

# 卒業論文

## 「ボース凝縮体の Phase Contrast Imaging」

指導教員 井上 慎 准教授

平成 20 年 2 月提出

東京大学物理工学科  
53014 藤掛 陽輔



# 目次

|       |                             |    |
|-------|-----------------------------|----|
| 第 1 章 | 序論                          | 3  |
| 1.1   | 研究の背景                       | 3  |
| 1.1.1 | 冷却原子気体の歴史                   | 3  |
| 1.1.2 | Bose-Einstein 凝縮            | 4  |
| 1.2   | 研究の目的                       | 6  |
| 1.2.1 | 井上研究室における研究                 | 6  |
| 1.2.2 | 研究の目的                       | 7  |
| 1.3   | 本論文の構成                      | 7  |
| 第 2 章 | Phase Contrast Imaging      | 8  |
| 2.1   | Phase Contrast Imaging の原理  | 8  |
| 2.1.1 | Absorption Imaging          | 9  |
| 2.1.2 | Phase Contrast Imaging      | 10 |
| 2.1.3 | phase plate                 | 12 |
| 2.2   | PCI の実験                     | 14 |
| 2.2.1 | 実験のセットアップ                   | 14 |
| 2.2.2 | 実験結果                        | 17 |
| 2.2.3 | PCI のまとめ                    | 21 |
| 2.3   | 原子と光の相互作用                   | 22 |
| 2.3.1 | 複素屈折率と透過率、phase shift の関係   | 22 |
| 2.3.2 | 2 準位原子と光の相互作用               | 23 |
| 2.3.3 | 自然放出の Einstein による現象論的取り扱い  | 26 |
| 2.3.4 | 密度行列と原子の分極                  | 31 |
| 2.3.5 | PCI を行うのに適した probe 光の条件     | 34 |
| 第 3 章 | DDS による laser の offset lock | 38 |
| 3.1   | DDS offset lock system の概要  | 38 |

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 3.1.1 | DDS offset lock system の意義 . . . . .       | 38 |
| 3.1.2 | DDS と PLL . . . . .                        | 39 |
| 3.1.3 | DDS offset lock system の概要 . . . . .       | 41 |
| 3.1.4 | DDS と PLL の原理 . . . . .                    | 42 |
| 3.2   | 光源の作成 . . . . .                            | 49 |
| 3.2.1 | ECDL の設計と製作 . . . . .                      | 50 |
| 3.3   | DDS と PLL のセットアップ . . . . .                | 51 |
| 3.3.1 | AD9858PCB の仕様 . . . . .                    | 51 |
| 3.3.2 | AD9858PCB のセットアップ . . . . .                | 55 |
| 3.4   | laser offset lock の実験 . . . . .            | 56 |
| 3.4.1 | 実験のセットアップ . . . . .                        | 56 |
| 3.4.2 | 実験手順 . . . . .                             | 59 |
| 3.4.3 | 実験結果 . . . . .                             | 59 |
| 3.4.4 | DDS による laser の offset lock のまとめ . . . . . | 63 |
| 第 4 章 | BEC の Phase Contrast Imaging               | 64 |
| 4.1   | BEC の Phase Contrast Imaging の概要 . . . . . | 64 |
| 4.2   | 実験のセットアップ . . . . .                        | 67 |
| 4.2.1 | 実験系 . . . . .                              | 67 |
| 4.2.2 | 実験手順 . . . . .                             | 69 |
| 4.3   | 実験結果 . . . . .                             | 70 |
| 第 5 章 | まとめと今後の展望                                  | 74 |

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究の背景

#### 1.1.1 冷却原子気体の歴史

20 世紀の初頭、黒体輻射のエネルギースペクトル、原子のエネルギー準位の離散化、光電効果などの実験事実を説明する理論として量子論が急速に定式化されてきた。Heisenberg による行列力学、Schrödinger による波動力学、そして Dirac の変換理論による定式化を経て、量子論は物理現象を記述するもっとも基本的な理論であるという認識が確立された。

量子論が確立されると、その応用範囲は多岐に渡り、新しい科学技術が次から次へと生まれた。その中でも、特にレーザーの発明はその後の物理学の進歩に大きな影響を及ぼした。レーザー技術の進歩は主に、光と原子の相互作用が量子論によって詳しく理解できたことによる。1970 年代に入ると、そのレーザー技術を応用して中性原子気体を冷却する技術が研究され始めた。そして 1987 年、レーザーと磁場を利用することによって、中性原子を 3 次元的に冷却、トラップする磁気光学トラップが発明された [1]。その後、レーザー冷却と磁気トラップ、蒸発冷却を組み合わせることによって、1995 年に MIT の Ketterle、JILA の Cornell、Wieman のグループがアルカリ原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) の生成に世界で初めて成功した [2,3]。

ひとたび原子気体の BEC の生成に成功すると、そこから冷却原子気体への関心が高まり、基礎から応用まで、様々な実験が行われるようになった。BEC の干渉実験 [4]、量子化された渦の生成 [5]、Fermion 系における Fermi 縮退 [6]、BEC-BCS クロスオーバー [7] など重要な結果が得られ、冷却原子気体での成果が物理学全体に影響を及ぼすまでになった。今なお、冷却原子気体の研究はその研究領域を広げ続け、物理学全体がその動向に注目している。

### 1.1.2 Bose-Einstein 凝縮

Bose-Einstein 凝縮とはいかなる現象であるのか、ここで簡単に説明する。ここでの議論はいくらか不正確で正しくないものも混じっているが、Bose-Einstein 凝縮が起きるメカニズムを直感的に理解できるという点で優れている。

同種粒子の量子論 量子論では、同一内部状態にある同種粒子は原理的に区別できない（同種粒子の不可弁別性）。多数の同種粒子を区別するには、粒子に印をつける（内部状態を変える）か、粒子の軌道をずっと観測する必要がある。しかし、量子論では Heisenberg の不確定性原理から粒子の位置と運動量を同時に確定できないのである。

2つの同種粒子を考え、その波動関数を  $\psi(\xi_1, \xi_2)$  とする。ここで、 $\xi_1, \xi_2$  は粒子の状態を表す変数である。同種粒子には区別がないので、粒子の番号を交換してもその波動関数は同じ状態<sup>\*1</sup>を表すはずなので  $\psi(\xi_2, \xi_1) = e^{i\alpha}\psi(\xi_1, \xi_2)$  が成り立つ。もう一度粒子の番号を交換すると  $\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i2\alpha}\psi(\xi_1, \xi_2)$  となる。これから  $e^{i\alpha} = \pm 1$  が求まる。ここで、粒子の交換に際して、波動関数に因子 +1 がかかるものを Bose 粒子、-1 がかかるものを Fermi 粒子という。つまり、Bose 粒子か Fermi 粒子かで、粒子を交換した際の波動関数の対称性が異なる。ある粒子が Bose 粒子か Fermi 粒子かは、その粒子のスピンによって決まる。スピンの整数のとき Bose 粒子であり、スピンの半整数のとき Fermi 粒子である。

粒子を交換した際の波動関数の対称性の違いが、どのように影響してくるのかを考える。2つの同種粒子からなる系の波動関数を  $\psi(\xi_1, \xi_2)$  とする。いま、2つの粒子が区別できるとする古典的な状況を考えて、2つの粒子が同じ状態  $\xi$  に見いだされる確率は  $|\psi(\xi_1 = \xi, \xi_2 = \xi)|^2$  となる。粒子の不可弁別性を考慮した正しい波動関数は  $\Psi(\xi_1, \xi_2) = (\psi(\xi_1, \xi_2) \pm \psi(\xi_2, \xi_1)) / \sqrt{2}$  となる。複号は Bose 粒子の場合 +、Fermi 粒子の場合 - である。2粒子を  $\xi_1, \xi_2$  に見いだす確率は、

$$|\Psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = \frac{1}{2} \left[ |\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 + |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2 \pm \psi^*(\xi_1, \xi_2)\psi(\xi_2, \xi_1) \pm \psi(\xi_1, \xi_2)\psi^*(\xi_2, \xi_1) \right]$$

となる。したがって、2つの粒子が同じ状態に見いだされる確率は古典的な場合と比べて、Bose 粒子は2倍、Fermi 粒子は0になる<sup>\*2</sup>。また、N個の同種粒子を考えると、Bose 粒子の場合、N個の粒子が同じ状態に見いだされる確率は古典的な場合の N! 倍になる。これは相互作用などの影響ではなく、粒子の交換に対する波動関数の対称性だけから帰結される驚くべきことである。

<sup>\*1</sup> 位相因子  $e^{i\alpha}$  によって結ばれる二つの波動関数、 $\psi = e^{i\alpha}\phi$  は、同じ物理的状態を表す。

<sup>\*2</sup> これが Fermi 粒子に関するパウリの排他原理である。

原子気体の Bose-Einstein 凝縮 いま体積  $V$ 、粒子数  $N$  の原子気体を考える。量子論によると、原子は粒子でもあり波動でもある<sup>\*3</sup>。この波動としての原子がどれほど広がっているかを求めてみる<sup>\*4</sup>。原子の運動量の揺らぎと温度は  $(\Delta p)^2/2m = k_B T/2$  と結びついているので、 $\Delta p = \sqrt{mk_B T}$  となる。また、Heisenberg の不確定性原理から  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$  なので、原子の広がりには  $\hbar/\sqrt{mk_B T}$  程度と見積もれる。この原子の広がりが平均原子間距離  $(V/N)^{1/3}$  程度になると、原子の区別がつかなくなると考えられる。原子の区別が

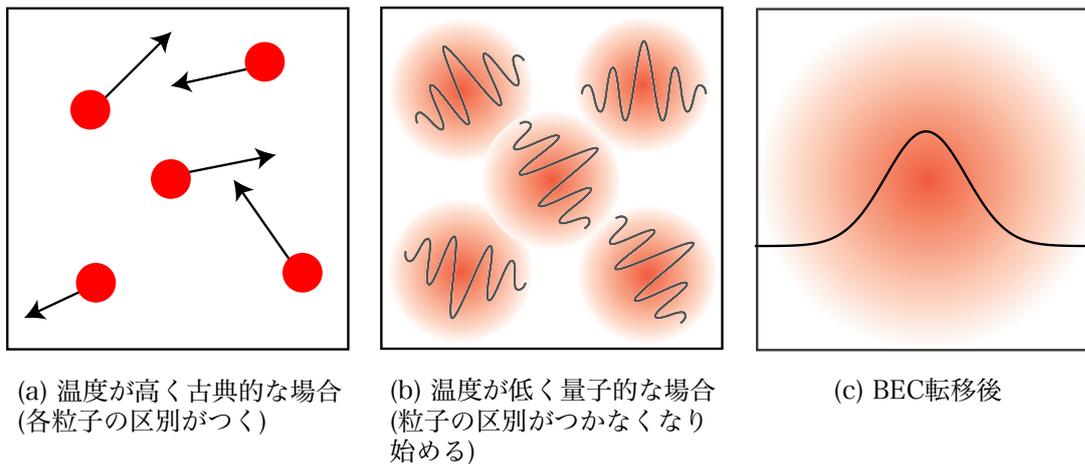


図 1.1 原子の広がり

つかなくなると、先ほど考察したように  $N$  個の粒子が同じ状態をとる確率は古典的な場合に比べて  $N!$  倍になる。いま、 $N$  はマクロな大きさであるので、ほとんどの粒子が同じ状態に見いだされるようになるであろう<sup>\*5</sup>。つまり、気体の密度を  $n$  として、温度が  $T = \hbar^2 n^{2/3}/(mk_B)$  程度になると、急にほとんどの粒子が同じ状態に集まるのである<sup>\*6</sup>。これが Bose-Einstein 凝縮である。

Einstein は 1924 年に Ehrenfest に宛てた手紙に「ある温度を境に、分子たちは、引力なしに『凝縮』する、つまり、速度 0 の状態にたまってしまう。理論はきれいなのだが、ここにいくらかでも真実があるのだろうか?」と書きつづった [10]。いまや、中性原子気体によって BEC が達成され、Einstein の理論が真実であることが証明されたのだ。

<sup>\*3</sup> これは不正確な言い方である。実際の原子は波動でも粒子でもない。我々に分かるのは波動関数から予想される原子の確率的な振る舞いだけである。

<sup>\*4</sup> 正確には、波動関数の広がりである。

<sup>\*5</sup> この議論は不正確であるとの指摘がある。実際には粒子の量子統計性に加え、状態密度が関わってくる。箱の中の自由粒子の場合、状態密度に関する考察から 3 次元でなければ BEC 転移は生じないことが知られている。

<sup>\*6</sup> より正確な計算によれば、BEC の転移温度は  $T \sim 3.31 \hbar^2 n^{2/3}/(mk_B)$

## 1.2 研究の目的

### 1.2.1 井上研究室における研究

まず、本研究の目的を述べる前に、井上研究室で行っている研究内容を述べる。井上研究室では極低温の極性分子を生成することを目標としている。中性原子気体の場合、原子間の相互作用は短距離で等方的な衝突に限られる。それに対して極性分子は電気双極子を持つため、その相互作用が長距離に及び、また異方的である。このような特異な相互作用をするマクロな量子系の振る舞いはいまだ未解明であり、基礎的にも応用面でも魅力的な系である。

井上研究室では極性分子を以下の手順で作成する予定である。

1.  $^{41}\text{K}$  と  $^{87}\text{Rb}$  の BEC を生成する。
2.  $^{41}\text{K}$  と  $^{87}\text{Rb}$  を Feshbach 共鳴によって  $^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$  分子にする。
3. STIRAP(Stiulated Raman Adiabatic Passage) によって、 $^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$  を分子の振動基底準位に落とす。

極性分子を作成する過程においても、 $^{41}\text{K}$  と  $^{87}\text{Rb}$  の BEC の mixture など、興味深い実験を行うことができる。現在、井上研究室では  $^{41}\text{K}$  の BEC の生成に成功している。

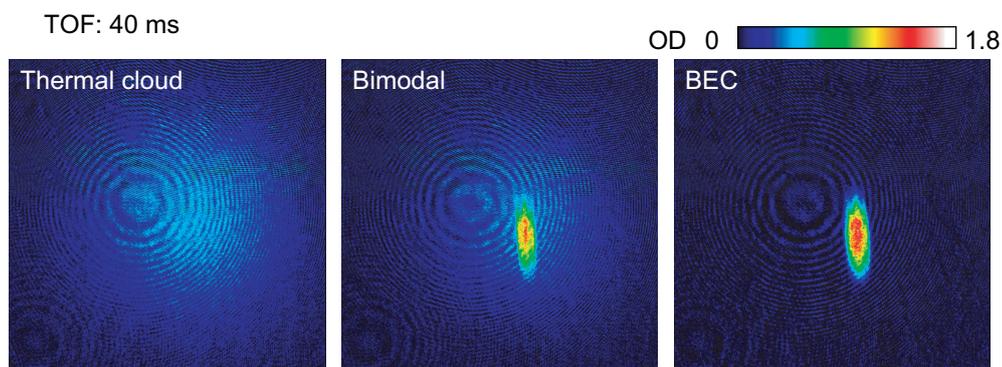


図 1.2  $^{41}\text{K}$  の TOF image

### 1.2.2 研究の目的

図 1.2 の image は、Absorption Imaging によって得られたものである。Absorption Imaging では、原子が光を吸収することを利用して imaging を行っている。そのため、BEC のような極低温の原子気体を Absorption Imaging によって見ようとする、原子が光を吸収することによって加熱し、BEC が破壊されてしまう。Absorption Imaging では一つの BEC に対して 1 つの image しか得られず、BEC のダイナミクスなどは見えない。

そこで、本研究では BEC を非破壊で imaging することができる、Phase Contrast Imaging[8] についての研究を行うことにした。Phase Contrast Imaging では原子に光を吸収させることなく image を得ることが可能である。Phase Contrast Imaging によって BEC を非破壊で観測することができれば、BEC の成長過程や系のパラメータを時間変化させた時の BEC の応答などのダイナミクスを見ることができ、非常に興味深い。

また、Phase Contrast Imaging を行うには原子の共鳴周波数から離調のついた光が必要となる。そこで、本研究では DDS(Digital Direct Synthesizer) と PLL(Phase Lock Loop) を用いて、共鳴周波数から自由に離調をつけられる laser offset lock system の作成を行うことにした。この offset lock system は数 GHz 程度まで離調がつけられるよう設計されており、Phase Contrast Imaging だけでなく強磁場中の BEC の imaging にも使える。また、DDS を用いると蒸発冷却用の rf として良質なものを生成することができ、本研究を通じて DDS に習熟することは有益である。

## 1.3 本論文の構成

本論文は以下のような構成になっている。

- 2 章では Phase Contrast Imaging の原理について解説し、Phase Contrast Imaging を簡単な系で行った結果を述べる。また、原子気体の imaging を行う際には原子と光の相互作用の知識が必要となる。したがって、1 章の最後では原子と光の相互作用について解説する。
- 3 章では DDS と PLL について解説し、laser offset lock system について述べる。
- 4 章では BEC を Phase Contrast Imaging によって観測した結果について述べる。
- 5 章が最後の章で、まとめと今後の展望について述べる。

## 第 2 章

# Phase Contrast Imaging

冷却原子気体を imaging するには通常、Absorption Imaging が用いられる。これは、レーザー光を冷却原子気体に吸収させて、その吸収の度合いから冷却原子気体の密度や形状を評価する方法である。これに対し、本章の主題である Phase Contrast Imaging (以下 PCI と書く) ではレーザー光を吸収させることなく、非破壊的に冷却原子気体を imaging することができる。つまり、連続的に PCI を行うことによって冷却原子気体のダイナミクスを見ることが出来る。本章では、この PCI の原理とその利点について述べる。また、PCI を行う際には、原子と光の相互作用によって probe 光がどのように散乱されるかなどの考察が必要となる。したがって、この章の最後で光と原子の相互作用について述べる。

### 2.1 Phase Contrast Imaging の原理

物体に光が当たると、ある波長の光は吸収され、他の波長の光は反射され私たちの目に届き観測される。赤く見える物体は赤以外の光を良く吸収し、その物体によって反射された赤い光が目が届くために赤く見える。ほかの色の物体でも同じである。では、ガラスのように無色透明な物体はどうであろうか。ガラスは光を吸収しないので、人間の目にはそこに何も無いように見えるはずである (実際には 4 % ほどの反射がある)。それにも関わらず、ガラスがそこにあると分かるのはなぜだろうか？それは、光がガラスによって屈折されるからであり、ガラスがあるところとないところで後ろの景色にズレが生じるからである。つまり、我々は光の吸収・反射のほかに屈折を見ることによって物体を観測することができる。

光で冷却原子気体を imaging する方法には主に Absorption Imaging と Phase Contrast Imaging がある。簡単に言うと、Absorption Imaging は物体によって光が吸収されることを利用して、Phase Contrast Imaging は物体によって光が屈折することを利用

して imaging を行っている。これからこの二つの imaging の原理を述べる。

### 2.1.1 Absorption Imaging

この節では Absorption Imaging の原理について述べる。図 2.1 に原子気体を imaging するときの光学系の配置を示す。ここで、 $a$  は原子気体からレンズまでの距離、 $b$  はレン

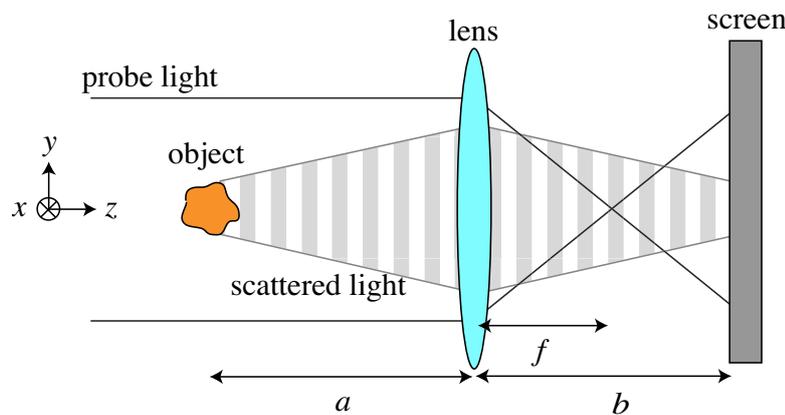


図 2.1 imaging の原理

ズからスクリーンまでの距離、 $f$  はレンズの焦点距離である。probe 光が原子気体に当たると光と原子が相互作用して散乱される。その散乱光をレンズで集光することによりスクリーン上に原子気体の image を結像させることができる。スクリーン上に image が結像されるということは、物体のある一点から出た光が全てスクリーン上の一点に収束するということである。image が結像される条件は以下のレンズの公式として知られている。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2.1)$$

