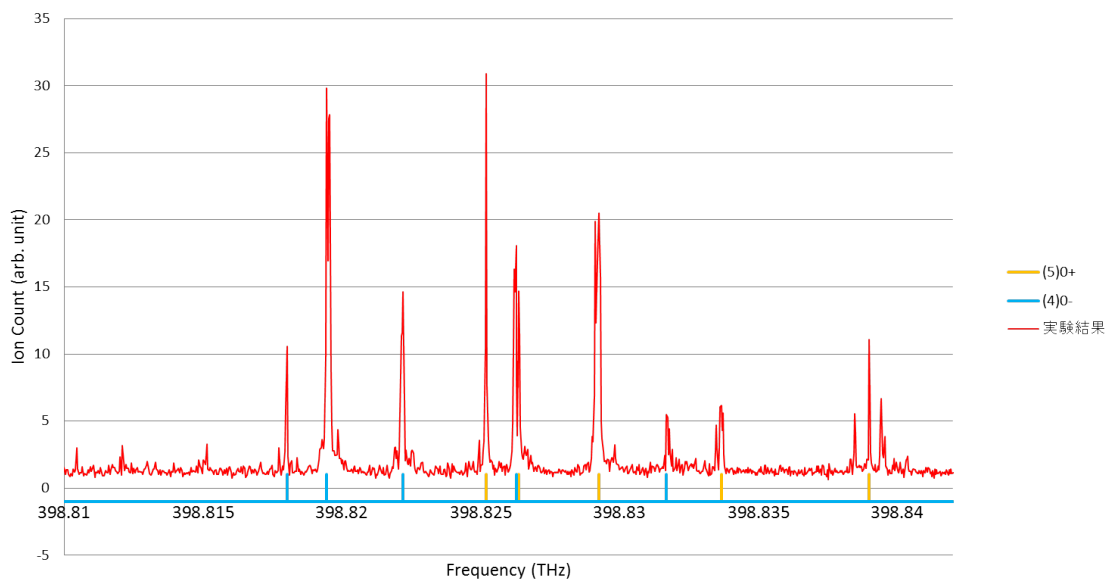
#### (5)0<sup>+</sup>(inner well), (4)0<sup>-</sup>

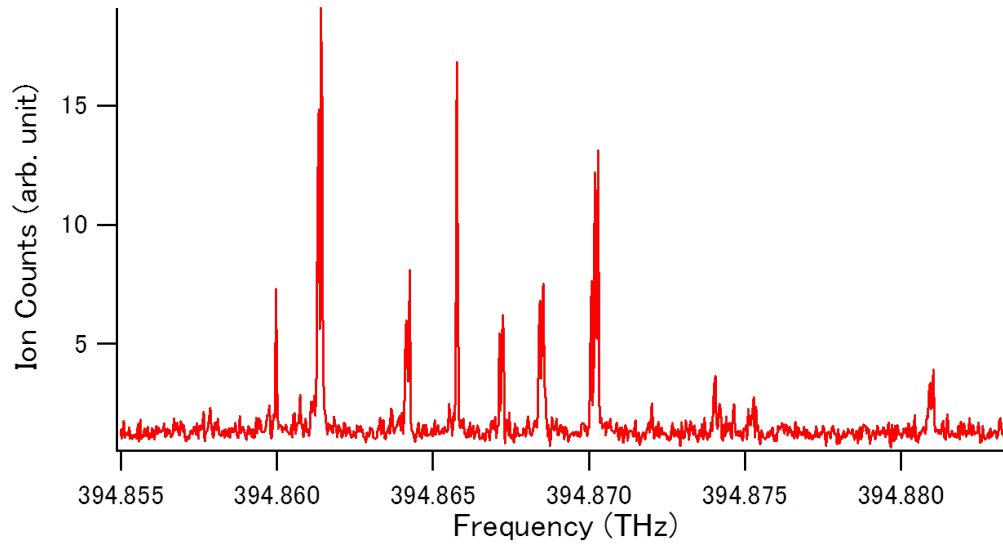
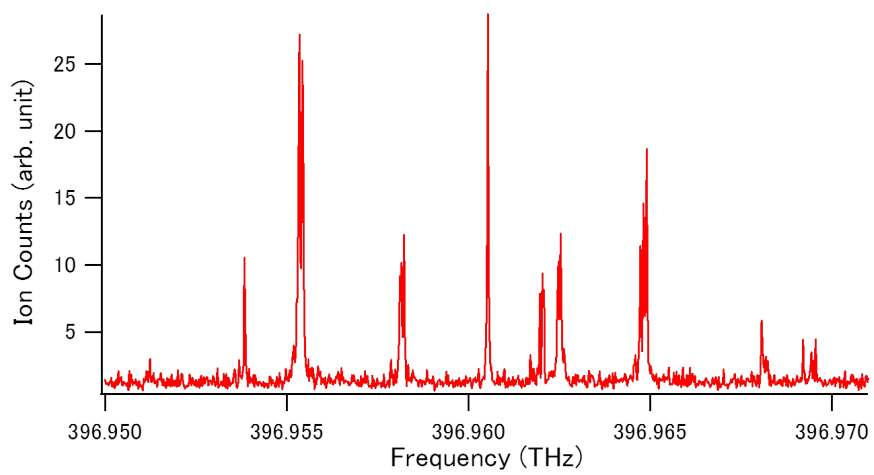
図 4.2.8 は (5)0<sup>+</sup>(inner well) と (4)0<sup>-</sup> の 2 つの振動準位が見えている信号である。1 つの振動準位によるものだとすると回転準位の説明がつかないため、2 つの準位がほぼ重



図 4.2.5 (6)1( $v'=0$ ) の回転構造図 4.2.6 (6)1( $v'=1$ ) の回転構造

なっていると計算によって予想される  $(5)0^+$ (inner well) と  $(4)0^-$  のものだろうと考えた。準位間隔が 1:2:3:4 になるものが 2 つあると考えてどの信号がどちらのものかを割り当ててみたものが図 4.2.8 の青と橙の線である。図には橙が  $(5)0^+$ , 青が  $(4)0^-$  と書いたが、これは計算値では  $(4)0^-$  の方がわずかにエネルギーが低いためこのように予想した。この信号から  $(5)0^+$  と  $(4)0^-$  の区別はつかないため逆かもしれない。図 4.2.9, 図 4.2.10 はそれぞれ  $v'=0,1$  の準位の信号である。

図 4.2.7 (2)2( $v'=0$ ) の回転構造図 4.2.8 (5)0<sup>+</sup>( $v'=2$ ), (4)0<sup>-</sup>( $v'=2$ ) の回転構造

図 4.2.9  $(5)0^+(v'=0), (4)0^-(v'=0)$  の回転構造図 4.2.10  $(5)0^+(v'=1)+, (4)0^-(v'=1)$  の回転構造

## 見つけた inner well の準位のまとめ

見つけた inner well の振動準位のエネルギーをまとめたものが表 4.2.1 である。単位は  $\text{cm}^{-1}$  で計算値と実験値を横に並べている。計算値に比べて振動準位間隔が 2 倍近く異なり、実際のポテンシャルは [30] のポテンシャルよりも inner well の幅が狭くなっている。

表 4.2.1 inner well の振動準位のエネルギー。単位は  $\text{cm}^{-1}$ 

v	(2)2		(5)0+		(4)0-		(6)1	
	計算値	実験値	計算値	実験値	計算値	実験値	計算値	実験値
0	13257.3	13243.5	13204.8	13171.3	13202.9	13171.1	13231.1	13208.7
1	13294.7		13240.7	13241.2	13238.8	13241.0	13267.7	13279.5
2	13330.4		13275.0	13303.4	13273.2	13303.1	13302.7	
3	13364.3		13307.4		13305.6		13335.9	
4	13396.2		13337.8		13335.9		13367.1	
5	13425.9		13365.2		13363.4		13395.9	
6	13452.8		13389.0		13387.1		13421.5	
7	13475.9		-		-		13442.2	

### 4.2.3 イオン化パルスのスイープによる分光

前節の PA 光のスイープによる分光では inner well の準位は見つかったが、見つけた  $(5)0^+$  の outer well の準位は見つけれなかった。次は、イオン化パルスをスイープすることで準位を探した。図 4.2.11 は分光の準位図である。まず、既知の PA によって  $a^3\Sigma^+, v=22$  に分子を作る。このとき  $v=22$  に最も多くの分子ができるが、その周りの  $v=21, 23$  などにも分子が作られる。そこにパルス色素レーザー（周波数可変）とパルス色素レーザーの励起光である 532nm パルスレーザーの一部を分けたもの（周波数固定）を当てる。色素パルスの周波数をスイープしていくと、分子の準位に周波数が合ったときにイオン化が起こりイオン化信号が表れる。色素パルスのみ 2 光子だと KRb 分子のイオン化エネルギーに届かないため、532nm のパルスを入れている。イオン化の過程において色素パルスが分子に当たる 1 光子目にするために 532nm パルスの光路を長くして色素パルスよりも遅く分子に当てている。図 4.2.12 は浜松ホトニクスフォトディテクタ (G4176-03) にパルスを当てたときの信号。532nm パルスが色素パルスに比べて 6ns 遅れている。

図 4.2.13 は分光結果のグラフ。13150~13450  $\text{cm}^{-1}$  に信号が見えた。信号の大きさが 20 を超えているものの内左から 6 つは前節で見つけた準位を使ったイオン化信号である。PA の周波数とイオン化の周波数が、分子の束縛エネルギー分ずれて一致している。その他の大きく見えている信号も inner well のより高い振動準位を使ったイオン化信号だと考えている。

イオン化信号の中に  $(5)0^+$  の outer well の振動準位を使った信号はないかと考えたときに、13220  $\text{cm}^{-1}$  あたりの信号に注目した。図 4.2.14 は図 4.2.13 の一部を拡大した図である。一番大きな信号は前節で見つけた  $(6)1, v'=0$  を使ってイオン化した信号である。PA で  $a^3\Sigma^+, v=22$  にできた分子のイオン化信号が大きく出ているが、PA では  $v=22$  以外の振動準位にも分子は作られるためそれらの分子が  $(6)1, v'=0$  を使ってイオン化された信号も周りを出ている。 $a^3\Sigma^+$  の振動準位の違いによって出る信号は  $a^3\Sigma^+$  の振動準位間隔で表れる。図 4.2.14 の赤い点は  $v=22$  を基準に  $a^3\Sigma^+$  の振動準位間隔でプロットされていて、 $(6)1, v'=0$  を使ったイオン化信号は赤い点の位置に出るはずである。しかしグラフ中に黒い矢印で示した信号は赤い点から外れた位置に出ている。よってこの信号は  $(6)1, v'=0$  を使ったものではなく  $(5)0^+$  の outer well を使ったイオン化信号なのではないかと考えた。

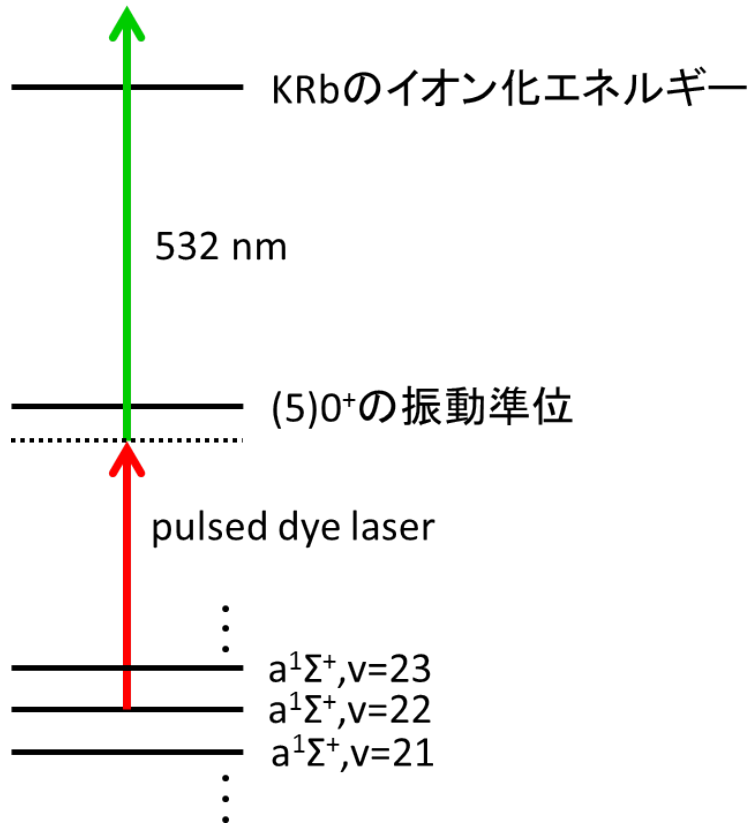


図 4.2.11 パルスをスイープするときの準位図

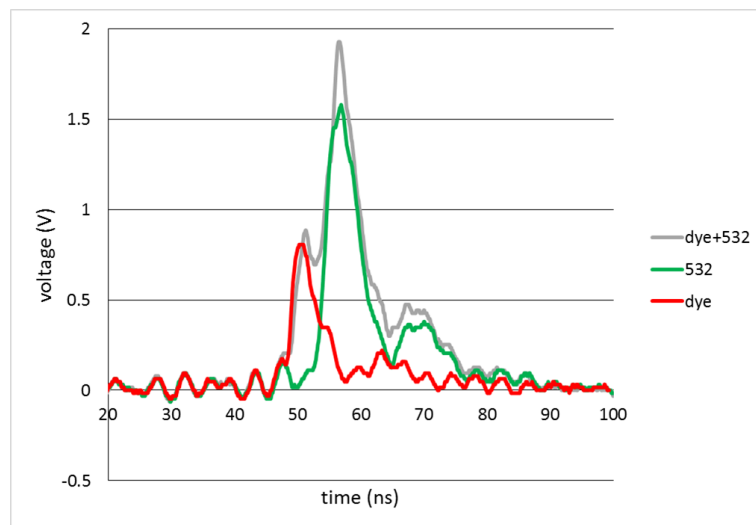


図 4.2.12 色素パルスと 532 パルスの時間差

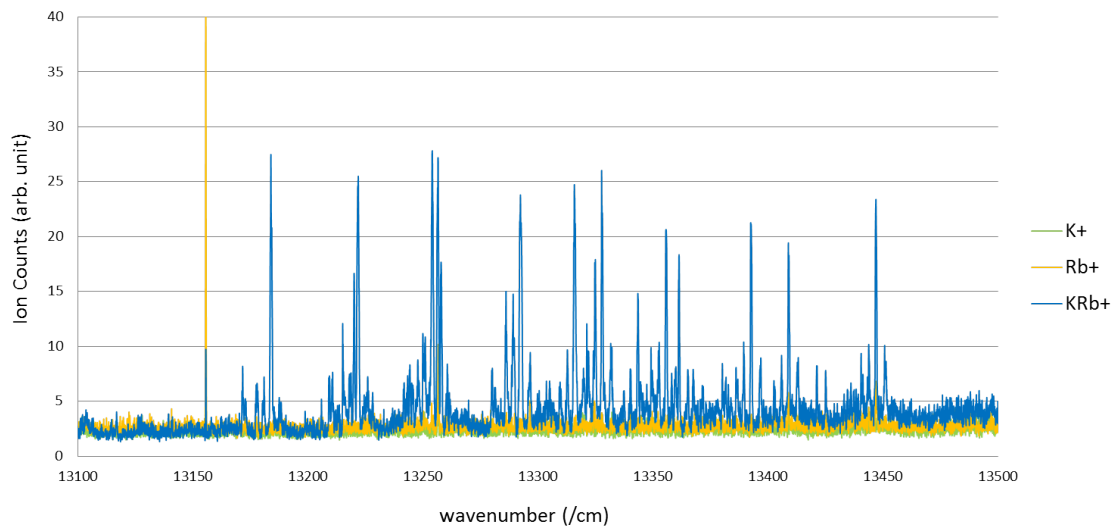


図 4.2.13 色素パルスをスイープしたときのイオン化信号

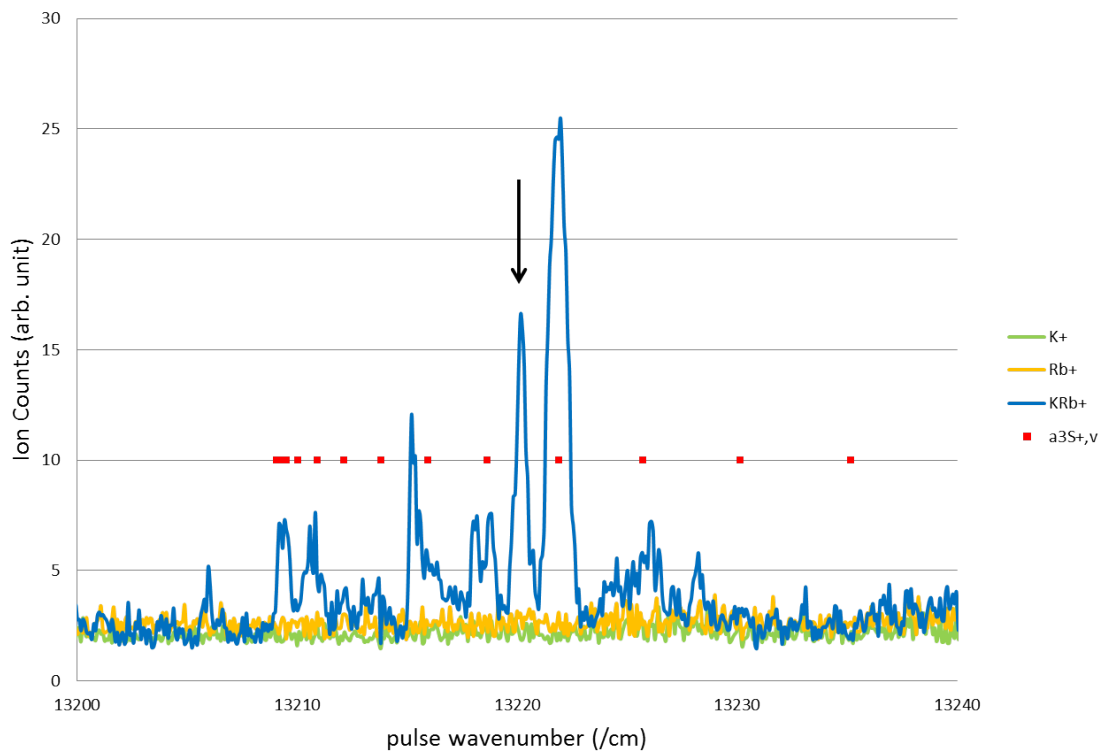


図 4.2.14 図 4.2.13 の 1 部を拡大した図。赤い点は inner well でのイオン化信号が出るはずの位置。

#### 4.2.4 (5)0<sup>+</sup>,outer well の分光

図 4.2.14 の黒い矢印で示した信号の周波数から、 $a^3\Sigma^+, v=22$  の束縛エネルギー分ずらした周波数のまわりで PA 光をスイープしてみたところ、図 4.2.15 のような信号が得られた。4 本信号が見えていて間隔の比が 1:2:3 となっているため。 $\Omega = 0$  のポテンシャルである。 $J=1$  の周波数は 395.9396 THz である。また、1 本目と 2 本目の間が 440 MHz 離れているから回転定数は  $B=h \times 220$  MHz である。ここから平均核間距離が 9.05 Å と求まる。これはこの準位のポテンシャルの底が 9.05 Å 付近にあるということであり、従って図 4.2.15 の信号は (5)0<sup>+</sup> の outer well を用いた PA によるものである。

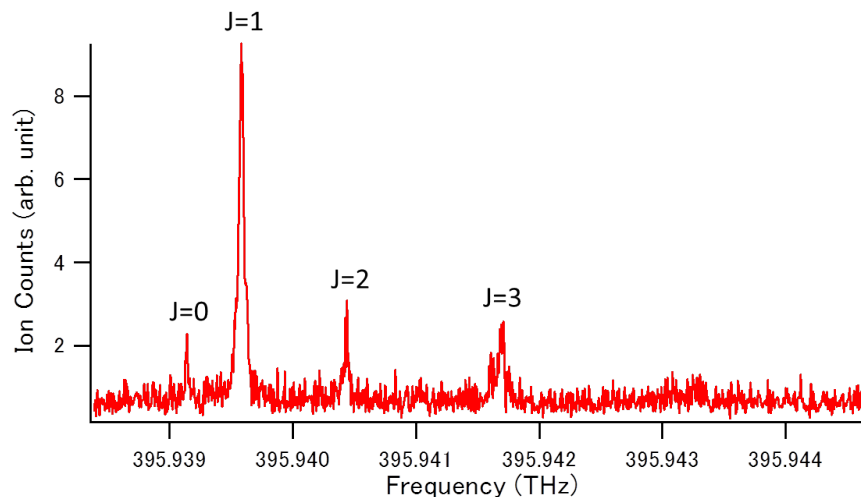


図 4.2.15 (5)0<sup>+</sup>,outer well での PA 信号

#### (5)0<sup>+</sup>,outer well での PA によって分子ができる準位

(5)0<sup>+</sup>,outer well の準位を見つけたため、ここで PA をしたときに基底状態のどこに分子が作られるかを見た。図 4.2.4 において PA 光は見つけた準位に固定し、(6)0<sup>-</sup> を使うイオン化付近でイオン化パルスの周波数をスイープした。その結果が図 4.2.16 の青いグラフである。赤いグラフは既知の (3)0<sup>+</sup> を使った PA のときのもの。青いグラフと見比べやすくするように 20 分の 1 に小さくしている。 $a^3\Sigma^+$  の振動準位間隔の信号が、(6)0<sup>-</sup> の振動準位間隔で周期的に表れている。プロットした点は、 $a^3\Sigma^+$  の特定の 1 つの振動準位からのイオン化信号が出る位置をプロットしたもの。このプロットと青い線を見比べると青いグラフの大きな信号は  $v=13$  の点の位置に出ていることがわかる。よって今回見つけた (5)0<sup>+</sup>,outer well での PA は  $a^3\Sigma^+, v=13$  に多くの分子を作る。 $X^1\Sigma^+$  に対しても同様の分光



を行ったが、信号は検出できなかった。 $X^1\Sigma^+$ の方にはほとんど分子は作られない。今回見つけた準位によるPAでのイオン化信号の大きさは $(3)0^+$ でのPAに比べて非常に小さく、当初の目的のより多くのPA分子を作るということは達成できなかった。ポテンシャルの形からFCFはある程度大きいと考えられるため、分子数が少なかった理由は恐らく原子状態から $(5)0^+$ の振動準位への遷移が起こりづらいからだろう。