また、image の倍率  $M$  は  $M = b/a$  によって定まる。実験環境の制約や必要な倍率、レンズの公式から光学系のパラメータ  $a, b, f$  を決定すればよい。

probe 光の電場を  $E_0(\mathbf{r}, t)$ 、原子気体を透過後の光の電場を  $E_t(\mathbf{r}, t)$ 、原子気体によって散乱された光の電場を  $\Delta E(\mathbf{r}, t)$  とする<sup>\*1</sup>。このとき、原子気体を通過後の電場は一般に振幅と位相が変化しているので、

$$E_t = E_0 + \Delta E = tE_0e^{i\phi} \quad (2.2)$$

と書ける。ここで  $t = t(x, y)$  は透過率、 $\phi = \phi(x, y)$  は phase shift であり、どちらも原

<sup>\*1</sup> いま、電場の偏光は考える必要がないので、簡単のため電場をスカラー場で近似して書く。

子気体の縦密度  $\tilde{n}(x, y) = \int n(x, y, z) dz$  などから定まる<sup>\*2</sup>。Kramers-Kronig の定理から、透過率  $t$  と phase shift  $\phi$  は原子気体に関してまったく同じ情報を持っており、片方が求まればもう片方も求まる。つまり、この透過率と phase shift のどちらかが求まれば、その値から原子気体の密度を評価することができる。

今、スクリーンとして CCD カメラのように、光の強度を signal として出力するものを用いる。 $I_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c |E_0|^2$  とすると、Absorption Imaging によって得られる光の強度  $I_{Ab}$  は、

$$I_{Ab} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c |E_t(x, y)|^2 = t(x, y)^2 I_0 \quad (2.3)$$

となる。したがって、Absorption Imaging では原子気体に probe 光を吸収させ、その image から透過率  $t(x, y)$  を算出し、原子気体の形状や密度分布、原子数を評価することができる。

### 2.1.2 Phase Contrast Imaging

次に、本題である Phase Contrast Imaging の原理について述べる [8]。Absorption Imaging では原子気体に probe 光を吸収させ、その透過率を測定していたのに対して、PCI では原子気体に probe 光を吸収させずに、光の phase shift を測定する。しかし、CCD カメラのような一般の検出器は光の強度を検出するものであり、位相に関しては何も情報を与えてくれない。したがって、位相の情報をどうにかして強度の情報に焼き直さなければならないが、probe 光と散乱光を巧みに干渉させてこれを行っているのが PCI なのである。

図 2.2 に PCI を行うための光学系を示す。通常の imaging と異なるところは、レンズ

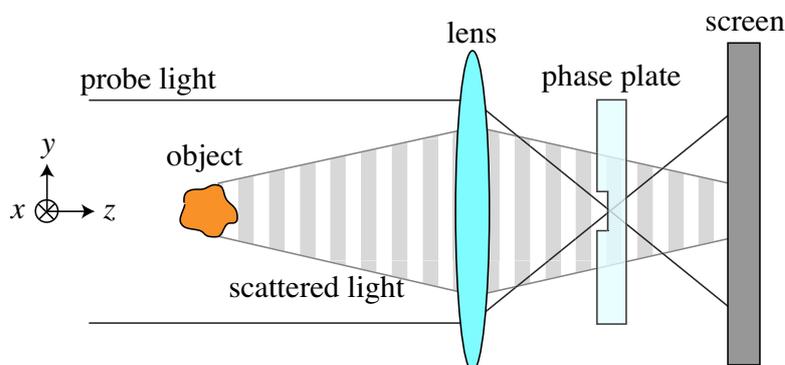


図 2.2 PCI の原理

<sup>\*2</sup> 透過率と phase shift が原子気体の密度や共鳴周波数、probe 光の周波数にどのように依存するかは後の原子と光の相互作用の節で考察する。

と screen の間に phase plate と呼ばれるものが入っている点だけである。phase plate はガラスでできており、中心の小さなくぼみを通じた光だけが  $\lambda/4$ 、つまり  $\pi/2$  だけ位相が進むように設計されている。この phase plate のくぼみをレンズの焦点の位置に合わせておくことにより、レンズによって焦点に集光された probe 光だけが phase plate のくぼみを通して  $\lambda/4$  だけ位相が進み、原子気体に散乱された光は位相の変化を受けない。

スクリーン上の電場  $E_{pc}$  は原子気体によって散乱された光  $\Delta E$  と phase plate によって位相が  $\frac{\pi}{2}$  だけ進んだ probe 光  $E_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$  の重ね合わせによって得られるので、

$$E_{pc} = \Delta E + E_0 e^{i\frac{\pi}{2}} = tE_0 e^{i\phi} - E_0 + E_0 e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (2.4)$$

となる。PCI の原理を複素平面を用いて表現したものを図 2.3 に示す。これは probe 光  $E_0$  を実軸上にとり、それとの相対的な位相差を示したものである。

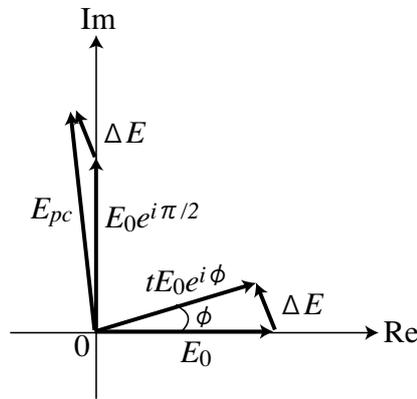


図 2.3 PCI の原理の複素平面による表現

この図を見ると、散乱光と、phase plate によって位相の進んだ probe 光がうまく干渉して強め合っているのが分かる。PCI による光の強度  $I_{PC}$  を求めると、

$$I_{PC} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \left| tE_0 e^{i\phi} - E_0 + E_0 e^{i\frac{\pi}{2}} \right|^2 = I_0 \left[ t^2 + 2 - 2\sqrt{2}t \cos \left( \phi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (2.5)$$

が得られ、強度に phase shift  $\phi$  の情報が入っているのが分かる。図 2.4 に  $t = 1$  のときの、phase shift  $\phi$  とコントラスト  $I_{PC}/I_0$  のグラフを示す。

特に、原子気体が光を吸収せず ( $t \sim 1$ ) phase shift が小さい ( $\phi \ll 1$ ) 場合を考えると、

$$I_{PC} = I_0 (1 + 2\phi) \quad (2.6)$$

が成り立ち、 $\phi$  に比例した強度分布を得ることができる。

これまでの議論から、PCI では phase shift  $\phi$  を測定することができ、その値から原子気体の形状、密度、原子数が評価できることが分かる。しかも透過率  $t$  がほぼ 1 になるよ

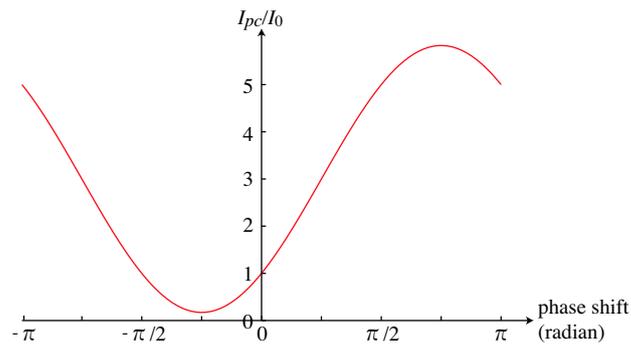


図 2.4 phase shift とコントラストのグラフ

うな状況でも<sup>\*3</sup>、phase shift があればそれを測定できる。つまり原子気体に probe 光を吸収させなくても image を得ることができる。

### 2.1.3 phase plate

次に、PCI を行う際の要である phase plate が実際にどのようなものであるのかを説明する。図 2.5 に実際の phase plate の写真を示す。



図 2.5 phase plate

phase plate は 1-inch optics 用の枠に収まっている。肉眼では分かりにくいですが、このガラス板の中央に円形のくぼみがある。このくぼみによって位相差をつけるのだが、それには空気とガラスの屈折率の違いによる光路長の差を利用している。

空気の屈折率は 1.000292 であり<sup>\*4</sup>、真空の屈折率とほぼ同じ 1 である。今回用いた

<sup>\*3</sup> 原子気体の場合、共鳴周波数から十分離調をとった光なら吸収されない。しかもうまく離調をつけると phase shift は有限の値を持ち得る。

<sup>\*4</sup> 0 、1 気圧、589.3nm の波長の光の場合。

phase plate 用のガラス板の屈折率は 1.453 である<sup>\*5</sup>。屈折率  $n$ 、長さ  $l$  の媒質中での光路長は  $nl$  となるので、phase plate のくぼみの深さを  $d$ 、probe 光の波長を  $\lambda$  とすると、くぼみに入射した光とガラス中を進む光の光路長の差が  $\lambda/4$  になるには、

$$1.453d - d = \frac{\lambda}{4} \quad (2.7)$$

を満せばよい。probe 光には  $\lambda = 767\text{nm}$  の光を用いるので、くぼみの深さは  $d = 423\text{nm}$

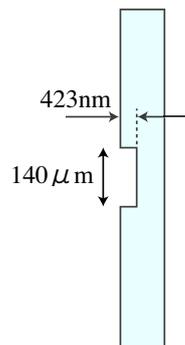


図 2.6 phase plate の仕様

となる。くぼみ部分の直径は小さい方がよいが<sup>\*6</sup>、実際に光学系を配置する際のことを考えて  $140\mu\text{m}$  としてある。

phase plate は製品として売っていないので、東京大学大学院工学系研究科産業機械工学専攻 中尾・濱口研究室所属の長藤圭介氏に集束イオンビーム (FIB, Focused Ion Beam) によって phase plate を加工していただいた。FIB とはイオン (主に Ga が用いられる) を電場によって加速してビーム状に細くしぼったもので、イオンビームにより試料表面の原子をはじきとばし、試料を削ることができる。イオンビームは数  $100\text{nm}$  から数  $\text{nm}$  まで絞ることができるので、ナノ領域での加工が可能である。

長藤氏には  $\lambda/4$  の phase plate を 2 枚、 $\lambda/12$  の phase plate<sup>\*7</sup> を 3 枚作っていただいた。今回の実験では  $\lambda/4$  の phase plate を 2 枚と、 $\lambda/12$  の phase plate を 1 枚用いた。図 2.7 に phase plate の詳細を示す。

測定には触針式段差計が用いられている。図を見ると、全体的にうねりが見られるが、これは触針式段差計で測定する際の針の送り機構のガタによるものと考えられる。

<sup>\*5</sup> シグマ光機による測定。

<sup>\*6</sup> もちろん、回折限界より小さくしてしまったら probe 光をくぼみの中に集光できないので、回折限界よりは大きくあるべきである。

<sup>\*7</sup> object として使う以外の使い道は特にない。

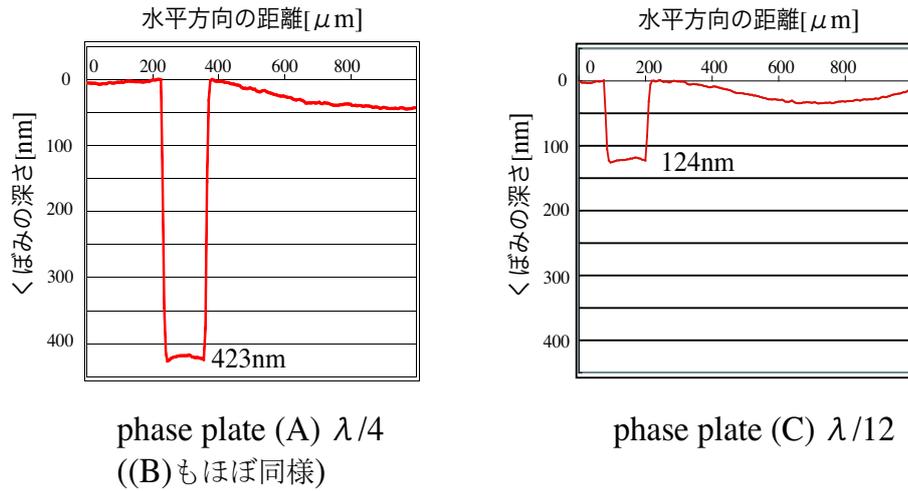


図 2.7 phase plate の詳細

## 2.2 PCI の実験

PCI を用いると probe 光が object によって散乱されたときの phase shift が見えることが分かった。したがって、phase plate を PCI によって imaging すれば、中央のくぼみの形状や深さを反映した image が得られるはずである。そこで、原子気体を PCI によって imaging する前に予備実験として、phase plate の PCI を行う。

### 2.2.1 実験のセットアップ

図 2.8 に PCI を用いて phase plate の imaging を行うための光学系を示す。

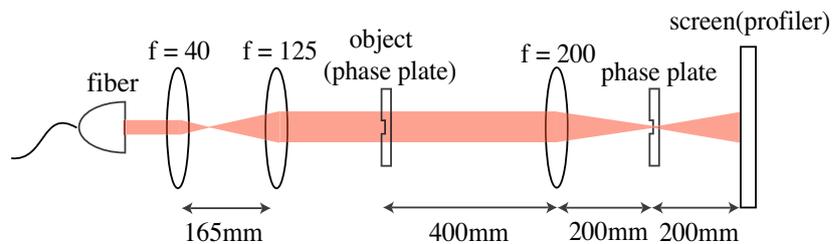


図 2.8 PCI の光学系

まず最初に 2 枚のレンズを用いて probe 光のビーム径を大きくし、その後 phase plate を object として PCI を行う。この imaging 系の倍率は 1 であるので、screen 上に直径  $140\mu\text{m}$  の円形の image が得られると期待される。

probe 光のビーム径の算出 PCIを行うためには probe 光を phase plate の中央のくぼみに focus しなければならないが、そのために必要なビーム径を算出する。レーザー光は通常ガウシアンビームの形をとっており、次のような強度分布をもっている。

$$I(z, r) = \frac{2P}{\pi w(z)^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w(z)^2}\right) \quad (2.8)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \sim \frac{\lambda z}{\pi w_0} \quad (2.9)$$

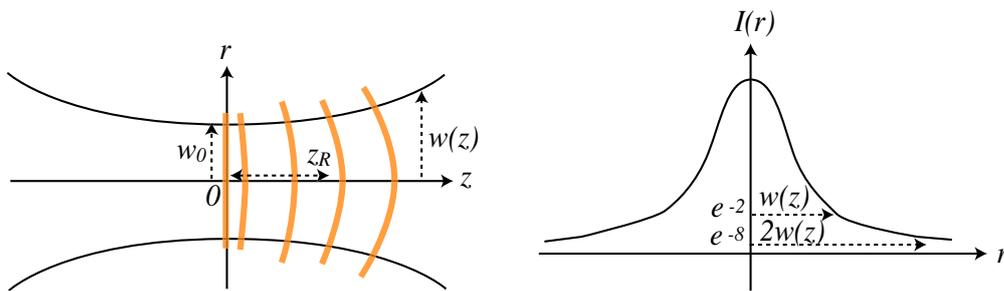


図 2.9 ガウシアンビーム

ここで、 $w(z)$  はガウシアンビームの半径である。特に  $w_0$  をビームウェスト半径といい、これはガウシアンビームが focus されている点での半径である。 $z_R = \frac{w_0^2 \pi}{\lambda}$  をレーリーレンジといい、ガウシアンビームが実効的に平行光と見なせる範囲を示している。

半径  $w(z)$  の円内にはガウシアンビームの全パワー  $P$  の 86.47 % が入っており、半径  $2w(z)$  の円内には 99.97 % のパワーが入っている。したがって、 $2w_0$  が phase plate のくぼみの半径  $70\mu\text{m}$  以下になるようにすれば十分である。

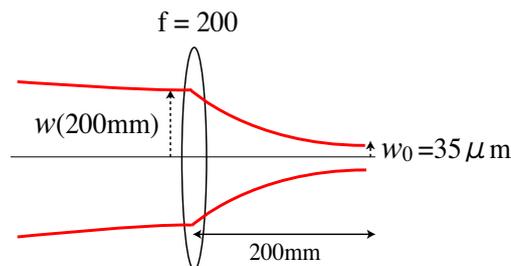


図 2.10 レンズによるガウシアンビームの集光

図 2.10 から分かるように、レンズによってガウシアンビームのビームウェストの位置と

大きさが変化する。 $w_0 = 35\mu\text{m}$  となるのに必要なビーム径は式 (2.9) より、

$$w(200\text{mm}) = \frac{767\text{nm}}{\pi \cdot 35\mu\text{m}} 200\text{mm} \\ \sim 1.4\text{mm}$$

となるので、probe 光の直径として 2.8mm 以上必要である。fiber から出てきた直後の probe 光の直径は 1mm 程度であったので、 $f=40\text{mm}$  と  $f=125\text{mm}$  のレンズを組み合わせ、ビーム径を  $125\text{mm}/40\text{mm} \sim 3$  倍程度大きくした。

phase plate の配置 probe 光を phase plate のくぼみ部分にしっかりと focus させる方法について述べる。

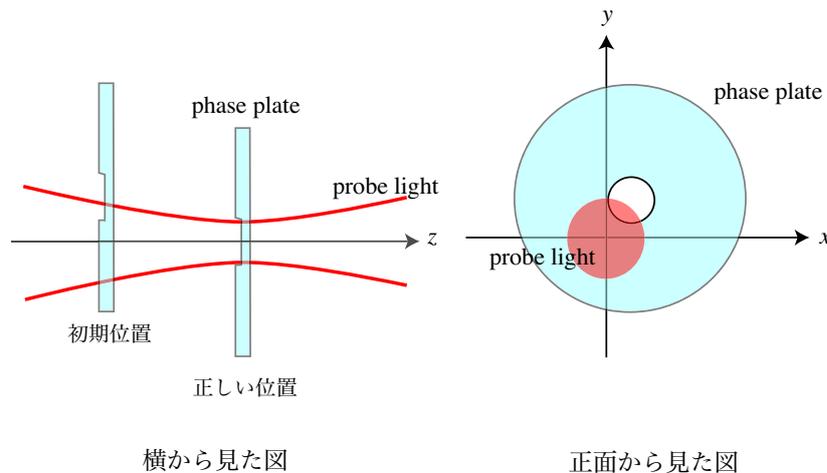


図 2.11 phase plate の配置

1. 最初から phase plate を正しい位置に配置するのは難しいので、あえて focus の位置から  $z$  方向にずらし、phase plate のくぼみ部分をおおまかに probe 光に合わせる。このとき、probe 光が phase plate のくぼみ部分をかすっていたら、screen に同心円状の干渉縞が見えるので、干渉縞が見えるように調整する。
2. phase plate の  $x, y$  方向の位置を調整して、同心円状の干渉縞の中心が見えるようにする。
3. phase plate を  $z$  方向に動かすと、干渉縞の同心円の間隔が変化する。focus の位置に近づくと干渉縞の間隔が広がるので、最も広くなる場所に調整する。probe 光がすべて phase plate のくぼみ部分に入射していれば干渉縞は見えなくなる。

profiler 今回の実験では screen として DataRay 社の CCD beam profiler WimCamD を用いた。この profiler には専用のソフト DataRay が付いており、このソフトを通じて image を PC 上で見ることができる。また、得られた image をテキストファイルに変換することができるので、画像をグラフ化するにはこのテキストファイルを Excel で読み込んで処理することができる。

### 2.2.2 実験結果

図 2.7 に示した phase plate(A)、(B)、(C) を組み合わせて PCI の実験を行った。表 2.1 に phase plate の組み合わせを示す。

表 2.1 phase plate の組み合わせ

| 組み合わせの名前 | object として使う phase plate | PCI を行う phase plate |
|----------|--------------------------|---------------------|
| EX1      | (C)                      | (A)                 |
| EX2      | (B)                      | (A)                 |