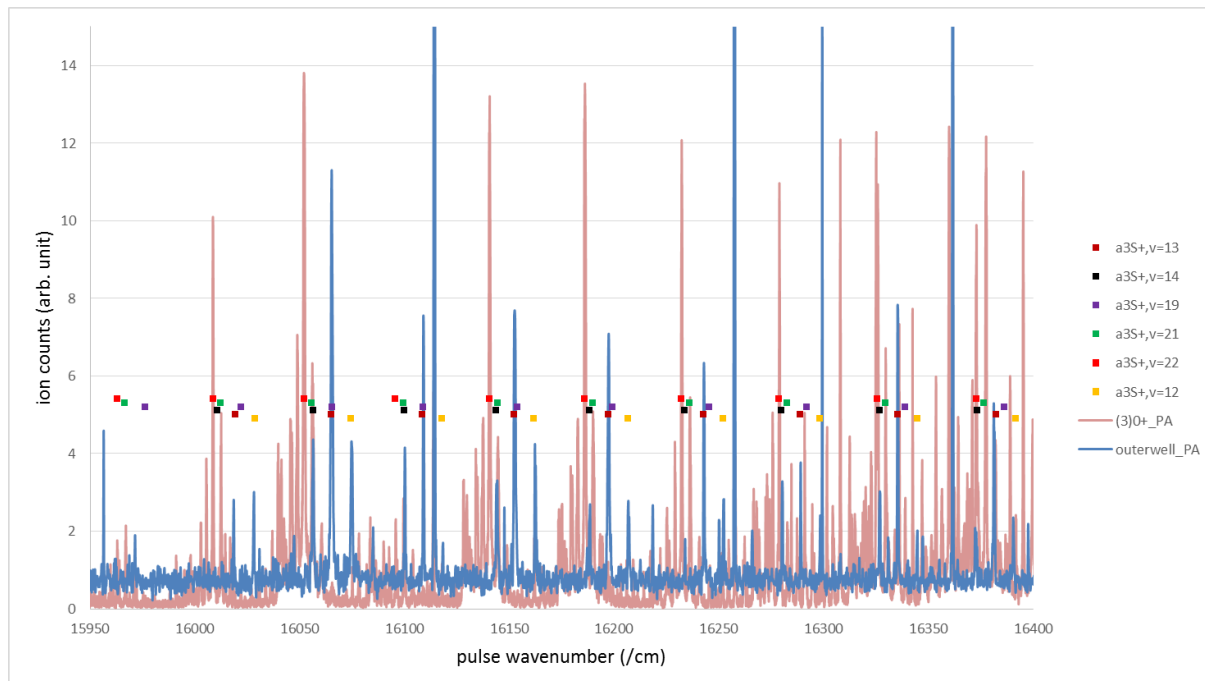


図 4.2.16  $(5)0^+$ ,outer well での PA した分子のイオン化信号

### 4.2.5 他の振動準位の探索

(5)0<sup>+</sup> の outer well は計算だと 4 つの振動準位を持つことが予想される。そのうちのどれか 1 つを見つけたので他の振動準位も探した。

#### 見つけた準位は何番目の振動準位なのかの考察

今回見つけた準位が (5)0<sup>+</sup> の outer well の何番目の振動準位なのかを考える。図 4.2.17 は a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup>, (5)0<sup>+</sup> のポテンシャルと LEVEL[33] によって計算した、ポテンシャルのもつ振動準位の波動関数を書いた図である。実験から得られた平均核間距離 9.05 Å に縦に点線を引いてある。図 4.2.18 は (5)0<sup>+</sup> と a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup> の各振動準位間の FCF を LEVEL によって計算したものである。横軸に a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup> の振動量子数を取り、それぞれに対して (5)0<sup>+</sup> の 4 つの振動準位との FCF を棒グラフで書いている。理論計算によるポテンシャル [30] では (5)0<sup>+</sup> の outer well の底は 9.3 Å にあるが今回見つけた準位は平均核間距離が 9.05 Å と求まった。そのため [30] のものを底が 9.05 Å にくるように半径方向に平行移動したものを使って波動関数と FCF を計算している。

今回見つけた準位による PA では a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup>, v=13 に多くの分子が作られている。図 4.2.17 の a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup>, v=13 の波動関数を見ると外側の大きな腹が 9.05 Å よりも内側にあることがわかる。もしも見つけた準位が v'=0 だとすると 9.05 Å に波動関数の大きな腹を持ち FCF が大きい a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup>, v=16 に多くの分子ができてはいるはずである。よって見つけた準位は v'=0 ではなく v'=1,2,3 のどれかだろう。FCF の値が a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup>, v=13 に最も大きいのは v'=2 であるため v'=2 を見つけた可能性が高い。

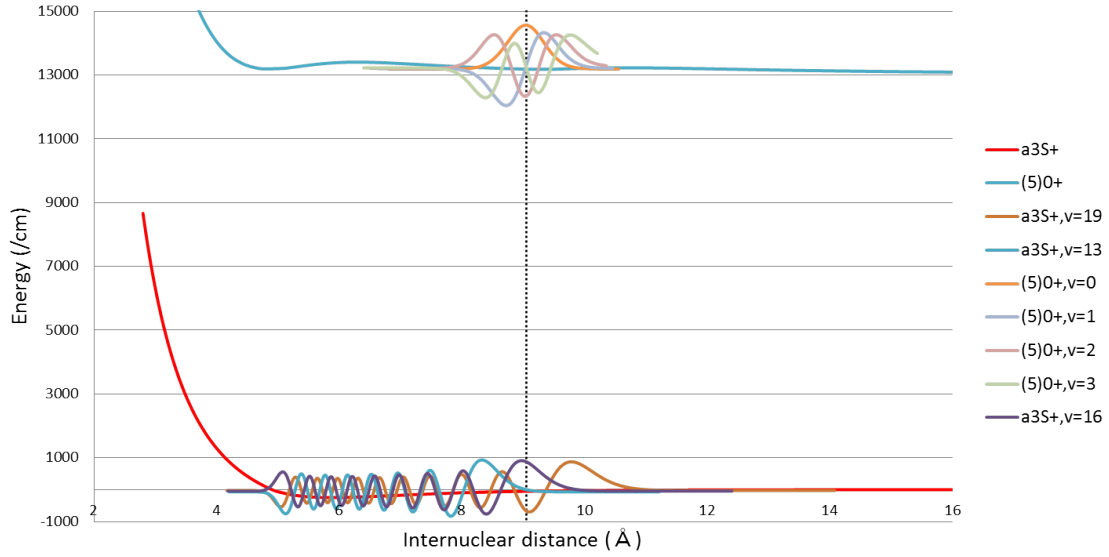


図 4.2.17 (5)0<sup>+</sup>, outer well と a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup> のいくつかの振動準位の波動関数

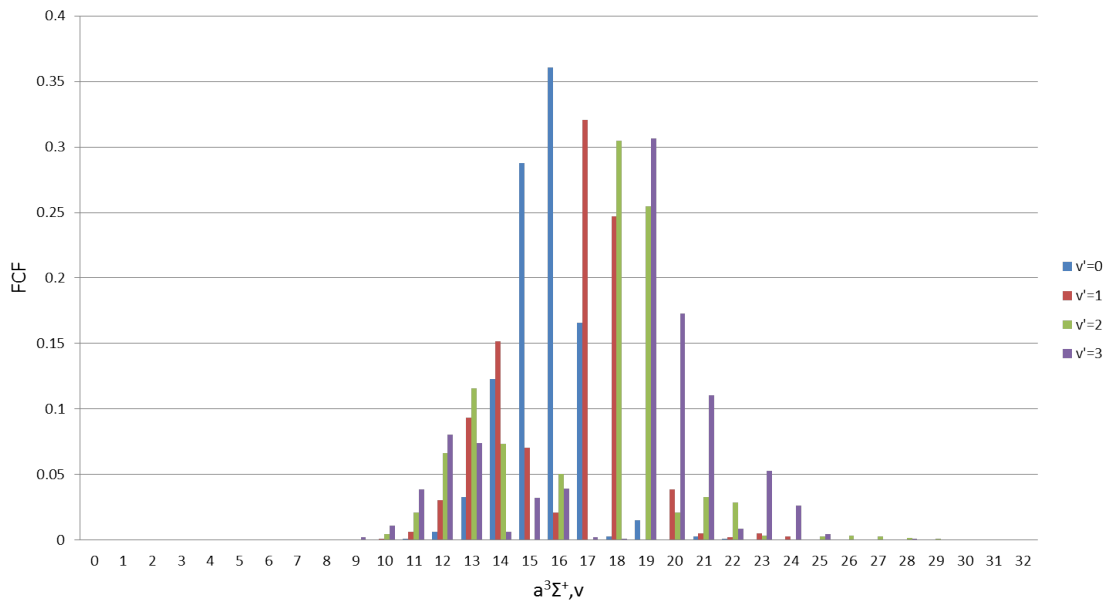


図 4.2.18 (5)0<sup>+</sup>, outer well と a<sup>3</sup>Σ<sup>+</sup> の各振動準位間の FCF

### 他の振動準位を探すための分光

見つけた準位が  $v'=0$  ではないと考えたため、下にある準位を探した。どこに多く分子が作られるが正確にわからないため  $a^3\Sigma^+$  のイオン化する周波数をいくつか変えながら PA 光の周波数をスイープした。計算だと  $(5)0^+, \text{outer well}$  の振動準位間隔は 300~400 MHz と予想されるためその辺りを重点的に探した。図 4.2.19 はスイープした範囲を表した図である。縦軸にイオン化した  $a^3\Sigma^+$  の振動準位、横軸に PA 光の周波数を取っていて、線が引いてある範囲がスイープした範囲である。 $a^3\Sigma^+, v=13$  に 2 色の線が引いてあるのは、イオン化の中間準位として使ったものが異なるものを分けて書いたからである。縦に引いた赤線は見つけた準位の周波数である。このような範囲を探したが他の振動準位を見つけることはできなかった。