EX1 と EX2 において PCI を行ったときに profiler によって得られた image を図 2.12 に示す。

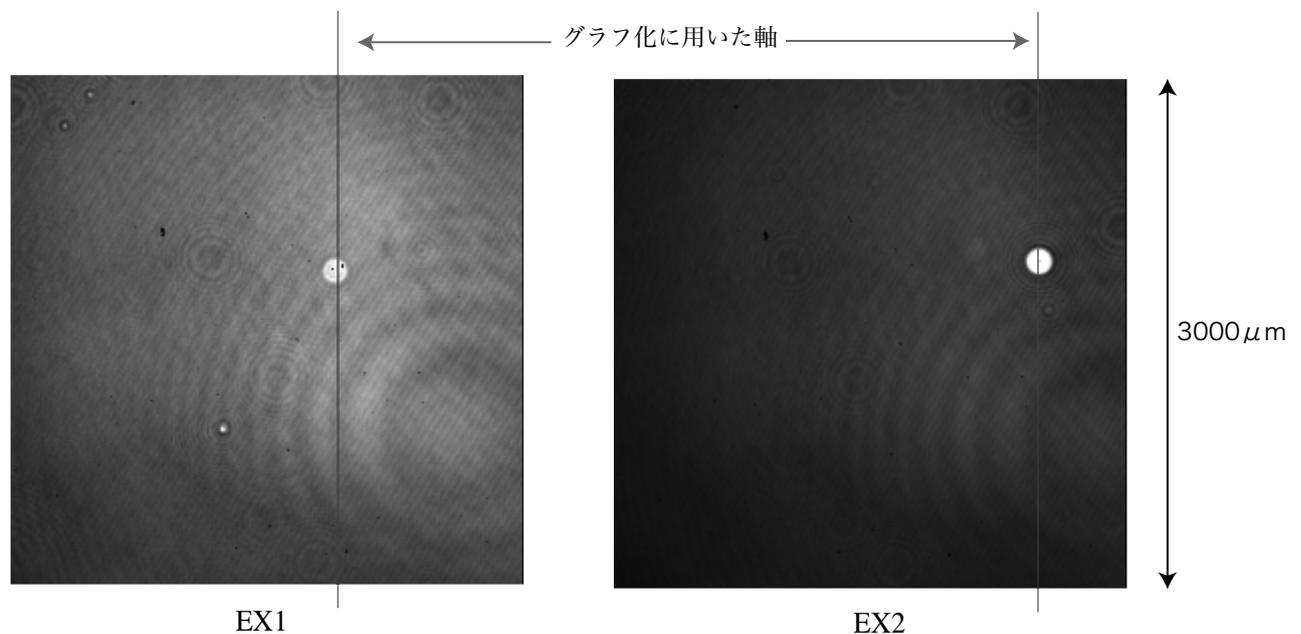


図 2.12 PCI によって得られた image

phase plate のくぼみの形をそのまま反映した円形の image が得られた。図 2.5 の phase plate の写真を見てもくぼみ部分はまったく見えないが、PCI を用いるとくぼみ部分の image、つまりくぼみ部分の phase shift がしっかりと目で見て分かるようになった。Absorption Imaging では phase shift は見えないので、これが PCI の利点の一つである。

これらの組み合わせにおいて、式 (2.5) から期待されるコントラスト  $I_{PC}/I_0$  を計算する。まず、phase plate の透過率  $t$  を求める。

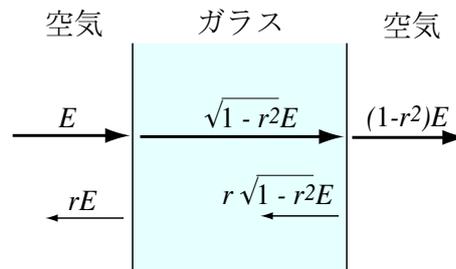


図 2.13 透過率  $t$  の導出

phase plate に用いたガラスの屈折率は 1.453 であるので、空気からガラスに光が入射したときの (振幅に関する) 反射率  $r$  は、

$$r = \left| \frac{n-1}{n+1} \right| = 0.185 \quad (2.10)$$

となる。

光は空気からガラスに入射した後、ガラスから空気にもた入射していく。したがって、phase plate の正味の透過率は  $t = 1 - r^2 = 0.966$  となる。この透過率と式 (2.5) から EX1 と EX2 における image のコントラストは、

$$\begin{aligned} I_{PC}/I_0 &= 2.23 & (\text{EX1} : \phi = \frac{\pi}{6}) \\ &= 4.87 & (\text{EX2} : \phi = \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

と期待される。

この image を定量的に評価するために以下の手順でデータを処理した。

1. object(phase plate) ありのときの光の強度  $I_{PC}$  と object なしのときの光の強度  $I_0$  を profiler を用いて測定し、それぞれ 20 回の平均値を求める。平均操作は DataRay に組み込まれているので、それを利用する。
2. それぞれをテキストファイルにして Excel に取り込み、割り算  $I_{PC}/I_0$  を行う。割り算を行うことによって、余計な干渉縞などを低減することができる。

3. phase plate のくぼみ部分の中央を通る軸に関して  $I_{PC}/I_0$  をグラフ化する。ここで、1pixel あたり  $11\mu\text{m}$  である。今回は図 2.12 に示す縦軸に関してグラフを作った。

このようにして得られたグラフを図 2.14 に示す。

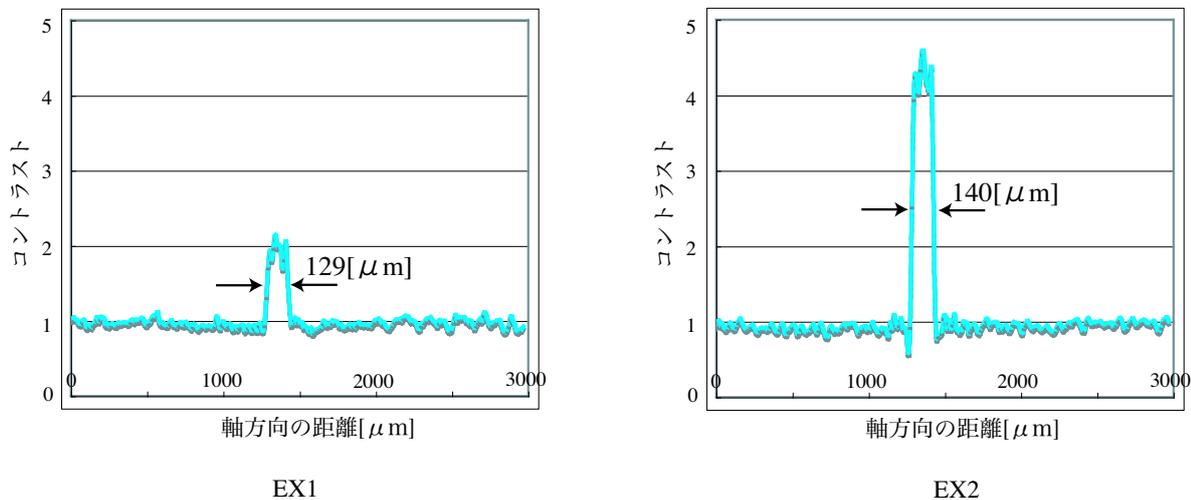


図 2.14 PCI による image のグラフ

このグラフの半値全幅を求めてみると、EX1 では  $129\mu\text{m}$ 、EX2 では  $140\mu\text{m}$  であった。profiler の分解能が 1pixel あたり  $11\mu\text{m}$  であるので、その程度の誤差を考慮すると、phase plate の設計値である  $140\mu\text{m}$  に近い値を得ることができた。

$I_{PC}/I_0$  の平均値を image のデータから求めるたものと、理論値の比較を表 2.2 に示す。

表 2.2 PCI の実験結果

| phase plate の組み合わせ | $I_{PC}/I_0$ の実験値 | $I_{PC}/I_0$ の理論値 | 実験値と理論値の比       |
|--------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| EX1                | $1.84 \pm 0.15$   | 2.23              | $0.83 \pm 0.07$ |
| EX2                | $4.15 \pm 0.33$   | 4.87              | $0.85 \pm 0.07$ |

この表から分かるように、測定で得られたコントラスト比は理論値よりも 15 % ほど小さかった。どちらの実験結果でもほぼ同じ割合だけ理論値よりも小さいので、この誤差はこの実験系に起因する誤差であると考えられる。

誤差についての考察 式 (2.5) を導出する時に、object による散乱光はすべて phase plate のくぼみに入らず、そのまま通過すると考えて計算している。しかし、図 2.15 を見ると、散乱光の一部は phase plate のくぼみに入射しており、probe 光と同様に  $\lambda/4$  だけ位相が進んでしまう。すると散乱光は probe 光と干渉せず、理論で予想されるコントラストよりも小さく観測されると考えられる。

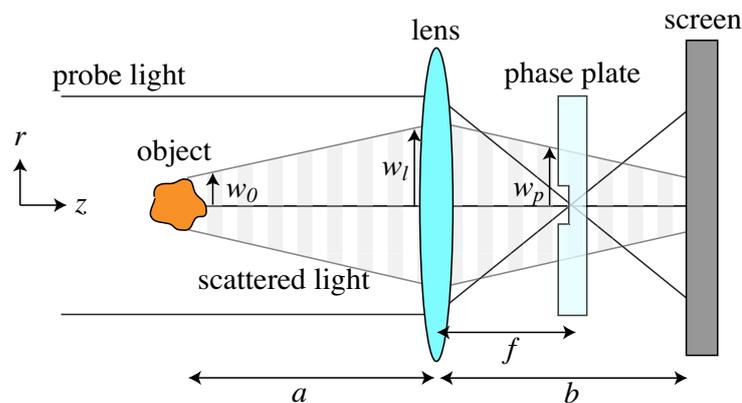


図 2.15 PCI における誤差

object に散乱された直後の光の半径を  $w_0$  とする。散乱された光もまたガウシアンビームであると仮定すると、散乱光のレンズ位置での半径は式 (2.9) から、

$$w_l = w(a) \sim \frac{\lambda a}{\pi w_0}$$

と求められる。この imaging 系の倍率は  $b/a$  であるので、screen 上での散乱光の半径は、object に散乱された直後の光の半径を  $b/a$  倍した  $\frac{b}{a}w_0$  となる。図 2.16 から、phase

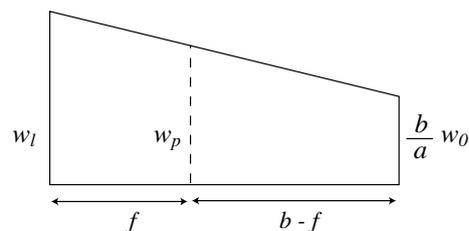


図 2.16 phase plate の位置におけるビーム径の算出

plate の位置における散乱光のビーム径  $w_p$  は相似の関係を用いて、

$$w_p = \frac{f}{a}w_0 + \frac{b-f}{b}w_l \quad (2.11)$$

と求められる。今回の実験のパラメータ  $a=400\text{mm}$ 、 $b=400\text{mm}$ 、 $f=200\text{mm}$ 、 $w_0 = 70\mu\text{m}$ 、 $\lambda = 767\text{nm}$  を代入すると  $w_p = 735\mu\text{m}$  が得られる。phase plate のくぼみ部分に入射する光のパワーは、式 (2.8) をくぼみ部分の領域に関して積分することによって、

$$\begin{aligned} P_{\text{loss}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{w_0} \frac{2P}{\pi w_p^2} e^{-\frac{2r^2}{w_p^2}} r dr d\theta \\ &= P \left(1 - e^{-\frac{2w_0^2}{w_p^2}}\right) \\ &\sim 0.018P \end{aligned}$$

となる。したがって、object に散乱された光が phase plate のくぼみ部分に入射することによるロス は 1.8 % 程度である。このロスを防ぐには phase plate の位置における散乱光の半径を大きくすればよいのだが、それには  $a$ 、 $b$ 、 $f$  といったパラメータをなるべく大きくとればよい。

実際の誤差は 15 % ほどあり、散乱光が phase plate のくぼみに入射することによる誤差だけでは説明できない。誤差の要因として、この他にもレンズの収差や、光学系に付着した汚れによる干渉縞などが考えられるが、主な要因は今のところ不明である。

### 2.2.3 PCI のまとめ

phase shift が  $\pi/6$ 、 $\pi/2$  である phase plate を PCI によって imaging することに成功し、PCI によって object の phase shift が見えることを実証できた。表 2.2 を見ると、PCI を用いて object の phase shift を測定すると 15 % 程度小さい値が結果として得られる。この誤差の要因については今だ分かっていない。

PCI を BEC に適用する場合、その主な目的は BEC のダイナミクスを観察することにある。また、Absorption Imaging を行う系と PCI を行う系の違いは phase plate を入れるかどうかだけであり、簡単に変更が可能である。つまり、BEC の原子数の厳密な評価は Absorption Imaging によって行い、PCI ではダイナミクスの観察を行うというような使い分けをすることによって、幅広く BEC の特性を調べることができる。

## 2.3 原子と光の相互作用

Absorption Imaging や PCI による image からは、object の透過率  $t$ 、phase shift  $\phi$  が得られる。これらの量が冷却原子気体の共鳴周波数や密度、probe 光の周波数にどのように依存しているかを知る為には、原子と光の相互作用について考察しなければならない [11,12]。したがって、この節では原子と光の相互作用の扱いについて述べ、PCI を行うのに適した probe 光の条件について考察する。

### 2.3.1 複素屈折率と透過率、phase shift の関係

一般に、物質の屈折率は吸収などの光学的性質は複素屈折率  $n_{ref}$  によって表される。この節では、複素屈折率を導入し、物質の透過率と phase shift との関係を示す。

中性誘電媒質中の Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.17)$$

である。 $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  は分極であり、電場の強さが十分に弱い時、分極  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  は電場に比例すると考えて、

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = n\alpha(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.18)$$

とする。ここで  $n$  は原子の密度であり、比例係数  $\alpha(\omega)$  を複素分極率と言う。また磁性の効果は十分に小さいと考えてよいので、透磁率として真空中の透磁率を用いた。電場が満たすべき波動方程式を見つけるために、式 (2.14) の両辺の rotation をとり、式 (2.15) と式 (2.16) を代入すると、

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

が得られる。電場は横波なので  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$  を使った<sup>\*8</sup>。電場として  $x$  方向にすすむ単

<sup>\*8</sup> これは誘電率  $\epsilon(\omega) \neq 0$  である場合に正しい。今回は  $\epsilon(\omega) = 0$  となる状況は考えないので、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  が常に横波であると考えてもよい。

色平面波を考えると、

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.20)$$

となる。これを式 (2.19) に代入すると  $k$  と  $\omega$  の分散関係

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{n\alpha(\omega)}{\epsilon_0} \right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \{n_{ref}(\omega)\}^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

が得られる。ここで導入した  $n_{ref}(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$  を複素屈折率<sup>\*9</sup>と言う。この複素屈折率を用いると媒質中の電場は、

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{i(n_{ref}\omega x/c - \omega t)} \\ &= E_0 e^{-n_I\omega x/c} e^{i(n_R\omega x/c - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。複素屈折率の実部は波の波長や速度を変化させるので、通常の屈折率と同じものであり、虚部は波の振幅を減衰させるので誘電媒質による吸収を表している。このように、複素誘電率を導入することにより、物質の屈折率と吸収を同時に表すことができる。ここで、原子気体が十分希薄なとき ( $\frac{n\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$ ) を考えると、

$$n_{ref} = \sqrt{1 + \frac{n\alpha}{\epsilon_0}} \sim 1 + \frac{n\alpha}{2\epsilon_0} \quad (2.23)$$

が得られる。

また、物質の厚さを  $d$  とすると、透過率  $t$  と phase shift  $\phi$  は、

$$\begin{aligned} t &= e^{-n_I\omega d/c} \\ \phi &= -\frac{\omega}{c}(n_R - 1)d \end{aligned} \quad (2.24)$$

と表される。したがって、物質の複素屈折率を求めれば、それから透過率と phase shift が得られる。

### 2.3.2 2 準位原子と光の相互作用

原子の複素屈折率を求めるためには、原子が光に対してどのように応答するかを求めなければならない。そこで、まず最も単純なモデルである 2 準位原子と単一モードの光の相互作用を考察する。

一般に、原子は複雑なエネルギー準位構造をもっている。しかし、光との相互作用によって状態の遷移を起こす場合には、その遷移の共鳴周波数にほぼ等しい周波数の光だけ

<sup>\*9</sup> 物質の密度  $n$  との混合を避けるために  $n_{ref}$  と書く。

を吸収・放出する。したがって、光との相互作用を考える時にはその2つの準位だけを考えればよく、2準位原子モデルがよい近似で成り立つ。

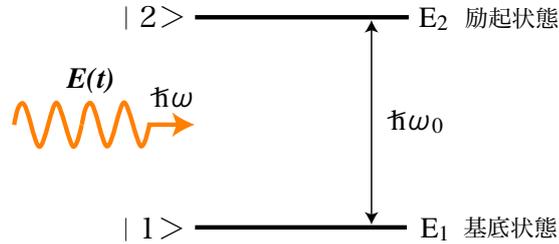


図 2.17 2 準位原子モデル

2 準位原子のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| \quad (2.25)$$

とかける。ここで、 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  はそれぞれ基底状態と励起状態の固有状態であり、 $E_1$ 、 $E_2$  は固有エネルギーである。原子の双極子モーメントを  $\hat{\mu} = \mu(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$ 、光の電場を  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  とすると<sup>\*10</sup>、原子と光の相互作用ハミルトニアンは、

$$\hat{H}_I(t) = -\hat{\mu} \cdot E(t) = -\frac{\mu \cdot E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (2.26)$$

で与えられる。また、系全体のハミルトニアンは  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)$  で与えられる。この問題ではハミルトニアンが時間に依存するので、時間に依存する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (2.27)$$

を解く必要がある。いま、状態ベクトル  $|\Psi(t)\rangle$  の形として

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|2\rangle \quad (2.28)$$

を仮定する<sup>\*11</sup>。これを Schrödinger 方程式 (2.27) に代入すると、

$$i\hbar \dot{c}_1(t) = -\frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t})c_2(t) \quad (2.29)$$

$$i\hbar \dot{c}_2(t) = -\frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t})c_1(t) \quad (2.30)$$

となる。 $\Omega = \frac{\mu \cdot E_0}{\hbar}$  を Rabi 周波数、 $\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$  を共鳴周波数という。また、離調と呼ばれる量を  $\delta = \omega - \omega_0$  で定義する。ここで、角周波数  $\omega + \omega_0$  で振動する速い項は、

<sup>\*10</sup> ここでの扱いは電気双極子近似と呼ばれるものである。また、 $\mu$  は実数であるとして一般性を失わない。

<sup>\*11</sup> 相互作用表示をとっているのと同様である。

原子と光が相互作用する時間スケールでみると平均して0になってしまう。したがって、この速く振動する項を無視してしまうと\*12、

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{c}_1(t) &= -\frac{\hbar\Omega}{2}e^{i\delta t}c_2(t) \\ i\hbar\dot{c}_2(t) &= -\frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\delta t}c_1(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

が得られる。この方程式を初期条件  $c_1(t=0) = 1$ 、 $c_2(t=0) = 0$  の元で解くと、

$$c_1(t) = e^{i\frac{\delta}{2}t} \left\{ \cos \frac{W}{2}t - i\frac{\delta}{W} \sin \frac{W}{2}t \right\} \quad (2.32)$$

$$c_2(t) = ie^{-i\frac{\delta}{2}t} \frac{\Omega}{W} \sin \frac{W}{2}t \quad (2.33)$$

が得られる。ここで、 $W = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$  を章動周波数という。電子が各状態をとる確率は Born の確率規則により  $|\langle i|\Psi(t)\rangle|^2$  ( $i = 1, 2$ ) で与えられるので、

$$\begin{aligned} |c_1(t)|^2 &= \cos^2 \frac{W}{2}t + \frac{\delta^2}{W^2} \sin^2 \frac{W}{2}t \\ |c_2(t)|^2 &= \frac{\Omega^2}{W^2} \sin^2 \frac{W}{2}t \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる。

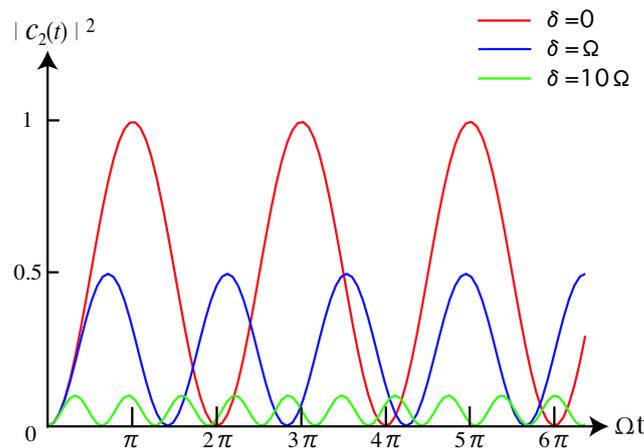


図 2.18 様々な離調に対する Rabi 振動

2 準位原子が光と相互作用をすると、図 2.18 のように励起状態と基底状態の間を行ったり来たり振動する Rabi 振動という現象が見られる。離調  $\delta$  が大きくなると、遷移確率の振幅が小さくなるのが分かる。つまり、電子が基底状態から励起状態に遷移する場合

\*12 回転波近似と言う。

には、原子の共鳴周波数  $\omega_0$  に近い周波数の光をよく吸収する。逆に、励起状態にいる電子に共鳴周波数に近い光が入射すると、その光と同じ周波数の光を放出して基底状態に遷移する。この過程をそれぞれ光の吸収過程、誘導放出過程と言う<sup>\*13</sup>。

### 2.3.3 自然放出の Einstein による現象論的取り扱い

先ほどの2準位原子モデルと光の相互作用の問題では、電子の状態が準位間を振動する Rabi 振動という現象が見られた。このモデルでは電子が励起状態にいるときに光の入射を止めてしまうと、その後もずっと電子は励起状態に居続けることになる。しかし、現実には光を入射しなくとも、励起状態にいる電子は光を放出して有限の時間内に基底状態に遷移する。このような過程を自然放出過程と言う。

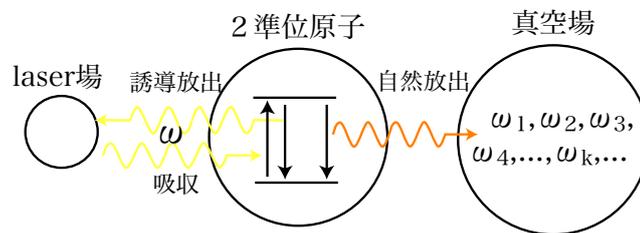


図 2.19 吸収・誘導放出・自然放出

実際の原子は先ほどのような特定のモードの光以外の、真空場のモードとも相互作用している。励起状態にいる電子はこの真空場と相互作用することにより、真空場のあるモードの光を放出して基底状態に遷移する。このとき、真空場のモードの数は無限であるので、放出された光のモードと原子が再び相互作用する確率は限りなく小さく、そのために不可逆な過程となっている。

このような考え方で自然放出を取り扱うことができるが、それには光の量子化などの手法が必要であり、その解説には手間がかかりすぎる。そこで、今回は Einstein による自然放出の現象論的取り扱いについて解説する。

Einstein の A 係数と B 係数 Einstein は 2 準位原子と電磁場の熱平衡状態を考察することにより、自然放出の必然性を証明し、自然放出が起きるレートを定めた。2 準位原子によって囲まれた空洞を作り、それを温度  $T$  の環境と接触させることにより、熱平衡状態を実現させる。このとき、空洞中の電磁波のエネルギー密度分布  $\rho(\omega)d\omega$  は、空洞輻射に関する Kirchhoff の定理<sup>\*14</sup>から、黒体輻射のエネルギー密度と等しい。ここで、Plank

<sup>\*13</sup> 光を量子化した上でここでの議論をもう一度行くと、光の吸収・放出が起きていることが明確に分かる。

<sup>\*14</sup> Kirchhoff の定理とは、任意の物質で囲った空洞が温度  $T$  の熱平衡状態にあるとき、その空洞に平衡状態を乱さない程度に小さい穴をあけると、そこから放出される電磁波のエネルギー密度は黒体輻射のもの

による黒体輻射の式は、

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1} d\omega \quad (2.35)$$

である。

また、2準位原子は温度  $T$  の熱平衡状態にあるので、基底状態の原子数を  $N_1$ 、励起状態の原子数を  $N_2$  とすると、統計力学のカノニカルアンサンブルによる取り扱いによって、

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp(-\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}) \quad (2.36)$$

が得られる。この2つの式は統計力学や熱力学、実験事実と整合しているので、この式を基礎にして自然放出についての考察を進める。

まず最初に、2準位原子は光の吸収と誘導放出のみ行うと仮定する。吸収・誘導放出過程は光が入射した時だけ生じるので、これらの過程が単位時間当りに起きる割合は共鳴周波数  $\omega_0$  の光のエネルギー密度  $\rho(\omega_0)$  に比例すると考えてよい<sup>\*15</sup>。そこで、Einstein の

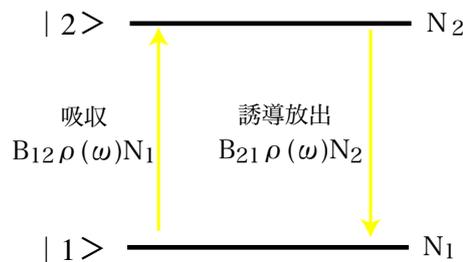


図 2.20 Einstein の B 係数

B 係数というものを導入して  $B_{12}\rho(\omega_0)$  を吸収レート、 $B_{21}\rho(\omega_0)$  を誘導放出レートとすると、図 2.20 より基底状態と励起状態の原子数の時間変化は、

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -B_{12}\rho(\omega_0)N_1 + B_{21}\rho(\omega_0)N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= B_{12}\rho(\omega_0)N_1 - B_{21}\rho(\omega_0)N_2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

というレート方程式で与えられる。ここで、吸収・誘導放出レートの比例係数として導入した B 係数は、2準位原子の性質だけで決まる定数である。熱平衡状態では  $N_1$ 、 $N_2$  は時間変化しない定常状態 ( $\frac{dN_i}{dt} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ) にあると考えられるので、レート方程式の定

同じである、というものである。

\*15 このことは次の節『吸収・誘導放出・自然放出レートの計算』にて正当化する。

常解を求めると基底状態と励起状態の原子数の比は、

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}}{B_{21}} = \text{const} \quad (2.38)$$

となり、温度に依存しない定数となる。ここで、式 (2.36) と比較すると明らかに異なる結果を導いてしまっていることが分かる。この時、信頼すべき式は統計力学的な考察によって求めた式 (2.36) のほうである。したがって、吸収・誘導放出過程とレート方程式による2準位原子の平衡状態の理論はどこかに間違いがあると考えられる。

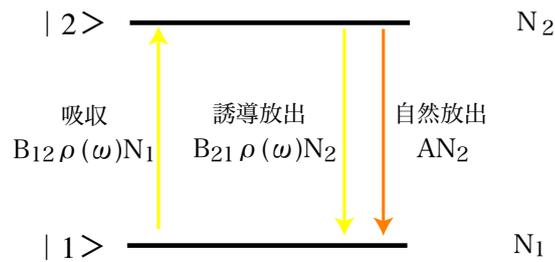


図 2.21 Einstein の A 係数

Einstein は、励起状態の原子は光を入射しなくても有限の時間内に光を放出して基底状態に遷移するという自然放出過程を取り入れる必要があることを提案した。自然放出過程は光が入射しているかどうかに関わらず生じるので、自然放出レートとして2準位原子の性質だけで定まる Einstein の A 係数を導入する。吸収・誘導放出過程、自然放出過程の3つの過程をすべて含めて再びレート方程式を立てると、

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -B_{12}\rho(\omega_0)N_1 + B_{21}\rho(\omega_0)N_2 + AN_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= B_{12}\rho(\omega_0)N_1 - B_{21}\rho(\omega_0)N_2 - AN_2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

が得られる。レート方程式を定常状態について解くと、

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\rho(\omega_0)}{B_{21}\rho(\omega_0) + A} \quad (2.40)$$

が得られる。この式と式 (2.35)、(2.36) が矛盾なく成立する為には Einstein の A 係数と B 係数が、

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{21} \\ \frac{A}{B_{12}} &= \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2c^3} \end{aligned} \quad (2.41)$$

を満たせば良い。このように、2準位原子と空洞輻射の平衡状態を考察することにより、自然放出過程が必然であることが示され、また吸収・誘導放出レートと自然放出レートの関係が得られた<sup>\*16</sup>。

吸収・誘導放出・自然放出レートの計算 この節では先ほど出てきた Einstein の A 係数と B 係数の具体的な計算を行う。まず、基底状態の原子が光と相互作用して励起状態に遷移するレート、つまり吸収レートを考える。それには式 (2.34) の励起準位の存在確率  $|c_2(t)|^2$  を用いる。いま、原子と相互作用をする光が十分弱く  $\Omega/\delta \ll 1$  であるような状況を考える。このとき、Rabi 振動の式は、

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega^2}{\delta^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}t\right) = \frac{|\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}_0|^2}{\hbar^2 \delta^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}t\right) \quad (2.42)$$

と近似される。

現実の光はある程度の周波数の幅を持っているので、2準位原子に入射する光の周波数は原子の共鳴周波数  $\omega_0$  の付近で  $\Delta\omega$  程度の広がりを持ち、そのエネルギー密度は  $\rho_E(\omega)$  であるとする。光の周波数が広がっている効果を取り入れるためには式 (2.42) を、入射する光の周波数に関して積分してしまえばよく、

$$|c_2(t)|^2 = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{|\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}_0|^2}{\hbar^2 \delta^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}t\right) d\omega \quad (2.43)$$

を得る。ここで、光の電場のエネルギー密度は  $\frac{1}{2}\epsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 = \rho_E(\omega)$  であるので、 $\mathbf{E}_0$  の偏光方向を  $\mathbf{e}$  とすると、

$$|c_2(t)|^2 = \frac{2|\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \rho_E(\omega) \frac{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}t\right)}{\delta^2} d\omega \quad (2.44)$$

となる。図 2.22 を見れば分かるように、 $\sin^2 \frac{\delta}{2}t/\delta^2$  は  $|\delta| < 2\pi/t$  を満たす範囲内でのみ大きな値をとる。また、十分長い時刻  $t$  をとることにより、 $\sin^2 \frac{\delta}{2}t/\delta^2$  はデルタ関数的な振る舞いをするので、 $\rho_E(\omega)$  を  $\omega = \omega_0$  での値として積分の外に出せる。そして  $|\delta| < 2\pi/t$  以外の領域では値がほとんど 0 なので、積分範囲を  $[-\infty, \infty]$  まで拡大すると、

$$|c_2(t)|^2 = \frac{2|\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho_E(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}t\right)}{\delta^2} d\omega = \frac{\pi |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho_E(\omega_0) t \quad (2.45)$$

が得られる。

<sup>\*16</sup> 上の議論では光の量子化などはいっさい用いずに自然放出を導出しているように見える。しかし、この議論の出発点となる Plank の黒体輻射の式は、光の量子化を行うことによって初めて導かれるものである。したがって、今回の Einstein による自然放出の導出にも、その背後には光の量子化の考えが潜んでいる。

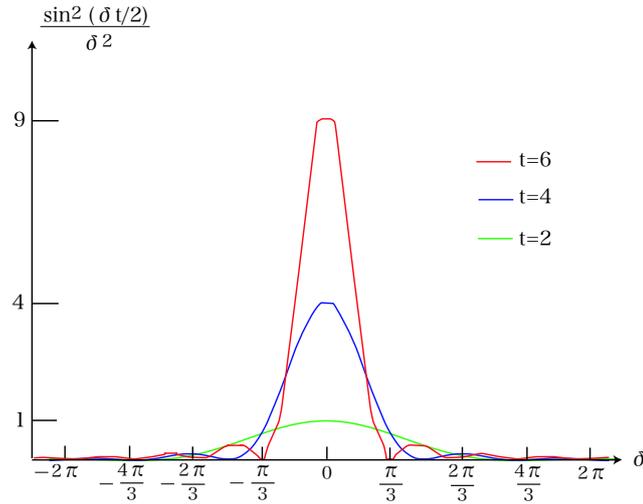


図 2.22  $\sin^2 \frac{\delta t}{2} / \delta^2$  のグラフ

いま、原子の双極子モーメントの向きはバラバラであるとして、その平均値を用いることにする。2準位原子の双極子モーメントと光の電場の偏光方向の成す角を  $\theta$  とし、全方向に関して  $|\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}|^2 = \mu^2 \cos^2 \theta$  の平均値を求めると、

$$\langle \mu^2 \cos^2 \theta \rangle = \frac{\mu^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{1}{3} \mu^2 \quad (2.46)$$

が得られる。

結局、励起状態の原子の存在確率は、

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\pi \mu^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho_E(\omega_0) t \quad (2.47)$$

となるので、これを微分することにより、単位時間当りに光を吸収して基底状態から励起状態へ遷移する原子の割合である吸収レートが、

$$\frac{d}{dt} |c_2(t)|^2 = \frac{\pi \mu^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho_E(\omega_0) \quad (2.48)$$

と得られた。ここで、吸収レートが光のエネルギー密度に比例していることが分かる。このことから、前節で光の吸収・誘導放出レートは光のエネルギー密度に比例するとした仮定が正しかったことが分かる。さらに、この式と式 (2.41) から Einstein の A 係数と B 係数を求めると、

$$B_{12} = B_{21} = \frac{\pi \mu^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \quad (2.49)$$

$$A = \frac{\mu^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 c^3 \hbar} \quad (2.50)$$

となる。ここで、自然放出が起こるレートを表す A 係数をあらためて、自然放出の線幅  $\Gamma$  ということにする。線幅は  $\Gamma = \mu^2 \omega_0^3 / 3\pi \epsilon_0 c^3 \hbar$  であり、この逆数は励起状態の寿命を表している。

### 2.3.4 密度行列と原子の分極

この節では、本来の目的である原子の分極を計算して複素屈折率を求めたい。そのために、自然放出をも含めた 2 準位原子の取り扱いについて、まず説明する。

**密度行列** 光の吸収や誘導放出では、原子は光のある特定のモードとだけ相互作用しており、光を吸収しては放出するサイクルを繰り返すため、そのモードの光と原子のエネルギーは保存する。このような相互作用をコヒーレントな相互作用という。それに対して、自然放出では無限個のモードを持つ真空場に光を捨て、再びその光を吸収することはないため、エネルギーの散逸が生じる。このような散逸をデコヒーレンスと言う。散逸が生じる場合、その原因は主に不確定なものなので（自然放出の場合は真空場のゆらぎ）、原子の状態を完全に知ることができなくなる。つまり、散逸が生じる場合は、系の状態は純粋状態を書くことができず、混合状態を書かなければならない。混合状態を記述するために密度行列を導入する。

2 準位原子の状態ベクトル  $|\Psi(t)\rangle$  を用いて、密度演算子  $\hat{\rho}(t)$  を

$$\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| \quad (2.51)$$

と定義する。この密度演算子を基底ベクトル  $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  を用いて行列表示すると、

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_1(t)|^2 & c_1(t)c_2^*(t)e^{i\omega_0 t} \\ c_1^*(t)c_2(t)e^{-i\omega_0 t} & |c_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

となる。これを密度行列という。ここで、波動関数の規格化条件  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$  から  $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ 、が得られる。

この密度行列が満たすべき時間発展の方程式を求めたいのだが、それには式 (2.31) を利用する。しかし、この方程式には自然放出の効果が取り入れられていないので、自然放出の効果を現象論的に手で入れてやることにする。いま自然放出を考えると、2 準位原子に光を入射しない場合、励起状態の原子数は  $\frac{d}{dt} |c_2(t)|^2 = -\Gamma |c_2(t)|^2$  に従って減少する。したがって、式 (2.31) において、自然放出の効果を取り入れるには、

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{\Omega}{2i} e^{-i\delta t} c_1(t) - \frac{\Gamma}{2} c_2(t) \quad (2.53)$$

のように方程式を書き換えれば良い。密度行列の成分  $\rho_{22}$  の時間微分を取り、式 (2.53) を

用いると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{22} &= \dot{c}_2^*c_2 + c_2^*\dot{c}_2 \\ &= \frac{\Omega}{2i}(e^{i\delta t}c_1^*c_2 - e^{-i\delta t}c_1c_2^*) - \Gamma|c_2|^2 \\ &= \frac{\Omega}{2i}(\rho_{21}e^{i\omega t} - \rho_{12}e^{-i\omega t}) - \Gamma\rho_{22}\end{aligned}\quad (2.54)$$

が得られる。 $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$  から、 $\rho_{11} = -\rho_{22}$  である。ここで、これからの計算を簡単にする為に  $\sigma_{12} = \sigma_{21}^* = \rho_{12}e^{-i\omega t}$  を導入する。この時間微分を取り、式 (2.31) の  $c_1$  に関する方程式と式 (2.53) を用いると、

$$\frac{d}{dt}\sigma_{12} = -\frac{\Omega}{2i}(\rho_{22} - \rho_{11}) - \left(\frac{\Gamma}{2} + i\delta\right)\sigma_{12}\quad (2.55)$$

が得られる。また、この式の複素共役をとることにより、

$$\frac{d}{dt}\sigma_{21} = \frac{\Omega}{2i}(\rho_{22} - \rho_{11}) - \left(\frac{\Gamma}{2} - i\delta\right)\sigma_{21}\quad (2.56)$$

が得られる。通常、系に散逸がある場合には系の状態は一定の時間の後、定常状態に落ち着く。したがって、これらの方程式を定常状態  $\dot{\rho}_{11} = -\dot{\rho}_{22} = 0$ 、 $\dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{21}^* = 0$  について求めると、

$$\rho_{22} = 1 - \rho_{11} = \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + \Omega^2/2 + (\Gamma/2)^2}\quad (2.57)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}^* = -\frac{\Omega}{2} \frac{\delta + i\Gamma/2}{\delta^2 + \Omega^2/2 + (\Gamma/2)^2}\quad (2.58)$$

が得られる。この式から定常状態における励起状態の原子の割合は最大で  $\frac{1}{2}$  であることが分かる<sup>\*17</sup>。ここで、共鳴光を入射した時に励起状態の割合が  $\frac{1}{4}$  になる光の強度として、飽和強度  $I_S$  を定義すると、

$$I/I_S = \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}\quad (2.59)$$

が得られる。光の強度は  $I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c |E|^2$  で定義される。飽和強度は実験で簡単に測定できる量であるのでよく用いられる。

1 秒間当りに原子が吸収する光 (photon) の数を photon scattering rate  $\Gamma_p$  といい、

$$\Gamma_p = \Gamma\rho_{22} = \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Omega^2/2 + (\Gamma/2)^2}\quad (2.60)$$

<sup>\*17</sup> laser 発振をするには、基底状態よりも励起状態にいる原子の数が多い反転分布を作らなければならない。しかし、2 準位原子だとそれが不可能であることが分かる。laser 発振を行うには少なくとも 3 準位を利用しなければならない。

で与えられる。1秒間に自然放出は  $\Gamma\rho_{22}$  だけ起きるが、今は定常状態を考えているので、同じ数だけ光 (photon) を吸収して基底状態から励起状態に遷移していると考えられる。したがって、上式を得る。この photon scattering rate は laser cooling や optical trap などの効率を考える上で重要な量である。

原子の分極と複素分極率 これまでの議論で2準位原子の定常状態が求められた。原子の密度が  $n$  のとき、分極  $P(t)$  の期待値は、密度演算子と原子の双極子モーメント  $\hat{\mu}$  を用いて、 $P(t) = n\text{tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\mu})$  で与えられるので、

$$\begin{aligned} P &= n\text{tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\mu}) \\ &= n\mu(\rho_{12} + \rho_{21}) \\ &= n\mu\Omega \frac{-\delta \cos \omega t + \frac{\Gamma}{2} \sin \omega t}{\delta^2 + \Omega^2/2 + (\Gamma/2)^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

となる。いま、2準位原子には  $E(t) = \text{Re}[E_0 e^{-i\omega t}]$  という電場がかかっているため、複素分極率  $\alpha(\omega) = \alpha_R + i\alpha_I$  と原子の分極の関係は、

$$\begin{aligned} P(t) &= \text{Re}[\alpha(\omega)E_0^{-i\omega t}] \\ &= E_0(\alpha_R \cos \omega t + \alpha_I \sin \omega t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

となる。式 (2.61) と (2.62) を比較することにより、複素分極率の実部と虚部として、

$$\alpha_R = -\frac{n\mu^2}{\hbar} \frac{\delta}{\delta^2 + \Omega^2/2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.63)$$

$$\alpha_I = \frac{n\mu^2}{\hbar} \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \Omega^2/2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.64)$$

が得られる。式 (2.23) を用いることによって複素屈折率を求めると、

$$n_{ref} = 1 + \frac{\sigma_0 n \lambda}{4\pi} \frac{-\tilde{\delta} + i}{1 + I/I_S + \tilde{\delta}^2} \quad (2.65)$$

が得られる。ここで  $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\Gamma/2}$ 、 $\sigma_0 = 6\pi\lambda^2$  ( $\lambda = \lambda/2\pi$ ) であり、双極子モーメントを式 (2.50) によって線幅  $\Gamma$  に直して用いた。 $\sigma_0$  は共鳴光の吸収断面積と呼ばれるものである。