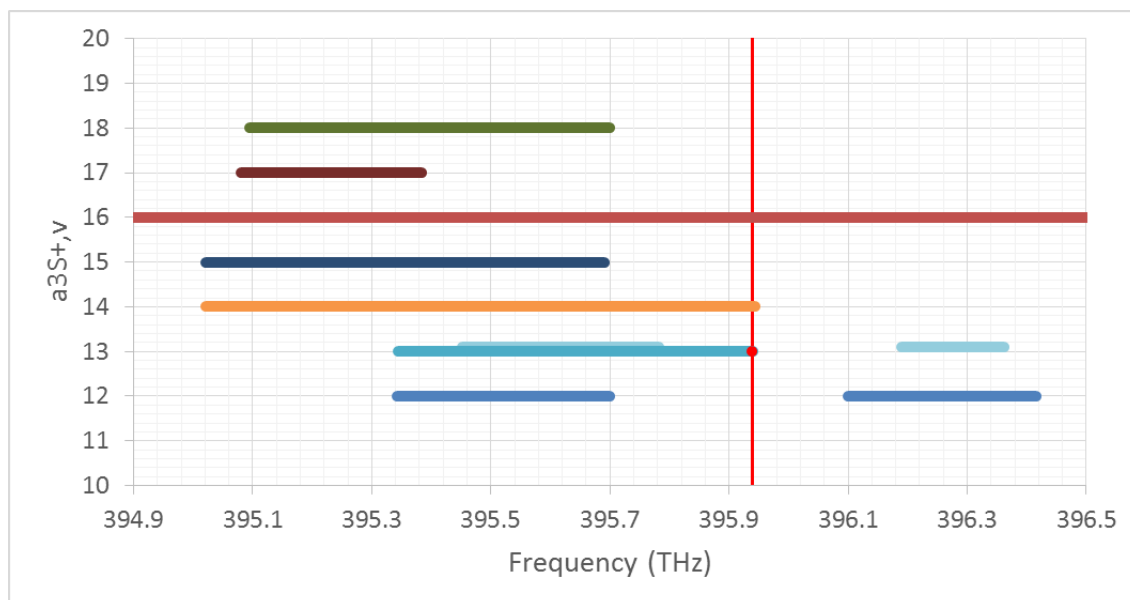


図 4.2.19  $(5)0^+, \text{outer well}$  の探索で PA 光をスイープした範囲。

### トンネル効果による寿命

$(5)0^+$  の outer well の 4 つの振動準位にある分子がトンネル効果によって壊れる時定数を計算した。計算の詳細は付録にある。振動エネルギーは LEVEL による計算値を用いた。図 4.2.20 において核間距離が長くなる方向へのトンネリングのみを計算している。 $v=1,2,3$  は内側へのトンネリングも考えられるが外側に比べてはるかに小さいため無視した。計算結果は表 4.2.2 のようになった。 $v'=3$  は寿命が非常に短いためここで PA することはできないだろう。

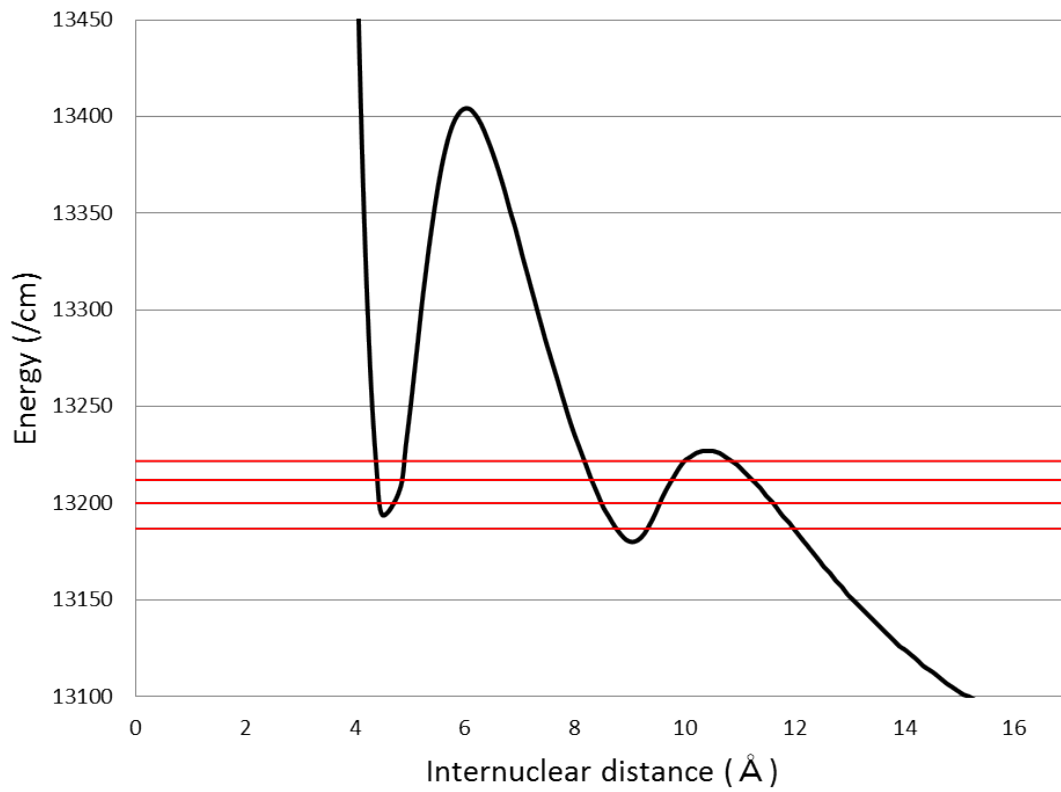


図 4.2.20  $(5)0^+$ , outer well の振動準位。赤線が outer well の各振動準位のエネルギー。

表 4.2.2 各振動準位のトンネル効果の時定数

$v$	寿命 $\tau$ (s)
3	$1.09 \times 10^{-10}$
2	$2.07 \times 10^{-7}$
1	$2.71 \times 10^{-3}$
0	$2.4 \times 10^2$



## 第 5 章

# 電子陽子質量比の時間変化の検証

この章では本研究のテーマである KRb 分子の遷移周波数測定による電子陽子質量比  $\mu$  の時間変化の検証実験の結果について述べる。

### 5.1 データの解析方法

測定方法は節 3.2 と同じで  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$  から  $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1$  の  $m_F = 0$  への遷移と  $m_F = 1$  への遷移を 2.5 s 毎に交互に見るというものである。 $m_F = 1$  への遷移と  $m_F = 0$  への遷移を十分に分離できるように  $m_F = 1$  への遷移が 7kHz 程度の Zeeman shift を受けるような磁場をかけている。このような状況で測定を続けていく。図 5.1.1 はそのようにして得られた  $m_F = 0$  への遷移の信号をまとめてプロットしたものである。このときマイクロ波の長さは 16 ms で測定を行っていてその逆数の 62.5 Hz 程度の線幅の信号が得られる。これをガウシアンフィットし、中止周波数の誤差が 100 mHz 程度になるまで測定を続ける。統計誤差はデータ数の平方根に反比例して小さくなっていき、本研究においては 6~10 時間程度測定を続けると 100 mHz 程度になる。

図 5.1.2、図 5.1.3 は 2014 年 2 月 26 日の  $m_F = 0, 1$  測定結果を示したものである。測定点を  $m_F = 0$  は 2200 点  $m_F = 1$  は 2100 点毎に分割して gaussian fitting し、中心周波数とエラーバーを求めたものをプロットしている。図 5.1.2 を傾き 0 の直線で fitting すると  $634963783.458 \pm 0.093$  Hz となるがこれは Zeeman shift を受けた値である。図 5.1.3 を見るとわかるように、実験を数時間続けている間に磁場が変化するため全ての測定点を同時に fitting してしまうと正確な周波数が読み取れなくなってしまう。そのため測定点を分割してそれぞれの点で fitting をした。節 3.2 の測定によって  $m_F = 0, 1$  の間の Zeeman shift の関係は分かっているため、図 5.1.3 の周波数から、図 5.1.2 の周波数を補正して磁場 0 の時の  $m_F = 0$  への遷移周波数に直したものが図 5.1.4 である。このグラフを傾き 0

の直線でフィッティングすることでこの日の測定から得られた  $m_F = 0$  への遷移周波数は  $634963781.564 \pm 0.094$  Hz となる。

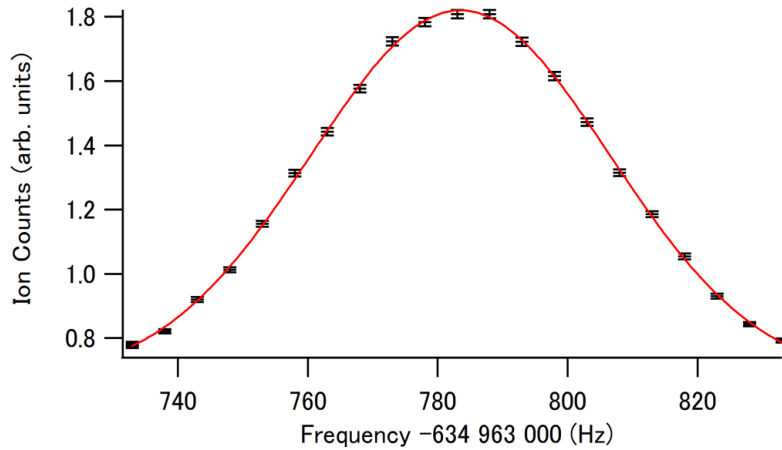


図 5.1.1  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$  から  
 $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$  への遷移の信号

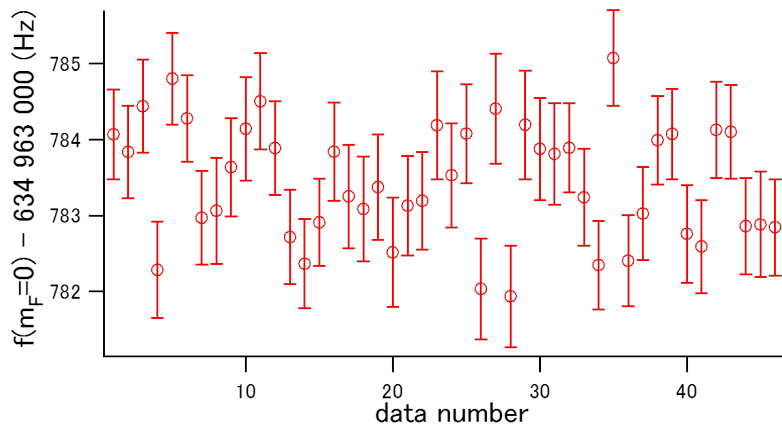


図 5.1.2 2014/12/10 の  $m_F = 0$  への遷移周波数の測定結果



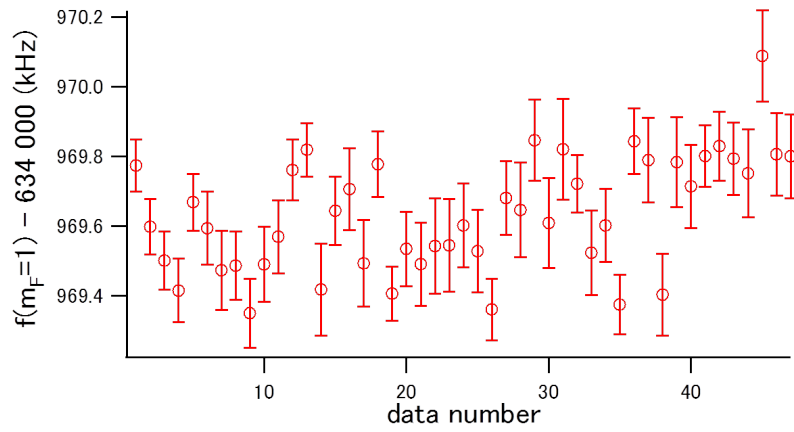
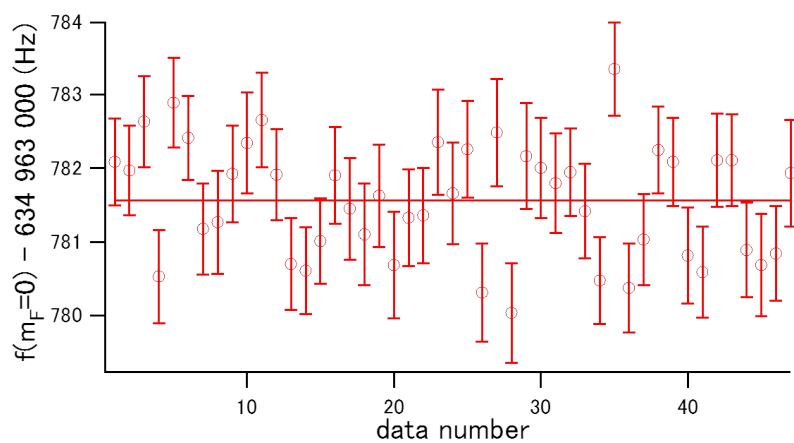
図 5.1.3 2014/12/10 の  $m_F = 1$  への遷移周波数の測定結果