この複素屈折率から原子気体の透過率  $t$ 、phase shift  $\phi$  を求めるには式 (2.24) を用いればよいのであるが、いま原子気体の密度は一定ではなく空間的に変化するものと考えられる。したがって、probe 光の進行方向を  $z$  軸にとり、縦密度  $\tilde{n}(x, y) = \int n(x, y, z) dz$  を定義すると、原子気体の透過率  $t$ 、phase shift  $\phi$  は、

$$t = \exp\left(-\frac{\sigma_0 \tilde{n}}{2} \frac{1}{1 + I/I_S + \tilde{\delta}^2}\right) = \exp\left(-\frac{D}{2}\right) \quad (2.66)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 \tilde{n}}{2} \frac{\tilde{\delta}}{1 + I/I_S + \tilde{\delta}^2} = \tilde{\delta} \frac{D}{2} \quad (2.67)$$

となる。 $D = \sigma_0 \tilde{n} / (1 + I/I_S + \delta^2)$  を off-resonance optical density ( 光学的厚さ ) という。

### 2.3.5 PCI を行うのに適した probe 光の条件

前節で原子気体の透過率  $t$  や phase shift  $\phi$  が原子の共鳴周波数  $\omega_0$ 、probe 光の離調  $\delta$ 、原子気体の縦密度  $\tilde{n}$  にどのように依存するかを求めることができた。この章では、PCI を行う時に使う probe 光に必要な周波数  $\omega$  をどのように決定すればよいのか、その指針を述べる。

PCI は原子気体に光を吸収させることなく、phase shift を見ることができなのが特徴である。したがって、この特徴を生かすように probe 光の周波数を決定すればよい。透過率と phase shift の式 (2.66)、(2.67) を見るとどちらも probe 光の強度  $I$  と共鳴周波数からの離調  $\delta$  に依存していることが分かる。特に、離調に関する依存性を見てみると、

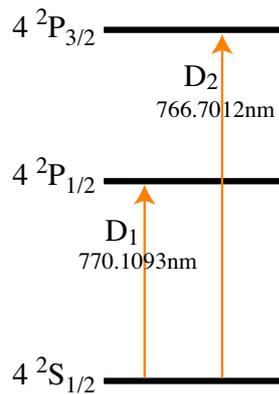
$$\begin{aligned} t &\sim e^{-\frac{1}{\delta^2}} \\ \phi &\sim \frac{1}{\delta} \end{aligned} \tag{2.68}$$

となっている。したがって離調を大きくした時、phase shift の減少に比べて透過率のほうが早く 1 に近づく。このことから、透過率をほぼ 1 にしつつ phase shift にある程度の値を持たせることができる。

**<sup>41</sup>K の特性** 今回、PCI によって imaging したいものは <sup>41</sup>K の BEC である。<sup>41</sup>K は原子番号 19 のアルカリ原子であり、その電子配置は  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^1$  となっている。最外殻電子が 1 つだけで、それが s 軌道であることがアルカリ原子の特徴である。

図 2.23 に <sup>41</sup>K のエネルギー準位を示す。ここで、 $^{2S+1}L_J$  という記号は分光学でよく使われるもので、 $S$  は全スピン角運動量、 $L$  は全軌道角運動量、 $J = L + S$  は全角運動量である。軌道角運動量は  $L = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対して S, P, D, F, ... と書く決まりになっている。全角運動量の値によって軌道が分裂しているのはスピン-軌道相互作用によるものである。また、基底状態  $4^2S_{1/2}$  から励起状態  $4^2P_{1/2}$  への遷移を  $D_1$  線、 $4^2P_{3/2}$  への遷移を  $D_2$  線という。

今回の実験で用いるエネルギー準位は  $D_2$  線であるので、表 2.3 に <sup>41</sup>K の  $D_2$  線の特性をまとめておく [13]。

図 2.23  $^{41}\text{K}$  のエネルギー準位表 2.3  $^{41}\text{K}$  の  $\text{D}_2$  線の特徴

|                      |                                   |
|----------------------|-----------------------------------|
| 波長 $\lambda_0$       | 766.7012 nm                       |
| 周波数 $f_0$            | 391.287 THz                       |
| 波数 $k_0/2\pi$        | $13043\text{ cm}^{-1}$            |
| 線幅 $\Gamma$          | $2\pi \times 6.09\text{MHz}$      |
| 励起状態の寿命 $\tau$       | 26.13 ns                          |
| 飽和強度 $I_S$           | $1.77\text{ mW/cm}^2$             |
| 共鳴光の吸収断面積 $\sigma_0$ | $280.7 \times 10^{-15}\text{m}^2$ |

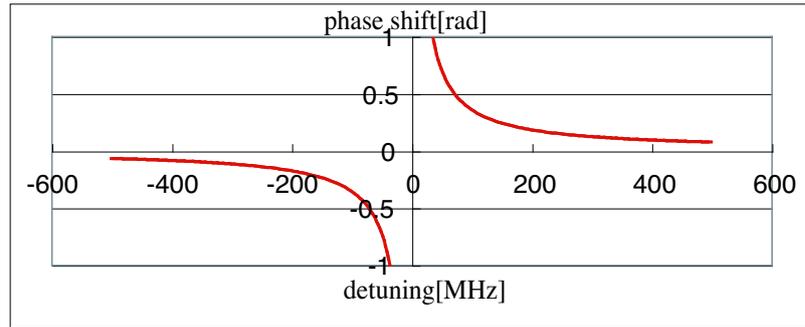
probe 光の離調 実際に  $^{41}\text{K}$  の BEC の縦密度を  $1.5 \times 10^{14}/\text{m}^2$ 、probe 光の強度を  $3.26\text{W/m}^2$  として、透過率と phase shift の離調依存性をグラフにしたものを図 2.24 に示す。

また、いくつかの離調における phase shift と透過率の値を表 2.4 に示す。

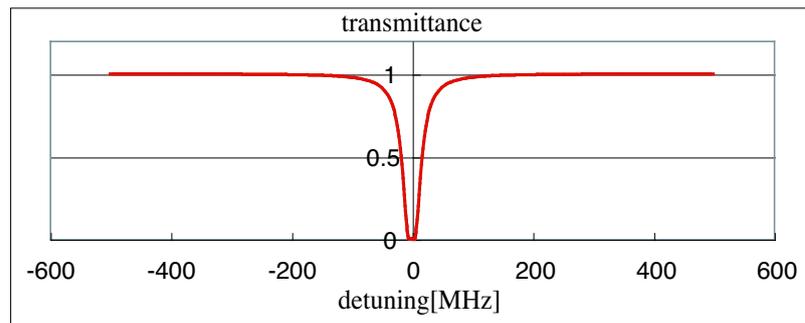
表 2.4 透過率と phase shift の離調依存性

| 離調 [MHz] | 透過率   | phase shift[rad] |
|----------|-------|------------------|
| 100      | 0.978 | 0.375            |
| 200      | 0.995 | 0.179            |
| 300      | 0.998 | 0.119            |
| 400      | 0.999 | 0.089            |

この表から離調を 300 ~ 400MHz もとれば十分に透過率を 1 に近づけつつ、phase



(a) phase shiftの離調依存性



(b) 透過率の離調依存性

図 2.24 phase shift と透過率の離調依存性

shift として 0.1 程度の値が得られることが分かる。

probe 光による加熱の効果 PCI では BEC を連続的に非破壊で imaging できるのであるが、実際には多少であれ BEC は probe 光を吸収することにより加熱され、破壊されてしまう。そこで、probe 光を吸収することによる加熱の効果について考察する。

いま、原子が波数  $k$  の光 (photon) を 1 つ吸収したとすると、その photon から受け取る運動量は  $\hbar k$  となる。したがって、原子の質量を  $m$  とすると、photon 1 つを吸収することによって上昇する温度  $T$  は、

$$k_B T = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \quad (2.69)$$

となる。 $^{41}\text{K}$  の場合、 $m = 6.85 \times 10^{-26} \text{ kg}$ 、 $k/2\pi = 13043 \text{ cm}^{-1}$  であるので、 $T = 396 \text{ nK}$  と求まる。また、1 秒間に photon を吸収する回数は photon scattering rate として式 (2.60) で求めてある。離調 300 MHz のときの photon scattering rate を求めると、 $\Gamma_p \sim 57.8 \text{ Hz}$  であった。したがって、1 秒間当りの加熱レートは  $22.9 \mu\text{K/s}$  と求まる。BEC の温度は  $1 \mu\text{K}$  以下であるので、1 秒も probe 光を当てると破壊してしまう。

実際に imaging を行う時は probe 光を当て続けるようなことはせず、断続的に probe 光を照射する。image を撮る際には、 $300 \mu\text{s}$  程度 probe 光を当てれば十分である。 $300 \mu\text{s}$

の間に BEC の温度は 6.86nK 程度しか上昇しない。したがって断続的に PCI を行うことによって、BEC のダイナミクスを見ることは十分可能である。

## 第 3 章

# DDS による laser の offset lock

BEC の PCI を行うには共鳴周波数から数百 MHz だけ離調のついた probe 光を用意する必要があることが分かったが、それを実現するのが DDS による laser offset lock system である。DDS(Direct Digital synthesizer) とは、0Hz から数百 MHz までの周波数の正弦波を、デジタル制御によって正確に出力できるデバイスである。この DDS と PLL(Phase Lock Loop) を組み合わせることによって、原子の共鳴周波数に lock されている reference 光から数 GHz の offset をつけた laser 光を得ることが出来る。このような laser の offset lock system は、PCI や強磁場中の冷却原子気体の Absorption Imaging を行うのに有効である。本章では DDS や PLL について解説し、これらを用いて laser の offset lock を実現する方法について述べる。

### 3.1 DDS offset lock system の概要

細かな原理や実験方法は後にして、まず DDS や PLL の機能、laser の offset lock の方法<sup>\*1</sup>についての概要を述べる。

#### 3.1.1 DDS offset lock system の意義

今回設計した DDS を用いた laser の offset lock system では  $^{41}\text{K}$  の  $\text{D}_2$  線の共鳴周波数から  $\pm 6.4\text{GHz}$  まで、数 Hz 単位で offset をつけることができる。共鳴周波数から offset をつける方法は他に AOM (Acoust-Optical Modulator) を用いる方法があるが、AOM 1 つでは数百 MHz が限界であり、また 0 ~ 数百 MHz のなかで自由に offset をつけられるわけではない。200MHz の AOM であれば、 $200\text{MHz} \pm$  数十 MHz 程度しか変

---

<sup>\*1</sup> offset という言葉と、前章で用いた離調という言葉は、本論文内においては同義である。二つとも『周波数の差』という意味で用いているが、文脈によって使い分ける

化させられない。例えば PCI を行う場合、probe 光は共鳴周波数から数百 MHz の離調をつける必要があるが、それは DDS offset lock system を用いれば簡単に、そして正確にできる。

また、Feshbach resonance を用いるときには数十～数千 Gauss という磁場をかける必要があるが、このとき原子のエネルギー準位は Zeeman 効果によって変化する。Zeeman shift はだいたい Bohr 磁子  $\mu_B = 1.4\text{MHz/Gauss}$  程度のエネルギー変化を与えるので、強磁場中では共鳴周波数は数 GHz 程度変化することになる。このようなときに Absorption Imaging をするには Zeeman shift 分の離調をつけた probe 光を用意しなければならないが、DDS offset lock system を用いればそれは可能である。

### 3.1.2 DDS と PLL

DDS DDS(Direct Digital synthesizer) の概要を図 3.1 に示す。DDS は内部に正弦波

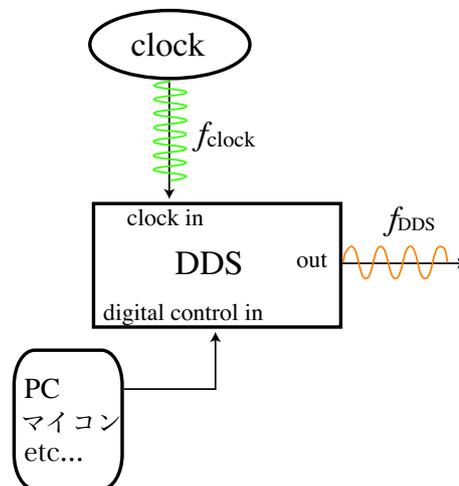


図 3.1 DDS の概要

の数値データをそのまま記憶していて、それを適当なタイミングで読み出すことにより、正確な正弦波を生成している。clock はその読み出しのタイミングの基準となるものであり、clock の性能がそのまま DDS の性能に繋がる。また、外部の PC などから出力周波数  $f_{\text{DDS}}$  を設定することができ、制御はすべてデジタルで行うので高い周波数安定性を持つ。例えば今回の実験で用いた DDS は Analog Devices 社の AD9858 というモデルで、外部 clock が 1GHz のとき 0～400MHz まで、0.25Hz ステップで周波数を設定できる。

PLL 図 3.2 に PLL(Phase Lock Loop) の概要を示す。PLL は 2 つの入力信号の位相差を検知し、位相差を無くすように feedback をかける回路である。位相差がないということは、基準の周波数  $f_r$  と tuning したい oscillator の周波数  $f$  が等しくなるということ

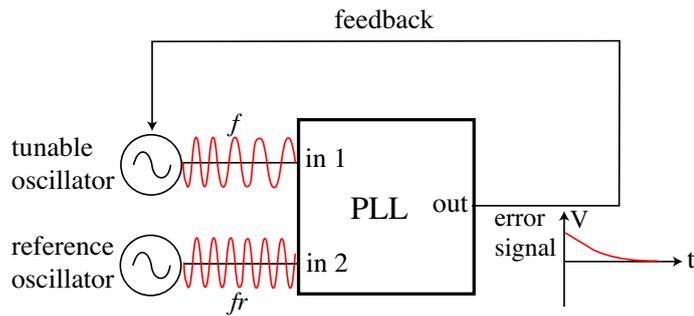


図 3.2 PLL の概要

でもある。基準となる oscillator には、DDS や水晶振動子などの正確な周波数を出力するものを用い、tuning したい oscillator としては、VCO (Voltage Controlled Oscillator) などが代表的である。ここでは例として VCO を PLL によって安定化する場合を説明する。

VCO は入力電圧によって発振する周波数を制御できる発振器である。VCO の周波数は外部環境の影響を受けやすく、そのまま使ったのでは安定した周波数を得ることが難しい。したがって、安定した周波数が欲しいときは PLL によって安定な oscillator に lock をしてやる必要がある。PLL は VCO の周波数と基準周波数を比較して、その差に対応した電圧を出力する。その電圧を VCO の制御電圧に feedback することで VCO の周波数が変化し、最終的に基準周波数に一致する。もし、外部環境が変化するなどして VCO の特性が変化したとしても、PLL がそれに合わせて feedback をかけるので、VCO の周波数は安定である。

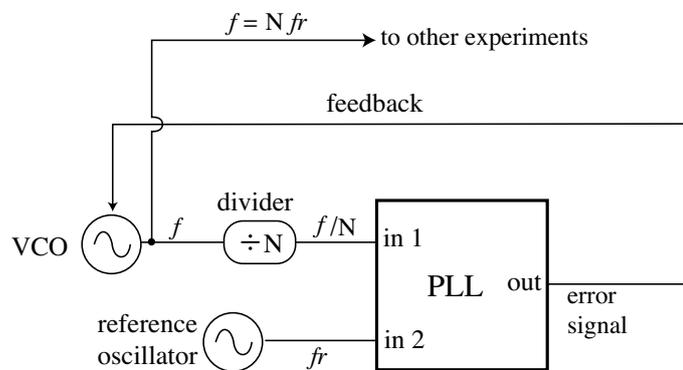


図 3.3 PLL による周波数 N 倍回路

また、図 3.3 のように VCO の出力周波数を divider で分周し、その信号と基準周波数を PLL で比較することを考える。PLL の error signal を VCO に feedback することにより  $f/N = f_r$  が実現される。つまり VCO の周波数は  $f = Nf_r$  に lock され、基準周波

数を  $N$  倍した周波数を得ることができる。

### 3.1.3 DDS offset lock system の概要

図 3.4 に DDS を用いた laser の offset lock system の概要を示す [14]。今回用いた DDS は Analog Devices 社の AD9858 というモデルで [9]、DDS と PLL、divider を内蔵している。使用する機器の詳細は後ほど解説するとして、ここではこの offset lock

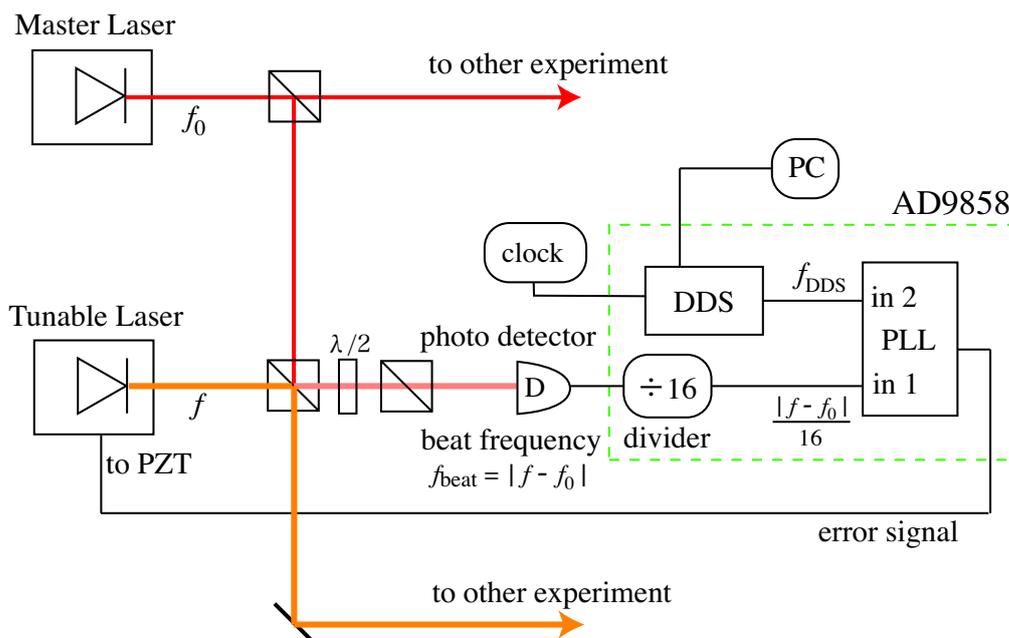


図 3.4 offset lock system

system の概要を説明をする。ただし、図 3.4 はあくまで概念図であるので、実際の実験状況を正確には反映していない。より正確な実験系は 3.4 節にて述べる。

1. 光源として Master Laser と Tunable Laser の 2 台を用意しておく。Master Laser は飽和吸収分光によって  $^{41}\text{K}$  の  $D_2$  線 (766.7nm) に lock されており、Tunable Laser は自作した External Cavity Diode Laser (ECDL) を用いている。ECDL は 767nm 程度の波長を出力するように設計されており、PZT (ピエゾ、圧電素子) に電圧をかけることによって共振器長を変え、発振周波数を制御できる。
2. この二つの光源から出た光を PBS によって重ね合わせ、 $\lambda/2$  と PBS によって偏光を合わせると、beat (うなり) が生じる。この beat の周波数は Master Laser と Tunable Laser の周波数  $f_0$  と  $f$  の差  $f_{\text{beat}} = |f - f_0|$  によって定まる<sup>\*2</sup>。

<sup>\*2</sup>  $E_1 = \sin \omega_1 t$ 、 $E_2 = \sin \omega_2 t$  とすると、 $E_1 + E_2 = 2 \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$ 。photo detector は電場

3. photo diode によって、2つの光の beat signal を電圧として取り出す。
4. divider によって beat frequency を分周し、 $f_{\text{beat}}/16$  を得る<sup>\*3</sup>。
5. PLL によって DDS の周波数  $f_{\text{DDS}}$  と beat signal  $f_{\text{beat}}/16$  が比較される。
6. PLL からの error signal を Tunable Laser の PZT に feedback することにより、 $f_{\text{DDS}} = f_{\text{beat}}/16$ 、つまり  $|f - f_0| = 16f_{\text{DDS}}$  に lock される。

このようにして、Tunable Laser の周波数として  $f = f_0 \pm 16f_{\text{DDS}}$  が得られる。正負の離調のどちらに lock するかは、error signal の porality によって決めることができる。いま、AD9858 の DDS の出力周波数の上限は 400MHz であるので、Tunable Laser は <sup>41</sup>K の D<sub>2</sub> 線から最大で  $\pm 6.4\text{GHz}$  の offset をつけることができる<sup>\*4</sup>。また、DDS の周波数は 1Hz 以下の resolution で設定できるので、Tunable Laser の周波数は laser の線幅程度の resolution で決定できる。