図 5.1.4 図 5.1.2 を図 5.1.3 を用いて磁場 0 のときの値に直したグラフ

## 5.2 電子陽子質量比の時間変化

以上のような測定を2013年8月26日から2014年12月10日まで計7回行っており、遷移周波数が時間変化しているかどうかをみることで電子陽子質量比  $\mu$  が時間変化しているかどうかを見ていることとなる。横軸を日付、縦軸を遷移周波数でプロットしたものが図5.2.2である。Ti:Sa レーザーをPA光として使い始めたのは2014年の4月であり、2014年12月10日のデータは統計誤差がもっと小さくなることが期待された。しかしこのとき原子源の dispenser から出てくる原子が減ってきてしまっていて MOT によって集まる原子が少なくなっていた。そのためPA光の強度上昇による分子作成効率の上昇と MOT の原子数減少による分子作成効率の低下がキャンセルしてしまい、Ti:Sa レーザーを使い始める前と同等の統計誤差しか得られなかった。

このグラフを直線でフィッティングすることで、遷移周波数の時間変化の傾きは  $(-7.8 \pm 25.9) \times 10^{-5}$  Hz/day

という結果が得られる。これを節2.1で述べた増幅率を用いて  $\mu$  の変化に書き直すと、

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = (0.30 \pm 1.00_{\text{stat}}) \times 10^{-14} \text{ /year}$$

となる。ここに系統誤差のエラーを追加するのだが一度の測定の系統誤差は節3.5より10 mHzである。系統誤差が傾きに最も変化を与えるのは図5.2.1の赤い線のように測定の最初と最後の点で反対向きに変位している場合であり、これが系統誤差が傾きに与える誤差となる。つまり、2013年8月26日の最初の点で+10 mHz、2014年12月10日の最後の点で-10 mHzの変位を持つ場合とその逆の時が傾きの誤差が最大の時となり、それは傾き  $0.30 \times 10^{-14}$  /year に対して  $\pm 0.16 \times 10^{-14}$  /year となる。

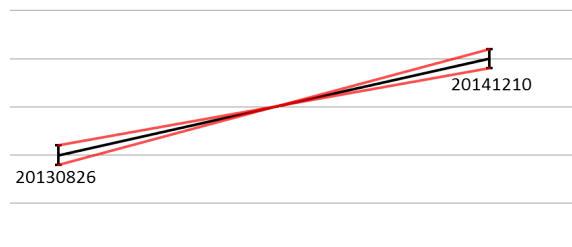


図5.2.1 系統誤差が傾きに与える誤差。黒い線が測定から得られた傾き。両端に系統誤差の大きさのエラーバーをつけて線を引いている。

以上の系統誤差を含めることにより  $\mu$  の時間変化の測定結果は、

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = (0.30 \pm 1.00_{\text{stat}} \pm 0.16_{\text{sys}}) \times 10^{-14} / \text{year}$$

となる。これが本研究の  $\mu$  の時間変化の検証の結果となる。

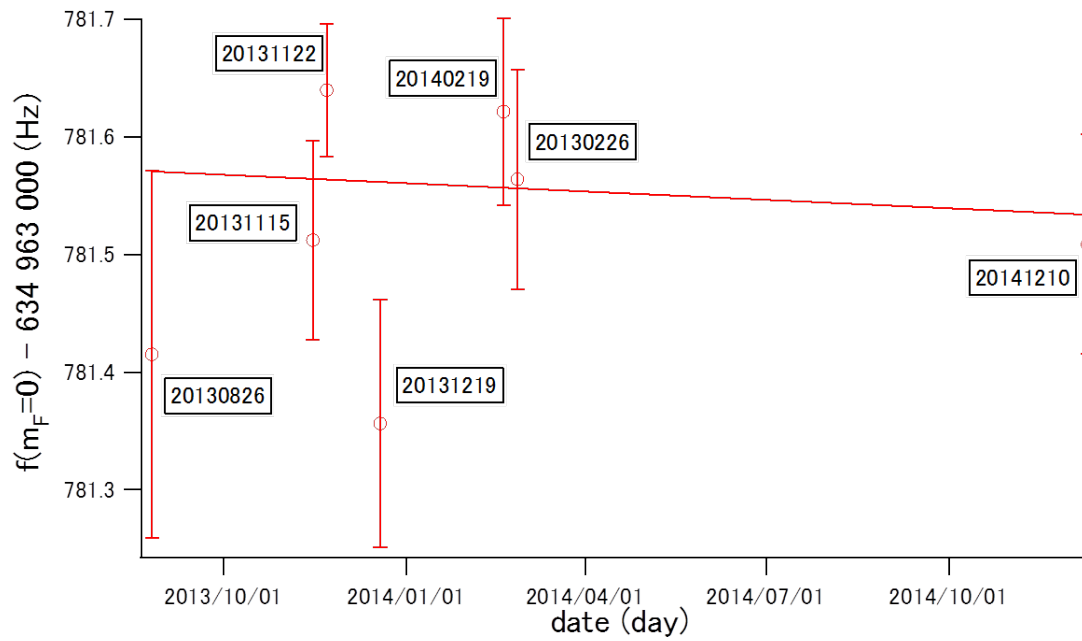


図 5.2.2  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$  から  
 $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$  への遷移周波数の測定結果



## 第 6 章

# まとめと展望

本研究では先行研究 [25] によって電子陽子質量比の変化に敏感だとわかった  $X^1\Sigma^+, v = 86, F_1 = 3/2, F = 0, m_F = 0$ - $a^3\Sigma^+, v = 16, F_1 = 1/2, F = 1, m_F = 0$  間の遷移周波数を可能なかぎり正確に測定することを目的としていた。系統誤差に関しては、チャンバー内に磁場、電場をかけてそのときの周波数変化を評価することで磁場、電場による系統誤差をそれぞれ 0.6 mHz、1 mHz まで小さくした。また、信号を大きくすることで S/N 比を良くして統計誤差を小さくするために、PA 光に Ti:Sa レーザーを用いることとより多くの分子を作ることのできる準位を探した。Ti:Sa レーザーによって分子数が 2 倍になり信号が大きくなったが時間経過による dispenser からの原子供給の減少とキャンセルしてしまった。PA によってより多くの分子を作ると期待された  $(5)0^+$  の outer well のもつ振動準位を探した結果、そのうちの 1 つをみつけた。しかしその準位を使った PA では期待された分子数の上昇は得られなかった。

2013 年 8 月 26 日から周波数測定を続けることで電子陽子質量比  $\mu$  の時間変化に関して

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = (0.30 \pm 1.00_{stat} \pm 0.16_{sys}) \times 10^{-14} / \text{year}$$

という精度の測定を行い、 $\mu$  は今回の測定精度において変化していないという結果となった。これは現在分子を使った測定で最も精度のよい  $\frac{1}{(m_p/m_e)} \frac{\partial}{\partial t}(m_p/m_e) = (-3.8 \pm 5.6) \times 10^{-14} \text{ yr}^{-1}$  [19] よりも精度のよい測定である。

今回の実験では我々の測定のリミットは統計誤差から来ている。これは信号の S/N 比の悪さによるものでこれを改善すればさらに良い精度が出せる。今回、dispenser からの原子数減少により信号が小さくなってしまいうことが起こっているため、dispenser を交換及び複数中に入れておくなどして dispenser が長持ちするようにして信号が大きい状態を維持することが重要だろう。1 日の測定では 6 時間程度測定を続けるが、これまでは統計誤差が 100mHz 程度となっていたが Ti:Sa レーザーを使い始めた直後の dispenser が劣化していない時に測定をおこなっていただければ同じ時間の測定で 40mHz 程度の統計誤

差になっていたはずである。また、統計誤差は測定点の数  $N$  を増やせば  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  に比例して減っていく。現在 6 時間程度の測定となっているがレーザーの周波数ロックがより安定する ECDL を作るなどをすれば 24 時間の測定なども可能になるだろう。

## 付録 A

# WKB 近似

分子のポテンシャルの振動準位を計算する際に **WKB 近似** という手法が使われる。この節ではこれについて述べる。この節の内容は [28],[41] に基づいている。

ポテンシャル  $V(\mathbf{r}, t)$  の中を運動する質量  $m$  の粒子の **Schrödinger 方程式** は

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.1})$$

である。分子のポテンシャルは時間に依存せず波動関数は振動準位のエネルギー  $E$  の固有関数である。また核間距離のみの関数であるため 1 次元の場合を考えればよい。このとき波動関数は

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) u(x) \quad (\text{A.2})$$

$$u(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \quad (\text{A.3})$$

という形に書ける。これを式 (A.1) に代入して

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS(x)}{dx}\right)^2 - i\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 S(x)}{dx^2} - (E - V(x)) = 0 \quad (\text{A.4})$$

が得られる。ここで関数  $S(x)$  を換算プランク定数  $\hbar$  でべき級数展開する。**WKB 近似** とは  $S(x)$  を  $S_0 + \hbar S_1$  とする近似である。

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots \quad (\text{A.5})$$

これを式 (A.4) に代入して  $\hbar$  の同じべきの項が等しいとすると、

$$\hbar \text{の } 0 \text{ 次} : S_0' - 2m(E - V(x)) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\hbar \text{の } 1 \text{ 次} : 2S_0' S_1' - iS_0'' = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\hbar \text{の } 2 \text{ 次} : 2S_0' S_2' + S_1'^2 - iS_1'' = 0 \quad (\text{A.8})$$

⋮

などの方程式が得られる。 $\frac{dS}{dx}$  を  $S'$ 、 $\frac{d^2S}{dx^2}$  を  $S''$  と書いた。

図 A.1 において  $E = V(x)$  となる点  $x = x_1, x_2$  のことを転回点と言う。まずは転回点  $x_1$

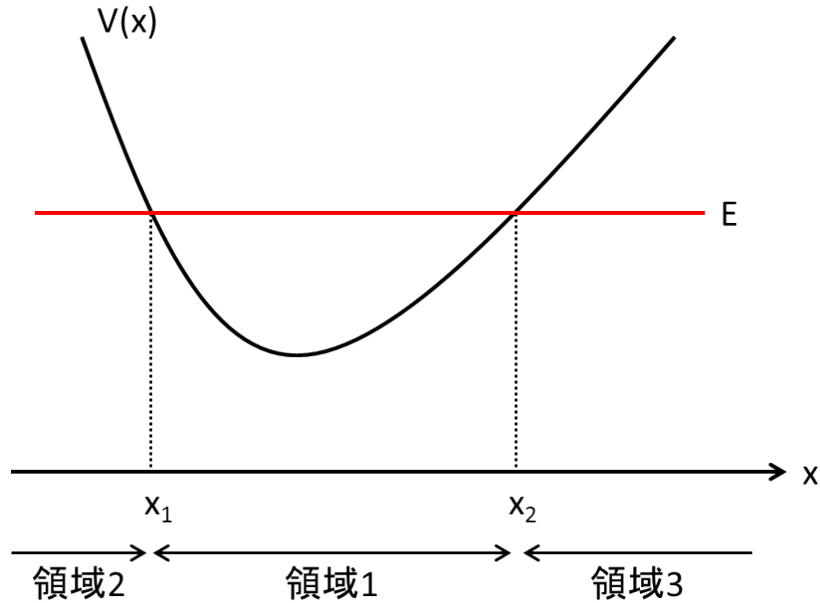


図 A.1 ポテンシャルの例。転回点は  $x_1, x_2, x_3$

のまわりについて考える。 $V(x)$  と  $E$  の大小関係によって場合分けをして解を求める。

- $V(x) < E$  のとき (領域 1)

局所的な波数  $k(x)$  を以下のように定義する。

$$k(x) = \frac{\sqrt{2m(E - V(x))}}{\hbar} \quad (\text{A.9})$$

これを用いて式 (A.6), (A.7) を解くと、

$$S_0 = \pm \hbar \int_{x_1}^x dx' k(x') \quad (\text{A.10})$$

$$S_1 = \frac{1}{2} i \ln k(x) \quad (\text{A.11})$$

となり、

$$S(x) = \pm \hbar \int_{x_1}^x dx' k(x') + \frac{1}{2} i \hbar \ln k(x) \quad (\text{A.12})$$

となる。これを式 (A.3) に代入し、また

$$\eta(x, x_1) = \int_x^{x_1} dx' \frac{\sqrt{2m|E - V(x)|}}{\hbar} \quad (\text{A.13})$$



という関数を定義することで、領域 1 の波動関数  $u_1(x)$  は

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{A_1^+}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(i \int_{x_1}^x dx' k(x')\right) + \frac{A_1^-}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-i \int_{x_1}^x dx' k(x')\right) \\ &= \frac{A_1^+}{\sqrt{k(x)}} \exp(-i\eta(x, x_1)) + \frac{A_1^-}{\sqrt{k(x)}} \exp(i\eta(x, x_1)) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

のような振動型の解となる ( $A_1^+, A_1^-$  は定数)。

- $V(x) > E$  のとき (領域 2)

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{2m(V(x) - E)}}{\hbar} \quad (\text{A.15})$$

という関数を定義する。これを用いて式 (A.6), (A.7) を解くと、

$$S_0 = \pm i\hbar \int_{x_1}^x dx' \kappa(x') \quad (\text{A.16})$$

$$S_1 = \frac{1}{2} i \ln \kappa(x) \quad (\text{A.17})$$

となり、

$$S(x) = \pm i\hbar \int_{x_1}^x dx' \kappa(x') + \frac{1}{2} i\hbar \ln \kappa(x) \quad (\text{A.18})$$

となる。これを式 (A.3) に代入すると、領域 2 の波動関数  $u_2(x)$  は

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{A_2^+}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left(-\int_{x_1}^x dx' \kappa(x')\right) + \frac{A_2^-}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left(\int_{x_1}^x dx' \kappa(x')\right) \\ &= \frac{A_2^+}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(\eta(x, x_1)) + \frac{A_2^-}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(-\eta(x, x_1)) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

のような指数型の解となる ( $A_2^+, A_2^-$  は定数)。

もう一つの転回点  $x_2$  のまわりについても同様にして領域 1,3 の波動関数  $u_1(x), u_3(x)$  を求めることができ、

$$u_1(x) = \frac{B_1^+}{\sqrt{k(x)}} \exp(-i\eta(x, x_2)) + \frac{B_1^-}{\sqrt{k(x)}} \exp(i\eta(x, x_2)) \quad (\text{A.20})$$

$$u_3(x) = \frac{B_3^+}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(-\eta(x, x_2)) + \frac{B_3^-}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(\eta(x, x_2)) \quad (\text{A.21})$$

となる ( $B_1^+, B_1^-, B_3^+, B_3^-$  は定数)。

WKB 近似が有効かどうかは式 (A.5) の第 1 項  $S_0$  が第 2 項  $\hbar S_1$  に比べて大きいかどうかで評価できる。k が零にならない限り  $S_0$  の絶対値は x に関して単調増加であるから、

$|\hbar S'_1/S'_0|$  が小さければ  $|\hbar S_1/S_0|$  も小さいと考えると、

$$\left| \frac{\hbar S'_1}{S'_0} \right| = \left| \frac{k'}{2k^2} \right| = \left| \frac{\lambda(x)}{4\pi} \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} \right| \ll 1 \quad (\text{A.22})$$

が成り立つときに WKB 近似が有効である。 $\lambda = 2\pi/k$  は局所的なド・ブローイ波長であり、ポテンシャルの変化がゆっくりであり粒子がド・ブローイ波長の距離進むときに波数の変化の割合が小さいときに WKB 近似が有効であると言い換えることができる。ここで注意すべき点は  $V(x) = E$  となるような転回点においてはこの条件は成り立たないということである。

転回点においてはポテンシャルがゆっくり変化するという仮定をして、ポテンシャルの転回点まわりのテイラー展開の 1 次の項までで近似するとエアリー関数の漸近形を用いて転回点の両側の波動関数同士の接続条件を求めることができる。詳細は [41] を参照されたい。ここでは結果のみを書く。

- $x_1$  における接続

領域 1,2 における波動関数は式 (A.14),(A.19) でありこの 2 つの関数の  $x = x_1$  における接続条件は

$$A_1^+ = \left( \frac{1}{2} A_2^+ - i A_2^- \right) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.23})$$

$$A_1^- = \left( \frac{1}{2} A_2^+ + i A_2^- \right) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.24})$$

であり、これを用いて  $u_1(x)$  を書き直すと、

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \left[ A_2^+ \cos\left(\eta(x, x_1) - \frac{\pi}{4}\right) - 2A_2^- \sin\left(\eta(x, x_1) - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.25})$$

となる。領域 2 における指数増加の項がゼロのとき  $A_2^+ = 0$  となり領域 1,2 の波動関数は、

$$u_1(x) = \frac{2A_2^-}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\eta(x, x_1) + \frac{3\pi}{4}\right) \quad (\text{A.26})$$

$$u_2(x) = \frac{A_2^-}{\sqrt{k(x)}} \exp(-\eta(x, x_1)) \quad (\text{A.27})$$

となる。

- $x_2$  における接続

領域 1,3 における波動関数は式 (A.20),(A.21) でありこの 2 つの関数の  $x = x_2$  にお

ける接続条件は

$$B_1^+ = \left( \frac{1}{2} B_3^+ + i B_3^- \right) \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.28})$$

$$B_1^- = \left( \frac{1}{2} B_3^+ - i B_3^- \right) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.29})$$

であり、これを用いて  $u_1(x)$  を書き直すと、

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \left[ B_3^+ \cos\left(\eta(x, x_2) + \frac{\pi}{4}\right) + 2B_3^- \sin\left(\eta(x, x_2) + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.30})$$

となる。領域 3 における指数増加の項がゼロのとき  $B_3^+ = 0$  となり領域 1,3 の波動関数は、

$$u_1(x) = \frac{2B_3^-}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\eta(x, x_2) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.31})$$

$$u_2(x) = \frac{B_3^-}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp(\eta(x, x_2)) \quad (\text{A.32})$$

となる。

また、領域 1,2,3 がうまくつながる条件は式 (A.26),(A.27),(A.31),(A.32) と  $\eta(x, x_1) = \eta(x, x_2) + \eta(x_2, x_1)$  より

$$\eta(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx' k(x') = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.33})$$

である。これを書き直すと

$$2 \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(E - V(x))} = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.34})$$

となり前期量子論の Bohr-Sommerfeld の量子化規則が得られる。

## A.1 トンネル効果

図 A.1 のようなポテンシャルにおいて、領域 1 内の粒子が  $x$  軸の正の向きに入射する状況を考える。これまでに求めた WKB 近似による波動関数の形と接続条件に加えて領域 4 では  $x$  軸の正の向きに進む波しか存在しないという条件を課すと、領域 1,3,4 での波

動関数  $u_1(x), u_3(x), u_4(x)$  は

$$u_1(x) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \left( \frac{1}{4} e^{-P} + e^P \right) \exp(-i\eta(x, x_2)) + i \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \left( \frac{1}{4} e^{-P} - e^P \right) \exp(i\eta(x, x_2)) \quad (\text{A.1})$$

$$u_3(x) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \left[ \exp\left(\eta(x, x_3) - i\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\eta(x, x_3) + i\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$u_4(x) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \exp(-i\eta(x, x_3)) \quad (\text{A.3})$$

と書くことができる。C は定数で P は

$$P = \eta(x_2, x_3) = \int_{x_2}^{x_3} dx \frac{\sqrt{2m(V(x) - E)}}{\hbar} \quad (\text{A.4})$$

である。式 (A.1) の第 1 項が入射波であり、式 (A.3) が透過波である。この 2 つの比の絶

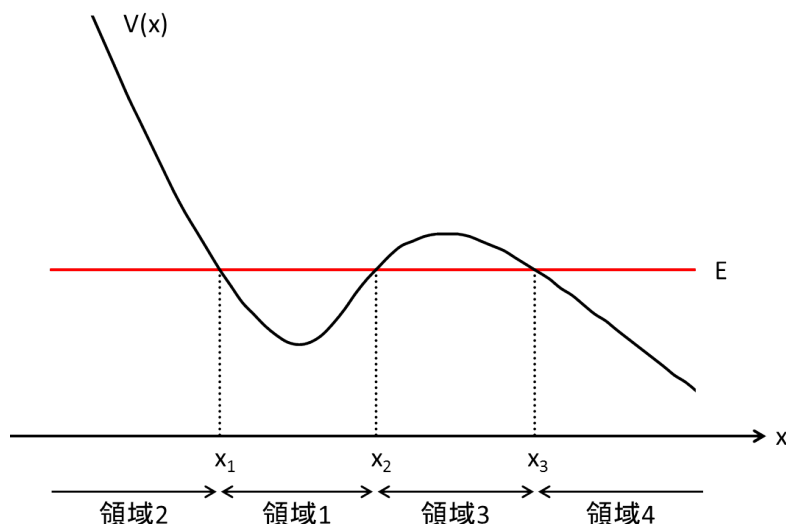


図 A.1 トンネル効果を考えるポテンシャルの例。転回点は  $x_1, x_2, x_3$

対値の 2 乗が透過率 T であり

$$T = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}e^{-P} + e^P\right)^2} = \frac{e^{-2P}}{\left(\frac{1}{4}e^{-P} + 1\right)^2} \quad (\text{A.5})$$

となる。特に  $P \gg 1$  の時に

$$T \simeq e^{-2P} = \exp\left(-\int_{x_2}^{x_3} dx \frac{2\sqrt{2m(V(x) - E)}}{\hbar}\right) \quad (\text{A.6})$$

となり、この  $e^{-2P}$  を障壁透過因子と呼ぶ。ポテンシャル内の粒子が単位時間あたりに転回点  $x_2$  でポテンシャル障壁に衝突する回数はポテンシャル内の粒子の速度を  $v_{in}$  とする

と  $\frac{v_{in}}{2(x_2 - x_1)}$  であり、単位時間あたりの透過確率  $\lambda$  は

$$\lambda = \frac{v_{in}}{2(x_2 - x_1)} e^{-2P} \quad (\text{A.7})$$

であり、ポテンシャル内の粒子の寿命  $\tau$  は  $v_{in} = \sqrt{2E/m}$  として、

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{2m}{E}} (x_2 - x_1) e^{2P} \quad (\text{A.8})$$