### 3.1.4 DDS と PLL の原理

前節で DDS と PLL を用いた offset lock system の概要を説明したが、この節では DDS と PLL のより詳しい原理について述べる。

#### DDS の原理

図 3.5 に DDS の基本構成を示す [9]。まず、この構成要素がどのようなものであるかについて解説する。

**Sine Lookup Table** DDS は内部に正弦波の数表を持っており、それを読み出すことによって正確な正弦波を出力する。その正弦波の数表が Sine Lookup Table と呼ばれる部分である。これは programable ROM(Read Only Memory) に 1 周期分の正弦波のデータを記憶させているものである。ROM の各アドレスに 1 つの値が収納されているのであるが、アドレスが位相に対応し、収納されている値がその位相に対応した正弦波の値である。clock の周期に合わせて、次から次へとアドレスに格納された正弦波の値を読み出すことによって、正弦波を生成することができる。

例えば、Sine Lookup Table には正弦波の値が 1024 分割して入っているとすると<sup>\*5</sup>。こ

の強度に反応するので、 $I \sim \cos^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \sim \cos(\omega_1 - \omega_2)t$  が観測される。速い成分は photo detector がついていけないので offset として測定され、振動成分としては遅いものだけが観測される。

<sup>\*3</sup> divider の分周率は 16 でなくてもよい。今回使用した DDS AD9858PCB には 16 分周の divider が内蔵されているので、それを利用した。

<sup>\*4</sup> 実際には、photo detector の性能によって offset をつけられる範囲が決まってしまう。7GHz の beat を見れる photo detector なら 6.8GHz の offset lock も可能だが、今回の実験では 500MHz の photo detector を用いるため、500MHz までしか offset をつけることができない。

<sup>\*5</sup> 10-bits の Phase Accumulator に相当。

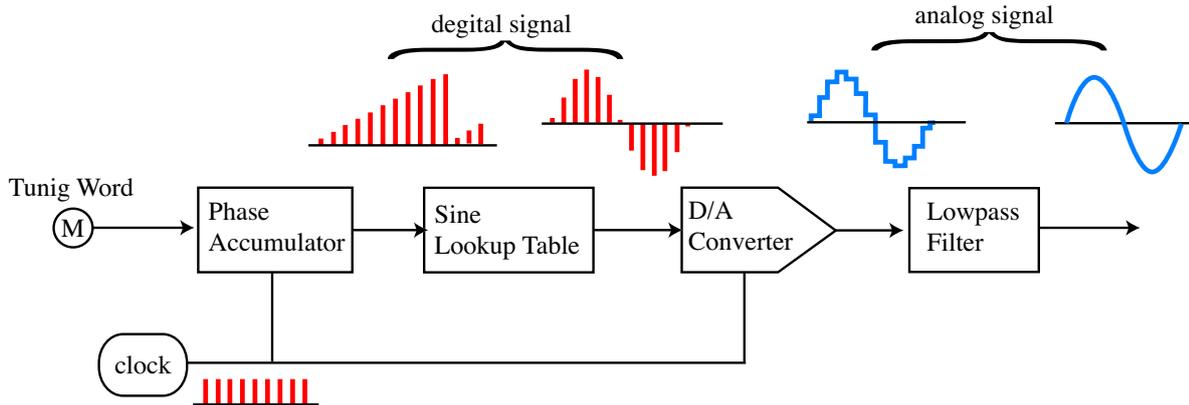


図 3.5 DDS の内部構成

れを clock 周波数 10.24MHz で読み出すとすると、clock からの signal を 1024 個受け取ると正弦波 1 周期分を出力するので、 $10.24\text{MHz}/1024 = 10\text{kHz}$  の周波数の正弦波が得られる。

Sine Lookup Table と clock だけで正弦波を作ろうとする場合、出力周波数を変えるには clock 周波数を変えるか、Sine Lookup Table のアドレスの数や収納されている値を変えるかのどちらかしかない。このどちらも現実的でないが、次に説明する Phase Accumulator を用いると、周波数を簡単に変更することができる。

Phase Accumulator Phase Accumulator は図 3.6 に示すように、N-bits の全加算器とラッチからなる回路で、clock に同期して、ある決まった値 M(Tuning Word) をそれまでの Phase Accumulator の出力に加算して出力する積算回路である。ラッチとは一種

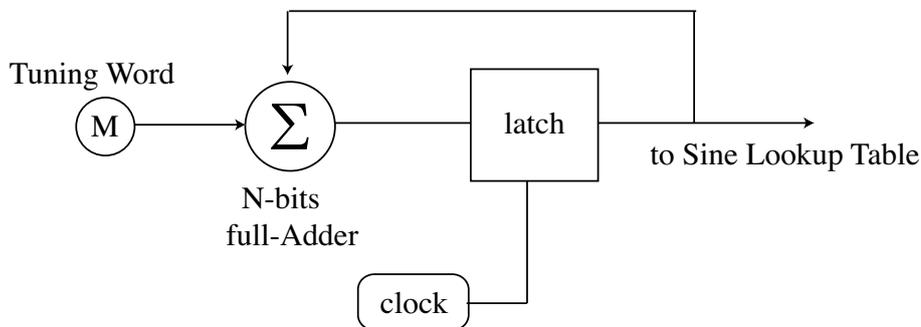


図 3.6 Phase Accumulator

のメモリーで、clock が入力されているときのラッチへの入力値を、次の clock が入力されるまで出力し続けるものである。そのため、clock が来るとに latch の出力は M づつ加算され、値が  $2^N$  になったところで全加算器が overflow して 0 に戻る。このサイク

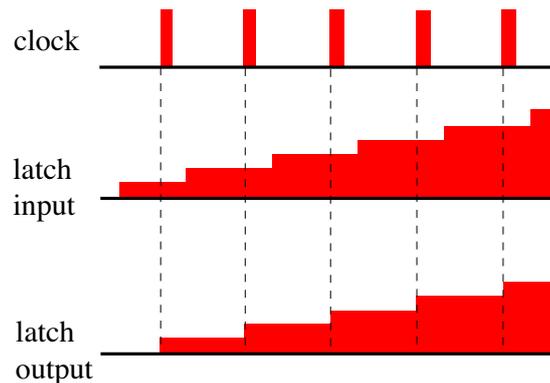


図 3.7 ラッチの入出力

ルが正弦波 1 周期分に対応している。つまり、初期値を 0 としたとき、 $t$  秒後の Phase Accumulator の出力は  $Mf_{\text{clock}}t$  となる。この出力の値が Sine Lookup Table のアドレス番号、つまり正弦波の位相に対応している。N-bits の Phase Accumulator では、 $0 \sim 2\pi$  の位相を  $2^N$  分割することができる。したがって、Tuning Word が  $M$ 、clock 周波数が  $f_{\text{clock}}$  のとき、DDS の出力周波数は  $1/2^N \times Mf_{\text{clock}}$  となる。この Tuning Word を変更することにより、自在に周波数を変えることができる。

また、N-bits の Phase Accumulator では DDS の出力周波数を  $f_{\text{clock}}/2^N$  間隔で設定できる。したがって、Phase Accumulator の性能が DDS の周波数分解能を決定する。今回用いる AD9858 には 32-bits の Phase Accumulator が内蔵されているので、周波数分解能はおよそ 0.25Hz である。

D/A Converter と lowpass filter Sine Lookup Table から読み出された正弦波の出力は 2 進数のデジタル信号なので、これをアナログ信号に直す必要がある。それを行うのが D/A Converter である。また、D/A Converter でアナログ信号に直した後の出力波形はギザギザしており、高周波成分を含んでいる。したがって、lowpass filter に通すことにより、望みの周波数成分だけを取り出す。

DDS 出力周波数の上限 DDS の原理から DDS は基本的にサンプリング系であることが分かる。つまり、DDS は Sine Lookup Table の離散的な正弦波の値を clock 周波数でサンプリングし、連続的な正弦波を生成するものである。したがって、標本化定理（ナイキストの定理とも言う）から最大で clock 周波数の半分までの周波数の正弦波しか正しく再現できない。つまり、DDS の出力できる周波数の上限は入力する clock 周波数によって定まる。しかし、実際には上限に達しなくても波形が乱れてきたりすることがあり、実用的な上限は clock 周波数の 4 分の 1 程度である。

## PLL の原理

PLL の基本構成を図 3.8 に示す [15]。PLL は、2 つの信号の位相と周波数を同期させる feedback 回路である。PLL の動作は loop filter の性質に左右されるので、loop filter の設計が重要になってくる。しかし、今回の実験では市販の PLL を使用しており、loop filter の設計などは行っていない。したがって、本論文では loop filter の詳しい設計には触れず、PLL の原理についてのみ述べる。

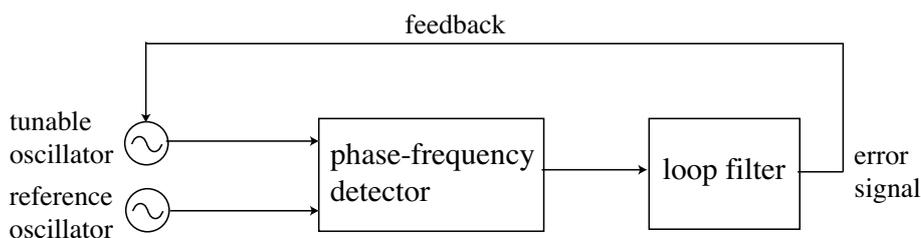


図 3.8 PLL の基本構成

PLL を構成する主要な要素は tunable oscillator、reference oscillator、phase-frequency detector (位相比較器) loop filter の4つである。tunable oscillator としては VCO などの外部から周波数を制御可能なものを、reference oscillator としては水晶振動子や DDS など安定で正確な周波数を出力するものを用いる。今回の laser offset lock の実験でいうと、laser の beat signal が tunable oscillator、DDS が reference oscillator としての役割を持ち、laser の PZT に feedback をかけることによって beat signal を DDS に lock する。

phase-frequency detector 2 つの信号の位相を比較するには、JK フリップフロップ、乗算、排他的論理和を用いた方法など色々あるが、今回の実験では phase-frequency detector と呼ばれるものを用いる。JK フリップフロップ、乗算、排他的論理和などで構成される phase detector(PD) は2つの信号の位相差を検出することができる。しかし、phase-frequency detector(PFD) は2つの入力信号の位相差、さらに周波数差にも応じた出力を出せる素子である。したがって、PD に比べて、PFD の方が PLL の lock できる範囲が格段に広い。

PFD は図 3.9 に示すように2入力、2出力の素子であり、入力信号を  $A, B$ 、出力信号を  $Q_A, Q_B$  とする。PFD は入力  $A$  の位相が入力  $B$  の位相より進んでいれば  $Q_A$  に、逆に入力  $B$  の位相が入力  $A$  の位相より進んでいれば  $Q_B$  にパルスを出力する。また、入力  $A$  の周波数が入力  $B$  の周波数よりも高ければ  $Q_A$  に、入力  $B$  の周波数が入力  $A$  の周波数よりも高ければ  $Q_B$  にパルスを出力する。 $Q_A$  と  $Q_B$  を見ることによって、どちらの位相が進



図 3.9 phase-frequency detector

んでいるか、またはどちらの周波数が高いかが分かる。

状態遷移図を用いて PFD の動作を表現すると図 3.10 のようになる。PFD の出力の状

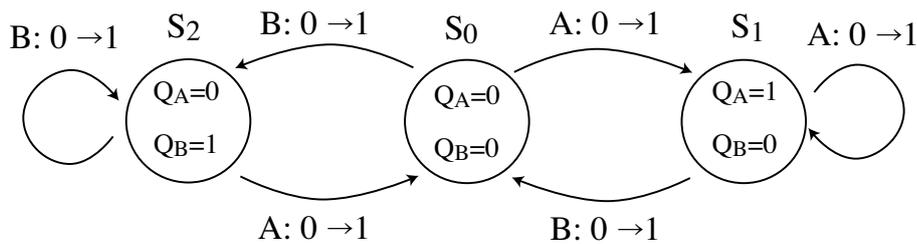


図 3.10 PFD の状態遷移図

態に応じて分類してあり、入力 A,B の信号が 0 から 1 に立ち上がる時点で出力の状態が遷移するとする。まず最初の状態が  $S_0$  ( $Q_A = 0, Q_B = 0$ ) であったとし、A 入力が 0 から 1 に変化したとする。このとき、状態が  $S_1$  に遷移して  $Q_A = 1, Q_B = 0$  の出力が得られる。この状態  $S_1$  は入力 B が立ち上がるまで保持される。したがって、周波数差や位相差に応じた長さだけ  $Q_A = 1$  が出力される。このように状態  $S_1$  は入力 A の位相が進んでいるか、周波数が高いことを示している。逆に状態が  $S_2$  であれば入力 A の位相が遅れているか、周波数が低いことを示している。図 3.11、3.12、3.13 にいくつかの場合における PFD の出力を示す。このようにして、PFD では 2 つの入力の周波数と位相を比較し

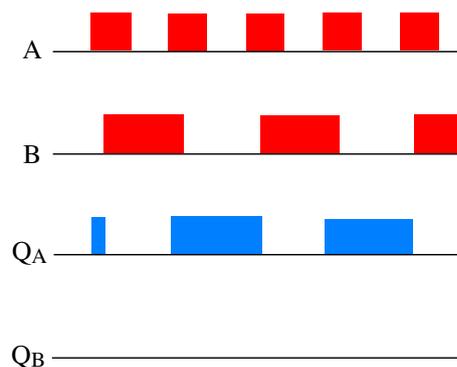


図 3.11 A の周波数が B よりも速い場合の PFD の出力

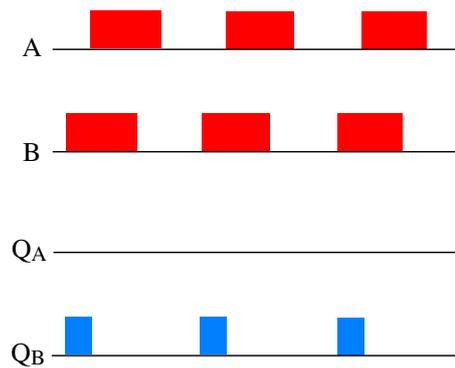


図 3.12 A の位相が B よりも遅れている場合の PFD の出力

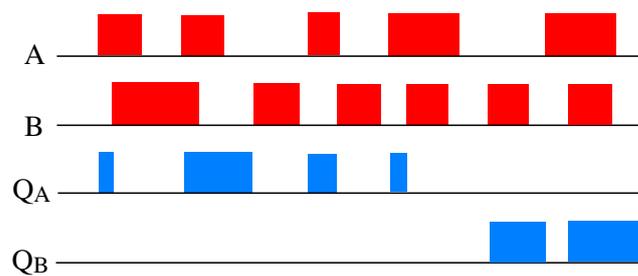


図 3.13 A,B の周波数や位相が変化するときの PFD の出力

て、それに応じた出力を出す。この出力  $Q_A$  と  $Q_B$  の差を取り、loop filter を通すことによって error signal を生成する。

loop filter loop filter は PFD からの出力を、tunable oscillator に feedback するための error signal に変換する部分である。loop filter は基本的には lowpass filter、または積分器であり、PFD の出力から直流成分だけを取り出す機能をもつ。

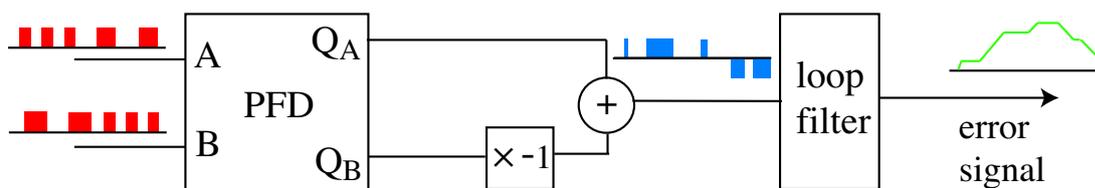


図 3.14 loop filter による error signal 生成

図 3.14 に PFD の出力を loop filter によって積分して、error signal を生成する過程を示す。ズレが大きい程、大きな電圧を出力することが分かる。この error signal を VCO などの外部電圧で制御可能な素子に feedback することによって、目的の周波数に lock

することができる。

charge pump loop filter としては lowpass filter や積分器が一般的に使われるが、今回の実験で使用した AD9858 には charge pump という loop filter としての役割を持つ素子が組み込まれている。図 3.15 に charge pump の等価回路を示す。 $I_p$  を charge pump の出力リファレンス電流という。

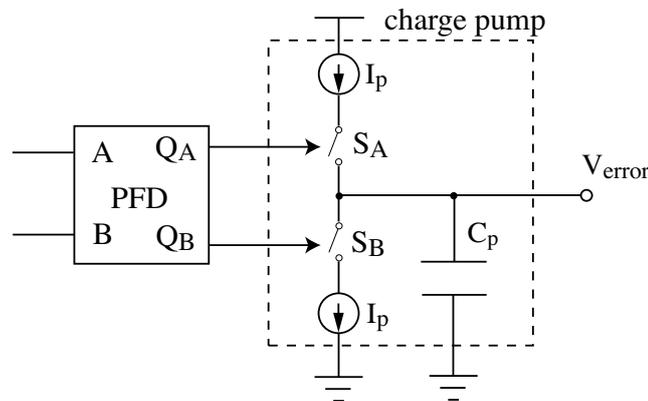


図 3.15 charge pump

$Q_A = 1$  のときはスイッチ  $S_A$  が、 $Q_B = 1$  のときはスイッチ  $S_B$  が ON になる。 $Q_A = 1$  の時は  $S_A$  が ON になり、電源に繋がった電流源が接続されてコンデンサ  $C_p$  に定電流  $I_p$  が流れ込み充電され、1 秒間に  $I_p/C_p$  の割合でコンデンサの電圧が上昇する。逆に、 $Q_B = 1$  のときは  $S_B$  が ON になり、GND に向けて定電流  $I_p$  でコンデンサが放電し、1 秒間に  $I_p/C_p$  の割合でコンデンサの電圧が下降する。図 3.16 に charge pump の出力例を示す。

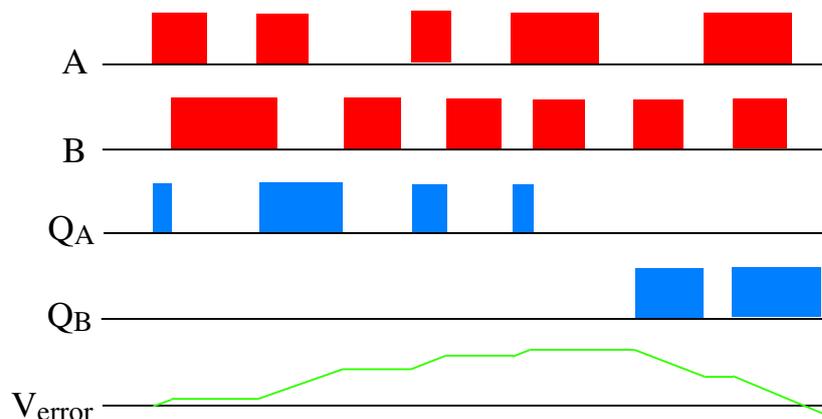


図 3.16 charge pump の出力

図を見れば分かるように、charge pump の出力は PFD からの  $Q_A$ 、 $Q_B$  の差を積分したようなものになっている。AD9858 に内蔵されている PLL は PFD と charge pump に加え、さらに抵抗とコンデンサによって構成される loop filter 用いて精度の高い PLL を構成している。

## 3.2 光源の作成

今回の実験で用いる laser offset lock 用の光源として波長 767nm の Littrow 型 ECDL(External Cavity Diode Laser; 外部共振器型レーザー) を作成した。ECDL では LD(Laser Diode) から出力される光をコリメーションレンズによって平行光にし、回折格子 (grating) によって周波数を選択的に LD に戻して共振器を構成する。図 3.17 に Littrow 型 ECDL の概要を示す。PZT に電圧をかけることによって共振器長を変化させ