である。



## 付録 B

# ECDL のロック回路のプリント基板化

本研究の途中で **STIRAP** のための光源に用いているロック回路をプリント基板で作った。回路図は図 B.1 であり、本研究室でよく使われるもの,[25],[36] と同様のものである。この回路図を Cadsoft 社がリリースしているパターン図作成ソフトの **EAGLE** を用いてデータ化し、そのデータをもとに P 板.com 社のプリント基板製造サービスを利用してプリント基板を製造してもらった。この章ではプリント基板と回路図の対応についてまとめておく。

### schematic file と board file

**EAGLE** では schematic file と board file という 2 種類のファイルを作る。schematic file は回路図を書いたファイルであり、図 B.2 のように回路図 B.1 と同じ配線になるように抵抗やオペアンプなどを配置、配線している。図中の赤丸については後述する。board file は実際のプリント基板上のパターン図を書いたファイルであり、実際のプリント基板上でどの位置にどのパーツを置くかとどのように配線がされるかを定める。パーツの置き場所を決めたら配線は **EAGLE** が自動で配線をしてくれる（自分で書くことも可能）。このとき配線は schematic file の回路図と一致するようになっている。これらのファイルを使って図 B.4 のプリント基板が作られている。





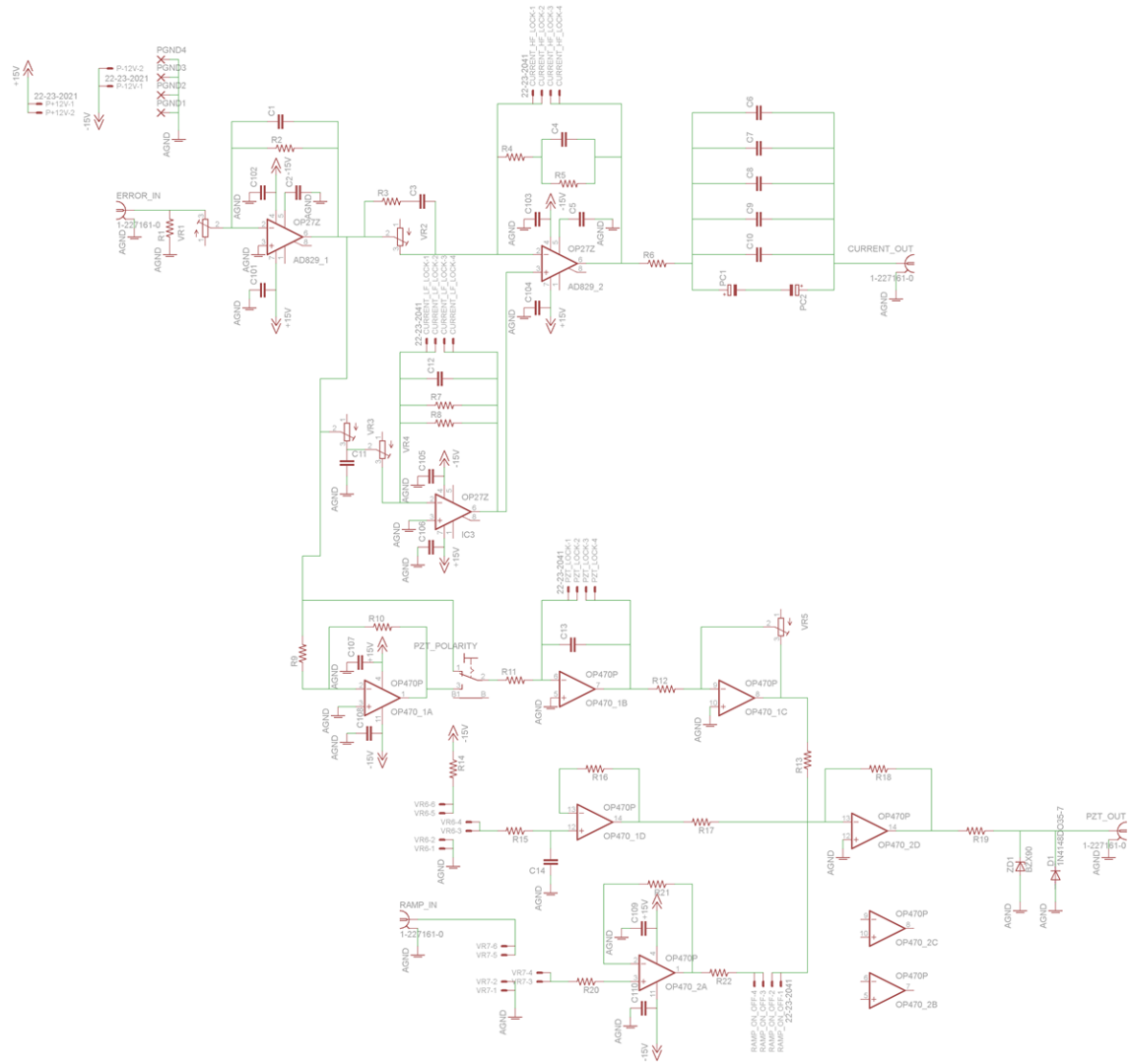


図 B.2 eagle で書いた回路図

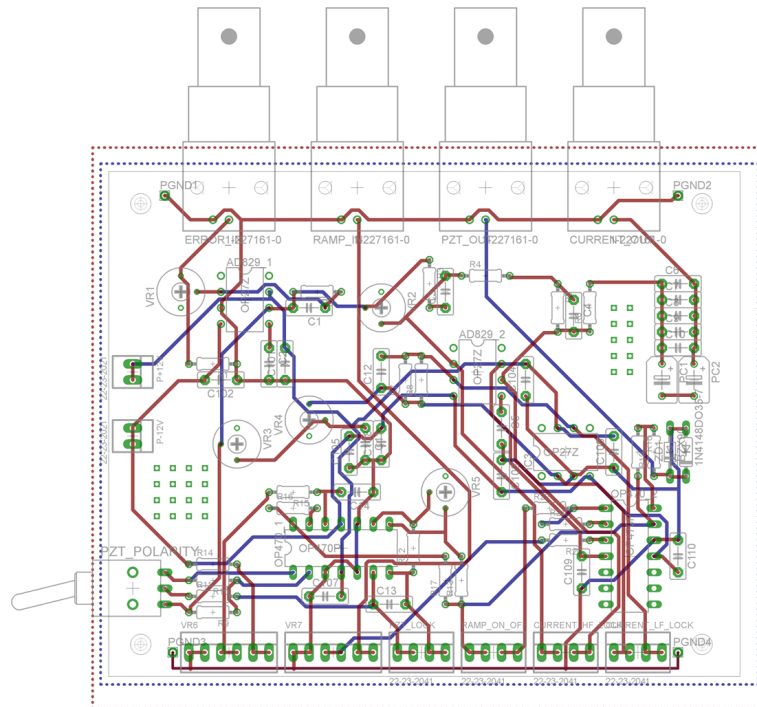


図 B.3 eagle で書いたパターン図

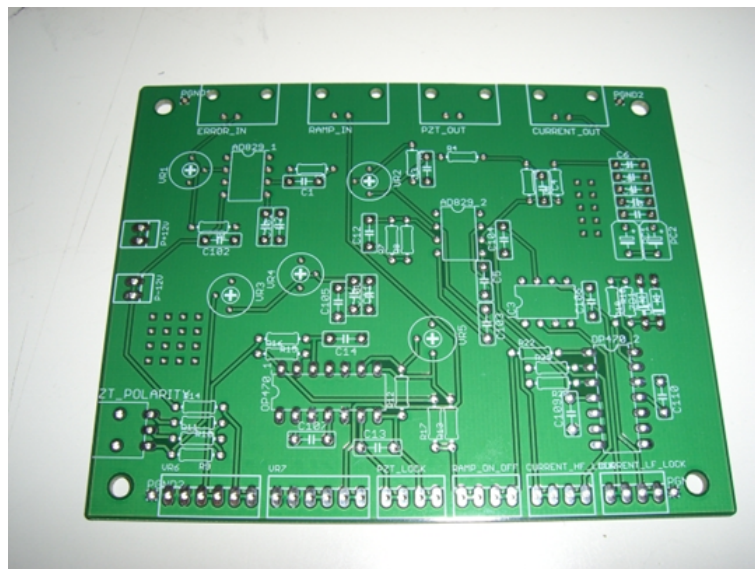


図 B.4 プリント基板の写真

## 部品配置

プリント基板には R1、C1 などと素子の番号が書かれていて、それは schematic file 上の番号と対応している。schematic file に対応した素子をつけていけば良いのだけでも注意すべき点がある。プリント基板には素子が横に並んでる箇所があり、素子の横に素子名が書かれる関係上一見すると素子名を勘違いしやすい図 B.5 のような箇所ができてしまっている。図の左側に抵抗が上から R14,R10,R11,R9 と並んでいる箇所があるが R10 と R11 を逆に見ないように気を付ける。右側も同じで、C2 の中に C101、C101 の中に C2 と書かれているが左が C2、右が C101 である。素子名は素子の横に書かれて素子の外形の内側に書かれることはないということに注意する。

図 B.1 を作るための素子の値の対応表は、表 B.1 のようになっている。設計ミスで注意する箇所が 2 つあり、R7 と C5 である。図 B.1 で赤丸で囲んである箇所に対応する箇所である。R7 は schematic file やプリント基板上では抵抗として書かれているけれど、ここには 47pF のコンデンサをつける。C5 は 8pF のコンデンサと 47pF のコンデンサを並列につける箇所なのだけれど、素子 1 つ分の穴しかないため表と裏からつけるなどして無理やり 2 つつける。

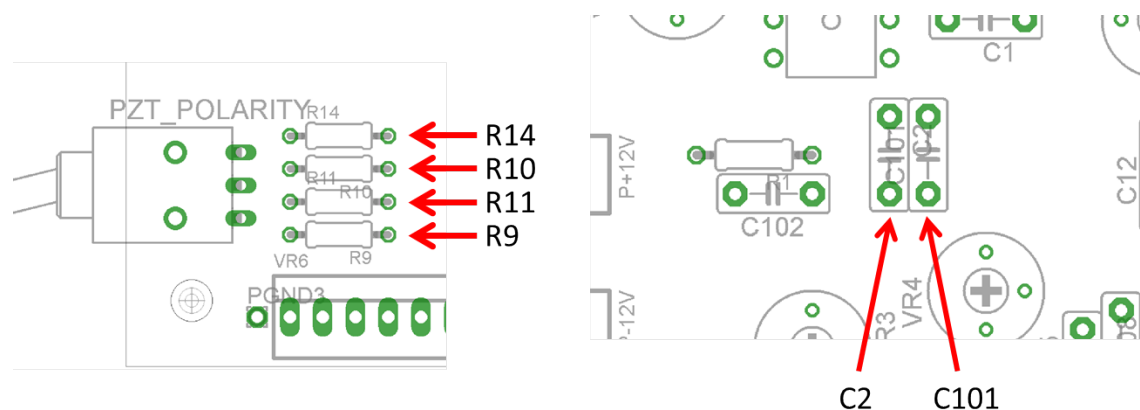


図 B.5 部品配置上の注意点

表 B.1 抵抗やコンデンサの値

抵抗	抵抗値( $\Omega$ )	コンデンサ	容量(F)	その他	
R1	47	C1	5p	ZD1	10V
R2	330	C2	15p	D1	1N4148
R3	10	C3	100p		
R4	470	C4	4.7n		
R5	10k	C5	8p+47p		
R6	1k	C6	1u		
R7	47pF	C7	1u		
R8	7.5k	C8	1u		
R9	10k	C9	1u		
R10	10k	C10	0.1u		
R11	1k	C11	22n		
R12	1k	C12	47p		
R13	2k	C13	22n		
R14	4.7k	C14	100n		
R15	47k	C101	100n		
R16	47k	C102	100n		
R17	2k	C103	100n		
R18	2k	C104	100n		
R19	100	C105	100n		
R20	47k	C106	100n		
R21	47k	C107	100n		
R22	2k	C108	100n		
VR1	5k	C109	100n		
VR2	5k	C110	100n		
VR3	1k	PC1	10u		
VR4	10k	PC2	10u		
VR5	10k				

# 謝辞

本論文は、東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻井上研究室における2年間の研究をまとめたものです。研究を行うあたりご指導、ご協力をいただいた多くの方々に感謝の言葉を述べさせていただきます。

指導教員である井上慎准教授には学部から合わせて3年間熱心に指導していただきました。起こっている現象について深く考えて理解することなど実験家としての姿勢を学ばせていただきました。他にも授業に向けて熱心に準備される姿や、講演会での話し方など実験以外の面でも手本となる姿を多く示していました。先生から学んだことをこれからの人生でも生かしていけたらと思います。小林淳京都大学特定准教授（元井上研助教）は3年間最も身近に研究生活でお世話になりました。装置の使い方、回路作り、データ解析など全ての面で学ばせていただき、私がこの修士論文を書くことができたのも氏のおかげです。博士課程4年の加藤宏平氏は自身の研究がお忙しいなかでも、わからないことに対する質問に丁寧に答えていただきました。実験において細かなところまでしっかりと調べて一歩ずつ進んでいく姿は非常にかっこよく見習いたいと思いました。修士1年の岡田彪利氏と藤本晃吉氏は2人とも実験に際し下調べをしっかりと行って、私は見切り発車気味に物事を始めてしますのでそのような姿勢は勉強になりました。来年度は2人だけになってしまい大変だと思いますが研究がうまくいくことを願っています。学部4年の池田浩太氏と上東幹氏はともに話し合いながら実験を頑張っている姿をよく見ました。実験において壁にぶつかっても諦めずにいろいろと調べている様子は自分も頑張ろうという気持ちになりました。現在中村宇佐美研究室博士課程1年の長田有登氏は、学部4年と修士1年の2年間お世話になりました。入ったばかりで何もわからなかった私に気さくに話しかけていただき色々なことを教えていただきました。物理に向かって真摯に向き合っている尊敬できる先輩でした。現在鳥井研にいる早川悠介氏は学部時代から仲が良く一緒にご飯を食べに行くなどしました。彼のおかげで学生生活を楽しく過ごすことができました。工作室の川端氏、佐藤氏にはECLDの製作などでお世話になりました。この他にも井上研論文紹介やその他の研究会などで多くの人にお世話になりました。最後にこれまで学生生活を支えてくれた家族に感謝の意を述べて本論文の締めとしたいと

思います。皆様本当にありがとうございました。

## 参考文献

- [1] E. L. Raab, M. Prentiss, Alex Cable, Steven Chu, and D. E. Pritchard, “Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987)
- [2] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198-201 (1995)
- [3] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn and W. Ketterle, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969-3973 (1995)
- [4] C. A. Regal, M. Greiner, D. S. Jin, “Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004)
- [5] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hansch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* **415**, 39-44 (2002)
- [6] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, “Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate”, *Nature* **392**, 151-154 (1998)
- [7] Masao Takamoto, Feng-Lei Hong, Ryoichi Higashi, and Hidetoshi Katori, “An optical lattice clock”, *Nature* **435**, 321-324 (2005)
- [8] Deborah S. Jin, and Jun Ye, “Polar molecules in the quantum regime”, *Physics Today* **64**(5), 27 (2011)
- [9] John M. Doyle, Bretislav Friedrich, Jinha Kim, and David Patterson, “Buffer-gas loading of atoms and molecules into a magnetic trap”, *Phys. Rev. A*, **52**, 2515-2518, (1995)
- [10] Thorsten Köhler, Krzysztof Góral, and Paul S. Julienne, “Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances”, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311-1361, (2006)
- [11] Kevin M. Jones, Eite Tiesinga, Paul D. Lett, and Paul S. Julienne, “Ultracold photoassociation spectroscopy: Long-range molecules and atomic scattering”, *Rev. Mod. Phys.*

- 78**, 483-535 (2006)
- [12] K. Bergmann, H. Theuer, and B.W. Shore, “Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1003-1025 (1998)
- [13] K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M. H. G. de Miranda, A. Pe’er, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, J. Ye, “A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules”, *Science*, **322**, 231 (2008)
- [14] J. F. Barry, D. J. McCarron, E. B. Norrgard, M. H. Steinecker, and D. DeMille, “Magneto-optical trapping of a diatomic molecule”, *Nature* **512**, 286-289 (2014)
- [15] Jean-Philippe Uzan, “The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 403 (2003)
- [16] J. Bagdonaite, M. Daprá, P. Jansen, H. L. Bethlem, W. Ubachs, S. Muller, C. Henkel, and K. M. Menten, “Robust Constraint on a Drifting Proton-to-Electron Mass Ratio at  $z=0.89$  from Methanol Observation at Three Radio Telescopes”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 231101 (2013)
- [17] F. van Weerdenburg, M. T. Murphy, A. L. Malec, L. Kaper, and W. Ubachs, “First Constraint on Cosmological Variation of the Proton-to-Electron Mass Ration from Two Independent Telescopes”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180802 (2011)
- [18] J. K. Webb, J. A. King, M. T. Murphy, V. V. Flambaum, R. F. Carswell, and M. B. Bainbridge, “Indications of a Spatial Variation of the Fine Structure Constant”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 191101 (2011)
- [19] A. Shelkownikov, R. J. Butcher, C. Chardonnet, and A. Amy-Klein, “Stability of the Proton-to-Electron Mass Ratio”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 150801 (2008)
- [20] V. V. Flambaum and A. F. Tedesco, “Dependence of nuclear magnetic moments on quark masses and limits on temporal variation of fundamental constants from atomic clock experiments”, *Phys. Rev. C* **73**, 055501 (2006)
- [21] R. M. Godun, P. B. R. Nisbet-Jones, J. M. Jones, S. A. King, L. A. M. Johnson, H. S. Margolis, K. Szymaniec, S. N. Lea, K. Bongs, and P. Gill, “Frequency Ratio of Two Optical Clock Transitions in  $^{171}\text{Yb}^+$  and Constraints on the Time Variation of Fundamental Constants”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 210801 (2014)
- [22] N. Huntemann, B. Lipphardt, Chr. Tamm, V. Gerginov, S. Weyers, and E. Peik, “Improved Limit on a Temporal Variation of  $m_p/m_e$  from Comparisons of  $\text{Yb}^+$  and Cs Atomic Clocks”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 210802 (2014)
- [23] D. DeMille, S. Sainis, J. Sage, T. Bergeman, S. Kotochigova, and E. Tiesinga, “Enhanced Sensitivity to Variation of  $m_e/m_p$  in Molecular Spectra”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 043202 (2008)



- 
- [24] Masatoshi Kajita, Geetha Gopakumar, Minori Abe, Masahiko Hada, and Matthias Keller, “Test of  $m_p/m_e$  changes using vibrational transitions in  $N_2^+$ ”, *Phys. Rev. A* **89**, 032509 (2014)
- [25] 大久保 弘樹、荻野 敦、卒業論文「電子・陽子質量比の変化に敏感な分子準位の分光」, 東京大学 (2013)
- [26] G. Herzberg, “Molecular Spectra and Molecular Structure I. Spectra of Diatomic Molecules”, D. van Nostrand, (1950)
- [27] John M. Brown, Alan Carrington, “Rotational Spectroscopy of Diatomic Molecules”, Cambridge: Cambridge University Press (2003)
- [28] L. I. Schiff 著, 井上 健 訳, 「新版 量子力学 (上)」, 吉岡書店, (1970)
- [29] L. I. Schiff 著, 井上 健 訳, 「新版 量子力学 (下)」, 吉岡書店, (1972)
- [30] S. Rousseau, A. R. Allouche, and M. Aubert-Frécon, “Theoretical Study of the Electronic Structure of the KRb Molecule”, *J. Mol. Spect.* **203**, 235-243 (2000)
- [31] A. Pashov, O. Docenko, M. Tamanis, R. Ferber, H. Knöckel, and E. Tiemann, “Coupling of the  $X^1\Sigma^+$  and  $a^3\Sigma^+$  states of KRb”, *Phys. Rev. A* **76**, 022511 (2007)
- [32] K. Aikawa, D. Akamatsu, M. Hayashi, K. Oasa, J. Kobayashi, P. Naidon, T. Kishimoto, M. Ueda, and S. Inouye, “Coherent Transfer of Photoassociated Molecules into the Rovibrational Ground State”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 203001 (2010)
- [33] R. J. Le Roy, LEVEL 8.0: “A Computer Program for Solving the Radial Schrödinger Equation for Bound and Quasibound Levels”, University of Waterloo Chemical Physics Research Report CP-663 (2007); see <http://leroy.uwaterloo.ca/programs/>
- [34] Kevin M. Jones, Eite Tiesinga, Paul D. Lett, and Paul S. Julienne, “Ultracold photoassociation spectroscopy: Long-range molecules and atomic scattering”, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 483 (2006)
- [35] K. Aikawa, D. Akamatsu, M. Hayashi, K. Oasa, J. Kobayashi, P. Naidon, T. Kishimoto, M. Ueda, and S. Inouye, “Coherent Transfer of Photoassociated Molecules into the Rovibrational Ground State”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 203001 (2010)
- [36] 相川 清隆 博士論文 “All-optical selective formation of ultracold molecules in the rovibrational ground state”, 東京大学 (2011)
- [37] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, A. Clairon, C. Salomon, and C. Williams, “Cold Collision Frequency Shifts in a  $^{87}\text{Rb}$  Atomic Fountain”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3117 (2000)
- [38] John L. Bohn and P. S. Julienne, “Semianalytic theory of laser-assisted resonant cold collisions”, *Phys. Rev. A* **60**, 414 (1999)
- [39] M. Junker, D. Dries, C. Welford, J. Hitchcock, Y. P. Chen, and R. G. Hulet, “Photoassociation of a Bose-Einstein Condensate near a Feshbach Resonance”, *Phys. Rev. Lett.*

**101**, 060406 (2008)

- [40] Robert Beuc, Mladen Movre, Ticijana Ban, Goran Pichler, Mireille Aymar, Olivier Dulieu and Wolfgang E Ernst, “Predictions for the observation of KRb spectra under cold conditions”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39** S1191-S1201 (2006)
- [41] 武藤 一雄, 量子力学第二 (量子力学第二講義ノート),  
〈[http://www.th.phys.titech.ac.jp/muto/lectures/QMII11/QMII11\\_contents.pdf](http://www.th.phys.titech.ac.jp/muto/lectures/QMII11/QMII11_contents.pdf)〉  
(2015/01/16 アクセス)