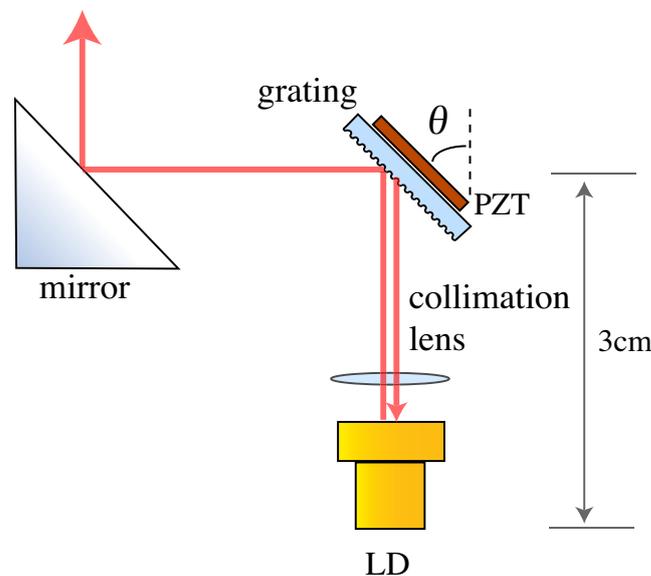


図 3.17 Littrow 型 ECDL の概要

ることができ、レーザーの発振周波数を調整することができる。LD と回折格子の間の距離は 3cm 程度であるので、LD と回折格子によって作られる共振器の FSR(Free Spectral Range) は 5GHz 程度である。

**回折格子** 回折格子とはガラスなどの表面に周期的な凹凸をつけることによって、入射した光を回折させるものである。回折格子はプリズムと同じように、光の波長によって回折角が変わる。図 3.18 に回折格子の原理を示す<sup>\*6</sup>。回折格子の表面の凹凸によって反射

<sup>\*6</sup> 回折格子の原理は、結晶に X 線を入射したときの Bragg 散乱の原理と同じである。

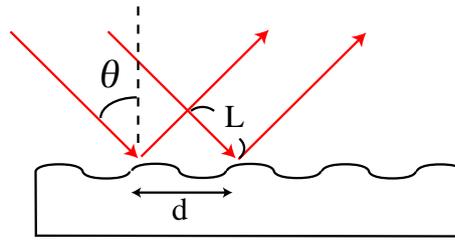


図 3.18 回折格子の原理

した光は、そのとなりの凹凸によって反射した光と干渉する。このとき、ふたつの入射光の光路長の差は図から  $2L = 2d \sin \theta$  と求まる。二つの光が干渉して強め合うためには、同位相でなければならない。光路長の差が波長の整数倍であるとき、二つの光は干渉して強め合うので、回折される条件は  $n$  を整数とすると  $2d \sin \theta = n\lambda$  となる。この条件を満たさない光は、位相がランダムな光の足し合わせになるので打ち消し合って、回折されない。

### 3.2.1 ECDL の設計と製作

今回用いた回折格子の格子間隔は  $d = 5.56 \times 10^{-7}$  であり、LD を発振させたい波長は 767nm であるので、 $\theta = 43.7^\circ \simeq 45^\circ$  となるように回折格子を固定すればよい。図 3.19 に実際に作成した ECDL の写真を示す。LD は温度や電流値によってもその発振周波数を調整することが出来る。今回は LD をマウントしている台の下にペルチェ素子を置き、温度を調整できるようにしてある。

今回作成した ECDL の特性を表 3.1 に示す。

表 3.1 offset lock 用 ECDL の特性

|                     |         |
|---------------------|---------|
| 波長                  | 766.7nm |
| スレッシュヨルド電流値         | 52.5mA  |
| mode hop free range | 4GHz    |
| 線幅                  | 2MHz    |

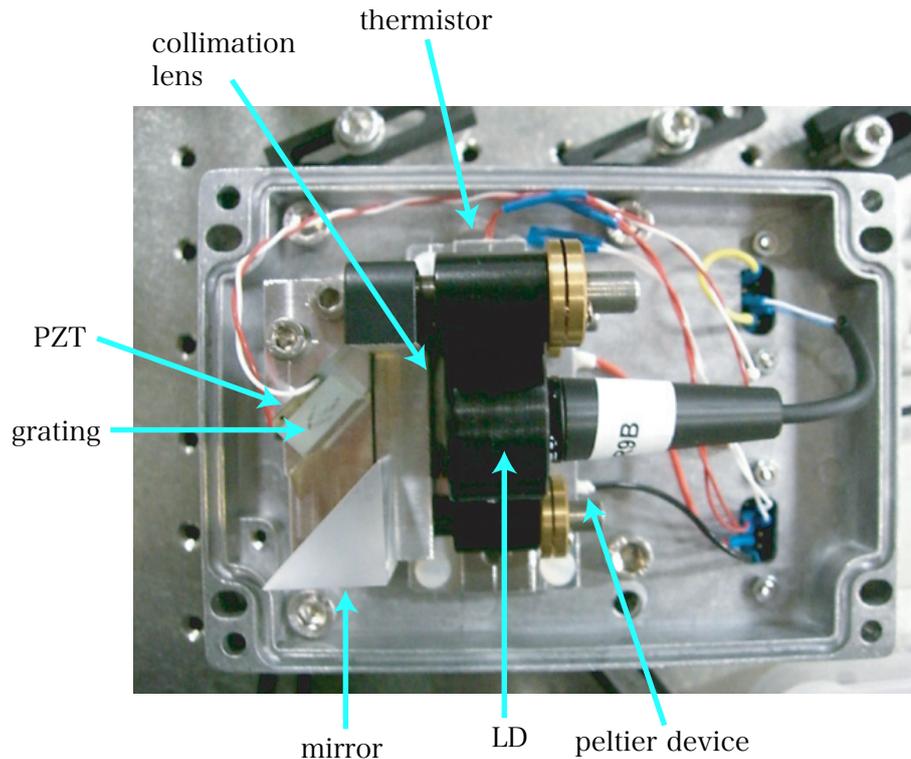


図 3.19 ECDL の写真

### 3.3 DDS と PLL のセットアップ

laser offset lock system の実験では、DDS と PLL を内蔵した Analog Devices 社の AD9858 を使用した [9]。AD9858 は表面実装用のデバイスであり、ハンダ付けの困難なことから今回はその評価ボードである AD9858PCB を用いた。AD9858PCB は AD9858 が実装してあり、その性能を評価する為にあらかじめ PLL 用 loop filter、VCO(1.53GHz ~ 1.63GHz)、divider(2 分周と 8 分周の 2 つ、合計 16 分周)、PC との接続用パラレルポート (下の図には映っていない) などが組み込まれている。図 3.20 に AD9858PCB の写真を示す。

今回はこの AD9858 Evaluation Board のいくつかの箇所を改造して offset lock 回路として用いた。

#### 3.3.1 AD9858PCB の仕様

AD9858 は DDS と PLL、今回は用いないが rf mixer を内蔵したデバイスである。

AD9858 を動作させるには、アナログとデジタル用の DC 3.3V と charge pump 用

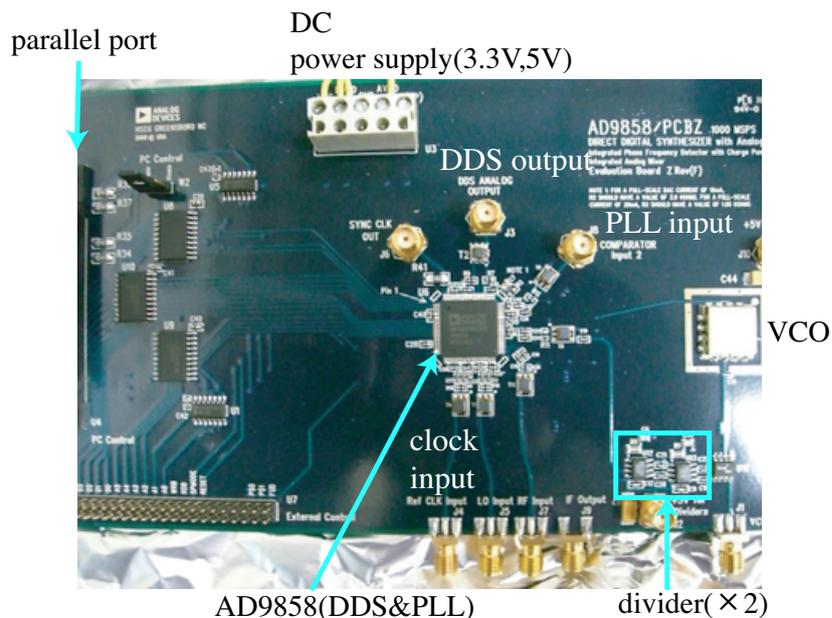


図 3.20 AD9858PCB

の DC 5V の 2 種類の電源を用意する必要がある。また、DDS を用いるには外部 clock を入力する必要がある<sup>\*7</sup>。AD9858 には外部 clock 用の 2 分周 divider がついており、外部 clock の周波数が高すぎる时候はこの divider を用いることができる。通常、外部 clock は 1GHz までであり、divider を用いるときは 2GHz まで入力することができる。

図 3.21 に AD9858 本体のブロックダイアグラムを示す [9]。

**PLL ブロック** PLL ブロックは DIV と PD の 2 つの入力<sup>\*8</sup>、外部機器から制御可能な programmable divider(1,2,4 分周を選べる)、charge pump から構成されている。CPISSET 端子と GND の間に抵抗  $R_p$  を繋ぐことによって、charge pump の出力リファレンス電流を  $I_p = 1.24V/R_p$  にしたがって設定することができる。AD9858PCB では  $R_p = 2.4k\Omega$  の抵抗を用いてあり、 $I_p \sim 500\mu A$  に設定してある。

**DDS ブロック** DDS ブロックは Frequency Accumulator、Phase Accumulator、Phase-to-Amplitude Conversion(Sine Lookup Table)、DAC(D/A Converter) から構成されている。Frequency Accumulator は DDS の出力周波数を sweep したい時に用いるものであり、通常は Phase Accumulator のみを用いる。

DDS の出力周波数は FREQUENCY TUNING WORD(FTW)によって決められる<sup>\*9</sup>。

<sup>\*7</sup> 内部 clock を備えてはいるが、安定しないので安定した外部 clock で動作させるのがよい。

<sup>\*8</sup> 2 つの入力は、特に違いはない。

<sup>\*9</sup> これは図 3.5 における Tuning Word M のことである。これらの値はすべて PC などの外部機器によって

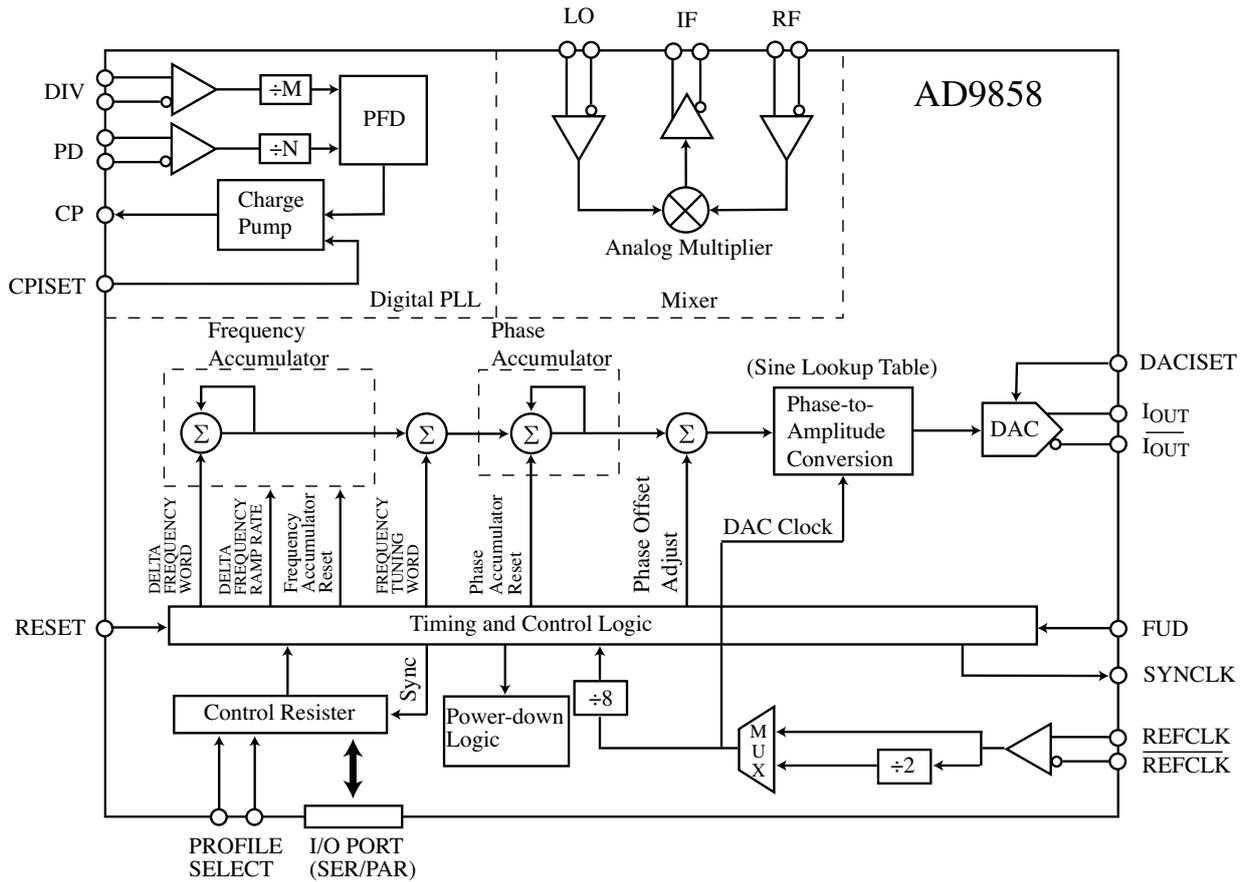


図 3.21 AD9858 のブロックダイアグラム

clock 周波数を  $f_{clock}$  とすると DDS の出力周波数  $f_{DDS}$  は、

$$f_{DDS} = \frac{FTW \times f_{clock}}{2^N} \quad (3.1)$$

となる。ここで  $N$  は Phase Accumulator の bit 数であり、AD9858 の場合は  $N = 32$  である。DDS の出力周波数の上限は clock 周波数によって決まっており、clock 周波数の半分程度までの周波数まで出力できる。ただし、上限に近づくと波形の乱れなどが生じてくるので、実用的な限界は 400MHz 程度である。表 3.2 に clock 周波数 1GHz のときの性能を示す。

表 3.2 clock 周波数 1GHz のときの性能

|               |        |
|---------------|--------|
| 出力周波数の上限      | 400MHz |
| 周波数分解能        | 0.23Hz |
| 出力電圧 (終端 50Ω) | -15dBm |

AD9858PCB AD9858PCB では AD9858 に加えて、以下の device が実装されている (本実験に関係のあるもののみ記す)。

1. PLL 用 loop filter。
2. VCO(1.53GHz ~ 1.63GHz、DC 5V の独立した電源が必要)
3. divider(2 分周、8 分周の 2 つ、DC 5V の独立した電源が必要)
4. PC パラレルポート接続用のポート

また、AD9858PCB には AD9858 を PC によって control する Windows 用の software が同封されている。今回はその software を用いて DDS を制御した\*10。

図 3.22 に AD9858PCB の概要を示す。ここで、接続端子はすべて SMA 端子である。

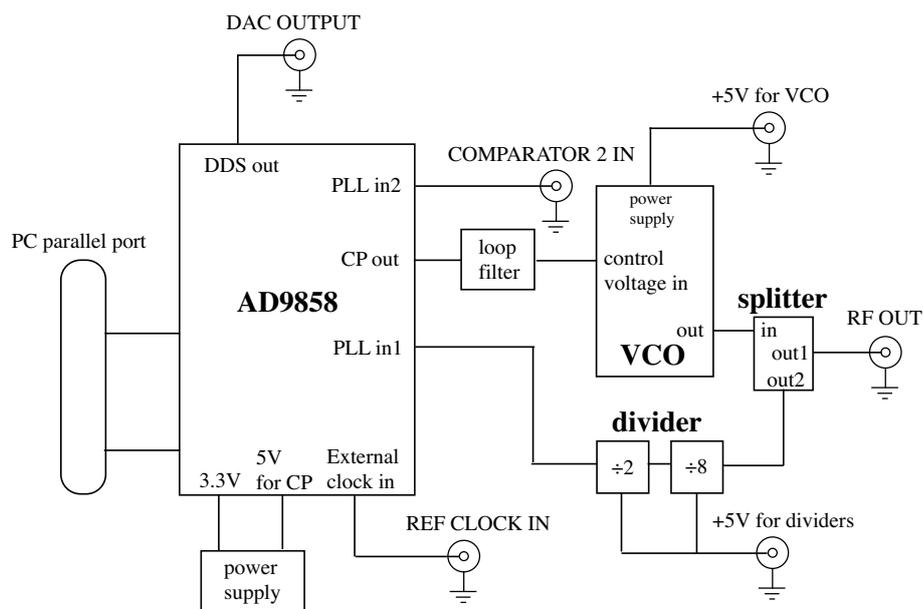


図 3.22 AD9858PCB の概要 (実際の配置は反映していない)

\*10 もちろん、この software を用いずとも、AD9858 を制御することは可能である。

DDS を PLL の基準信号にしたい場合は、DAC OUTPUT を COMPARATOR 2 IN に接続する。PLL のもう片方の入力も VCO と基板上で接続されているため、このままでは使用できない。そこで、divider と VCO の間の回路を削り取って、新たに外部端子と接続できるようにする必要がある。loop filter は charge pump の出力を適切な error signal に直すように設計されている。この loop filter の出力も VCO と接続されているため、改造して外部と接続できるようにしなければならない。今回の実験ではこの loop filter 後の error signal を laser の PZT に feedback する。

### 3.3.2 AD9858PCB のセットアップ

AD9858PCB を offset lock 回路として使うためにはいくつか改造する必要がある。改造する必要がある場所を図 3.23 に示す [14]。図中の cut と書かれた場所の回路を削り取

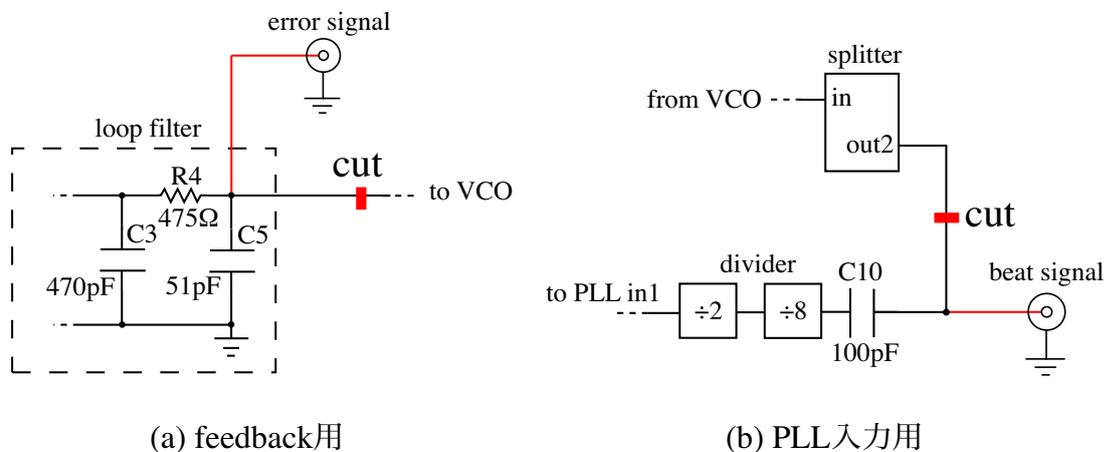


図 3.23 AD9858 の改造箇所

り、VCO との接続を断つ。そして、コンデンサ C5, C10 の端子に導線をハンダ付けし、BNC 端子と接続する。実際にセットアップした AD9858PCB の写真を図 3.24 に示す。

各 SMA 端子は L 字のコネクタによって BNC 端子に変換され、BNC ケーブルで箱のフロントパネルの BNC 端子と接続している。電源には 5V のスイッチング電源と 3.3V の regulator LM1086-3.3(National Semiconductor 社) を用いている。

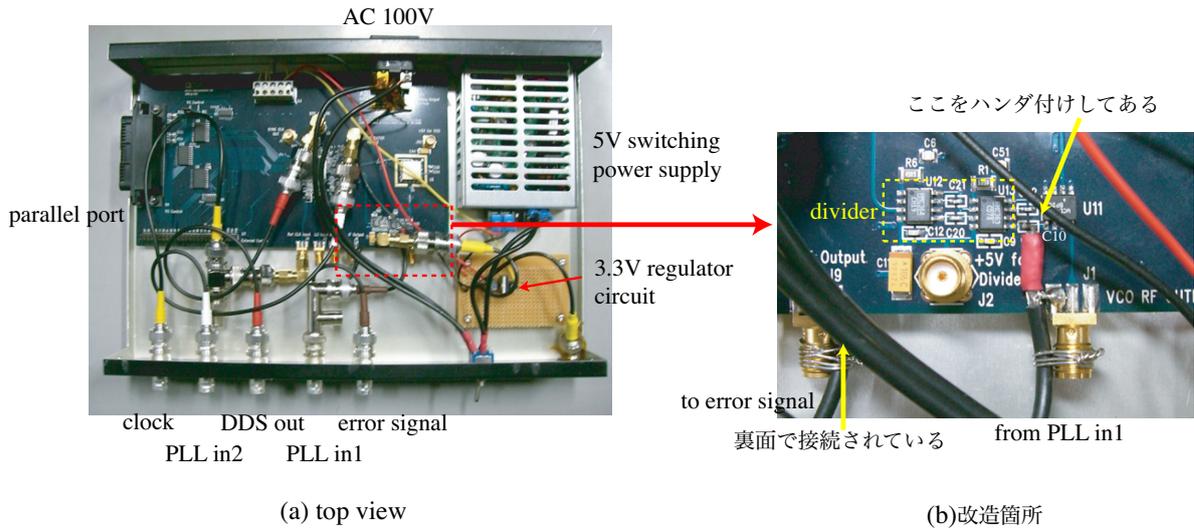


図 3.24 セットアップされた AD9858PCB

## 3.4 laser offset lock の実験

### 3.4.1 実験のセットアップ

図 3.25 に DDS による laser offset lock のセットアップを示す。photo detector は浜松ホトニクス製の Si PIN photodiode S5972[16] を用いて自作した。S5972 は遮断周波数が 500MHz であるので、500MHz までの beat しか測定することができない。したがって、今回の offset lock の実験は 500MHz までの範囲で行う。ただし、BEC の PCI を行うのには 500MHz も離調をつけられれば十分である。

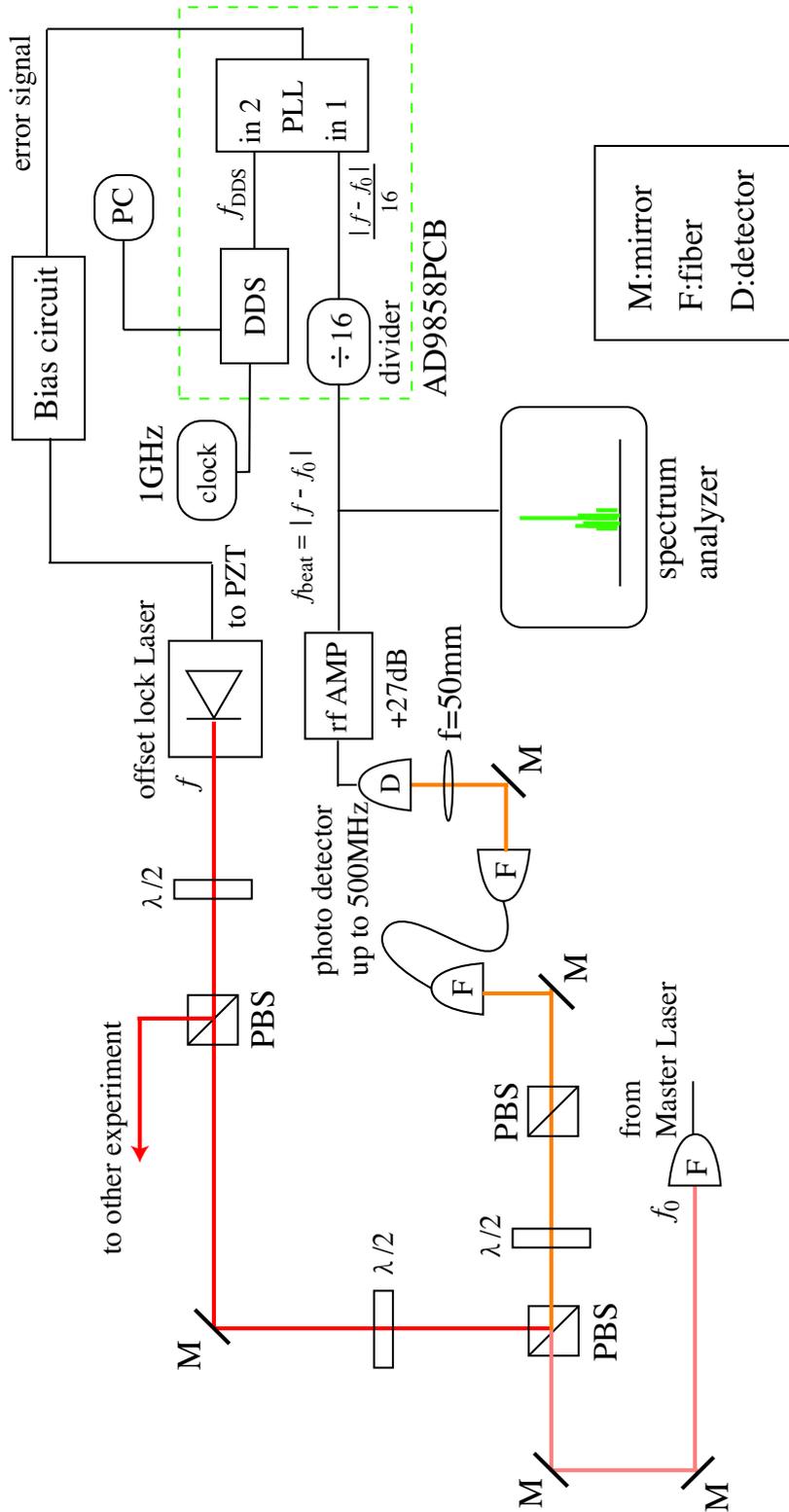


図 3.25 laser offset lock system

図 3.4 の Bias 回路は PZT に Bias 電圧をかけるために用いる。図 3.26 に Bias 回路の概要を示す。Bias 電圧を調整することで laser の発振周波数を lock したい周波数の近く

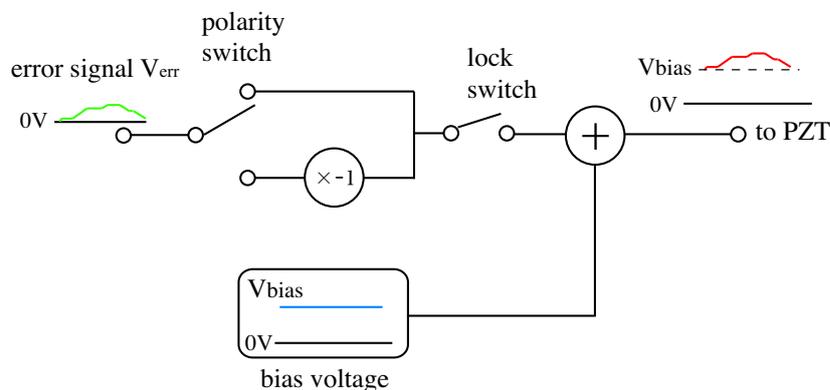


図 3.26 Bias 回路の概要

に持っていくことができ、確実に lock することができる。また Bias 回路は error signal の極性を反転させる機能も持つ。laser に正の離調をつけたいときは極性はそのまま、負の離調をつけたいときは極性を反転させる。今回、Bias 回路は実験室にあった飽和吸収分光用の lock 回路をそのまま流用した。

3.1.3 節で laser offset lock system の概要の説明をしたが、以下でより詳しく説明する。

1. PC と AD9858PCB をパラレルポートを用いて接続する。AD9858 は付属の software によって制御する。
2. AD9858 に外部 clock を接続する。clock として今回は ROHDE & SCHWARZ のファンクションジェネレーターから 1GHz の正弦波を-10dBm 入力した。
3. 光源として Mater Laser と Tunable Laser の 2 台を用意しておく。Master Laser は飽和吸収分光によって  $^{41}\text{K}$  の  $\text{D}_2$  線 (766.7nm) に lock されており、Tunable Laser は自作した 767nm ECDL を用いる。Master laser の偏光は横偏光になっており、PBS によって反射されない。
4. この二つの光源から出た光を PBS によって重ね合わせる。このとき、2 つの光の偏光は直交しているので、 $\lambda/2$  板によって偏光を  $45^\circ$  回転させ、その後再び PBS に入れて同じ偏光成分を取り出す。このようにして 2 つの光の beat が得られる。
5. 光のモードを整える為に一度 fiber に通す。
6. photo detector に 0.7mW 程度の光を入射する。すると photo diode によって、2 つの光の beat signal を電圧として取り出せる。しかし、このままではパワーが弱過ぎて PLL で検出されないので、rf AMP によって +27dB ほど増幅する。これで、beat signal の電圧はだいたい -数 dBm 程度になる。

7. AD9858PCB の PLL in1 に rf AMP から出力される beat signal を入力する。
8. PLL によって、PLL in2 に入力された DDS の周波数  $f_{\text{DDS}}$  と、beat signal  $f_{\text{beat}}/16$  が比較される。PLL からの error signal を Bias 回路を通し、Tunable Laser の PZT に feedback することにより、 $f_{\text{DDS}} = f_{\text{beat}}/16$ 、つまり  $|f - f_0| = 16f_{\text{DDS}}$  に lock される。

offset lock laser の光の一部は fiber によって、BEC を PCI するための probe 光として別の実験系に送られる。

### 3.4.2 実験手順

以下に laser を offset lock するための手順を示す。

1. まず Bias 回路の lock スイッチを OFF にしておき、spectrum analyzer によって beat signal を観察しながら PZT への Bias 電圧を調整して、laser の発振周波数を lock したい周波数の近くにまで持っていく。
2. lock したい周波数が離れすぎていて PZT を調整するだけでは到達不可能な場合は、LD の電流値を変化させたり、温度を調整することで目的の周波数に近づける。
3. PC から DDS の周波数を設定する。ここで、DDS の周波数は目的の offset の 16 分の 1 に設定する。また、このときに software の外部 clock の設定が間違っていると正しい周波数を出力しないので注意する。
4. PC から、PLL の charge pump の出力リファレンス電流値を設定する。この値はまず適当に設定し、lock できなかった場合はまた異なる値で試してみる。
5. Bias 回路の lock スイッチを ON にすることにより、Bias 電圧 + error signal が PZT に送られる。これで offset lock ができる。もし、lock できず、beat signal がどこかへ飛んでしまう場合は Bias 回路の極性を確かめてみる。極性が正しいのに lock できない場合は、charge pump の出力リファレンス電流値を変更する。たいの場合、出力リファレンス電流値を大きめに設定しておけば lock できる。

### 3.4.3 実験結果

DDS の周波数を  $f_{\text{DDS}} = 31.25\text{MHz}$  に設定し、beat signal が DDS の 16 倍の周波数  $f_{\text{beat}} = 500\text{MHz}$  に lock されるか実験をした。lock される前の周波数を  $400\text{MHz}$  に設定した。図 3.27 に実験結果を示す。

図を見れば分かるように  $500\text{MHz}$  程度の位置に lock されていることが分かる。laser の線幅が  $2\text{MHz}$  程度あるので、その揺らぎの範囲内では目的の周波数に lock されてい

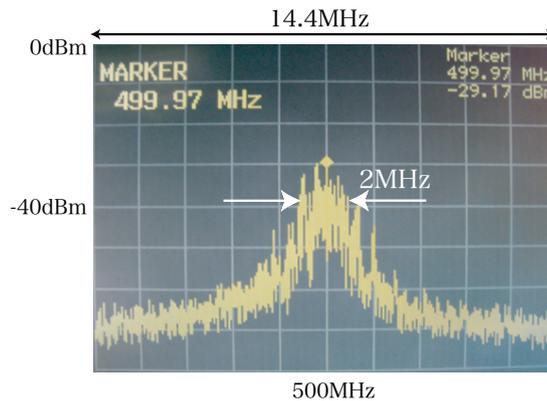
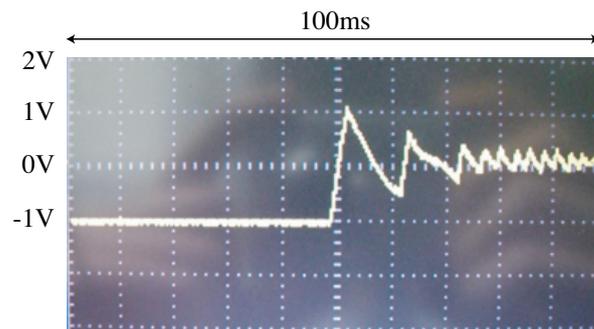


図 3.27 500MHz の offset lock の実験結果

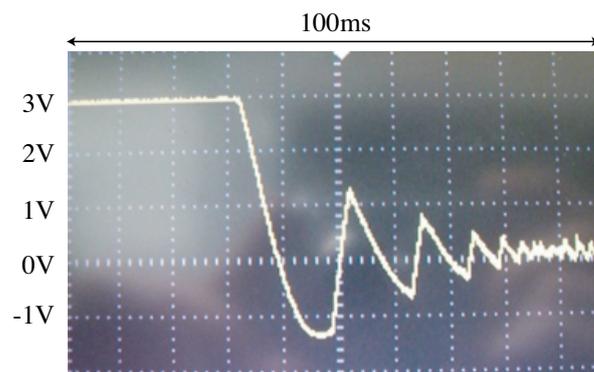
る。今回は error signal を PZT にのみ feedback しているため、MHz 程度の速い揺らぎに対しては feedback が効かない。そのため、laser の線幅は lock 前と lock 後で変化しなかった。laser の線幅を小さくするためには、error signal の速い成分を LD の電流に feedback する必要がある。

beat signal が lock されるとき error signal の様子を図 3.28 に示す。比較のため、680MHz から 500MHz に lock されるとき error signal の様子も示す。図を見ると feedback がしっかりとかかり、error signal が 0V に収束していく様子が分かる。PLL は beat signal と DDS の周波数を比較しているわけであるが、その周波数の差が大きい程 error signal の電圧も大きいことが分かる。つまり、AD9858 に内蔵されている PFD は PLL の原理の節で解説したとおり、位相だけでなく周波数も比較している。

また、error signal の振動の周期を見ると、10ms 程度であることが分かる。これは feedback 回路の時定数によって決まるものであるが、今回は Bias 回路の中に余分な積分器が入っており、その時定数が 10ms であるので、それによって回路の応答時間が決まっている。AD9858 の loop filter の時定数はもっと短く、100ns 程度である。



(a) 407MHzから500MHz



(b) 680MHzから500MHz

図 3.28 lock されるとき error signal

また、lock にかかる時間を表 3.3 に示す。

表 3.3 lock するのに必要な時間

|                  |      |
|------------------|------|
| 400MHz から 500MHz | 25ms |
| 680MHz から 500MHz | 50ms |

当然のことながら、目的の周波数との周波数差が大きい程 lock するのに時間がかかってしまうことが分かる。今の場合、周波数の差は2倍程度あり、lock にかかる時間も2倍になっている。error signal を出力する charge pump の電圧変化は 3.1.4 節で解説したように、PFD が周波数のズレを検出している間は  $V_{\text{error}} = I_p t / C_p$  と時間に比例している。したがって、lock にかかる時間が周波数差に比例しているとするこの結果は妥当なものである。また、この lock にかかる時間も feedback 回路の時定数によって決まってくるので、Bias 回路の中の余分な積分器を取り除くことで、より早く lock できると考えられる。

次に、様々な周波数差に対して laser が lock できるか実験を行った。実験結果を表 3.4 に示す。

表 3.4 offset lock の実験結果

|   |           |
|---|-----------|
| $ f - f_0  \leq 180\text{MHz}$              | lock できない |
| $180\text{MHz} <  f - f_0  < 520\text{MHz}$ | lock できる  |
| $520\text{MHz} \geq  f - f_0 $              | lock できない |

今回の実験で用いた photo detector の遮断周波数は 500MHz であるので、確かに 500MHz 以上の周波数差があると lock できない。しかし、500MHz よりも全然遅い 180MHz 以下の周波数差でも lock ができなくなった。error signal を観察すると、周波数差 180MHz 以下の領域では PLL に信号を入力していないのと同様の振る舞いをした。そこで、その周波数域で PLL が機能するのに必要な入力のパワーを測定することにした。

DDS の出力とファンクションジェネレーター (FG) の出力を divider で 16 分周したものを PLL に入力し、FG のパワーがどれほどあれば正しい error signal を出力するのかを測定した結果を図 3.29 に示す。

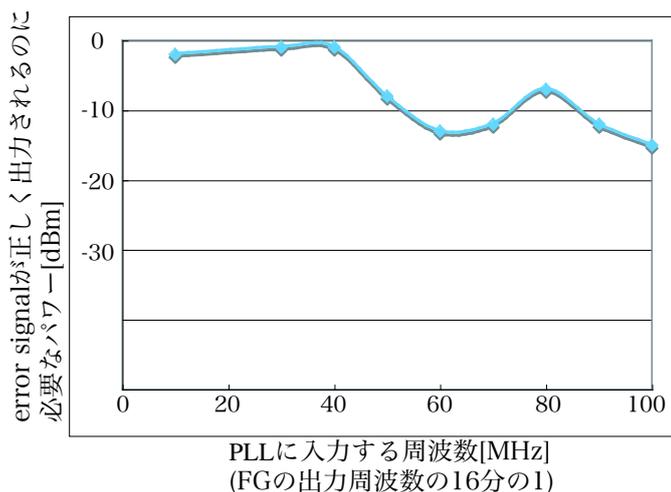


図 3.29 FG の周波数と error signal が出力されるのに必要な FG のパワーの関係

このグラフを見ると低周波域ほど入力するパワーが必要であることが分かる。したがって、180MHz 以下の領域では photo detector によって得られる電圧が足りないため、lock ができない。また、なぜ低周波域ほどパワーが必要なのか考察すると、おそらくそれは 16 分周している divider の性能のためであると考えられる。PLL の仕様書には  $-15\text{dBm}$  のパワーがあれば動作可能と書かれており、実際、PLL に入力している DDS の出力は

全周波数領域に渡り  $-15\text{dBm}$  程度である。AD9858PCB には  $1.53\text{GHz} \sim 1.63\text{GHz}$  用の VCO が内蔵されており、今回用いている divider はその VCO の周波数を分周するためのものであった。したがって、この divider は  $1.6\text{GHz}$  程度の信号を分周するためのものであり、低周波域の信号に対しては性能が落ちると考えられる。

#### 3.4.4 DDS による laser の offset lock のまとめ

この実験によって、DDS と PLL を用いた laser offset lock system が有効に働くことが確かめられた。今回作成した offset lock system によって lock できる周波数域は、reference 光の周波数を  $f_0$ 、tunable laser 光の周波数を  $f$  とすると  $180\text{MHz} < |f - f_0| < 500\text{MHz}$  であった。また、lock に要する時間は数百 MHz 離れていても数十 ms 程度であった。lock に要する時間は Bias 回路の中の余分な積分回路を取り除くことによって改善できると考えられる。

今回の実験では photo detector として自作したものをを用いており、その遮断周波数は  $500\text{MHz}$  である。したがって、今回の実験では  $500\text{MHz}$  までの offset lock を行った。今後、より高速応答 ( $\sim \text{GHz}$ ) する photo detector を準備することにより、offset lock できる周波数範囲を広げることは可能である。ただし、本研究の目的である BEC の PCI を行うのには  $500\text{MHz}$  も offset をつけられれば十分である。

また、低周波域で PLL が有効に動作しない問題に関しては、divider をより適切なものに取り替えるか、photo detector の出力をさらにアンプするなどして解決したい。

## 第 4 章

# BEC の Phase Contrast Imaging

この章では、 $^{41}\text{K}$  の Bose-Einstein 凝縮体 (BEC) の Phase Contrast Imaging について述べる。今までの実験で Phase Contrast Imaging と laser offset lock system を準備できたので、この実験ではそれらを用いて BEC の Phase Contrast Imaging 系を構築する。様々な離調に対して PCI を行い、理論と比較することで、その有効性を検証する。また、大きく離調をとった probe 光を用いることによって、BEC のダイナミクスの観測が可能であるのか、どれほどの離調をとればよいのか、本実験を通じて考察を行う。

### 4.1 BEC の Phase Contrast Imaging の概要

この節では BEC を PCI によって imaging するための知識を整理する。

Phase Contrast Imaging 2.3 節で解説したように、原子気体の透過率  $t$  と phase shift  $\phi$  は以下の式で与えられる (式 (2.66),(2.67) を参照)。

$$t = \exp\left(-\frac{\sigma_0 \tilde{n}}{2} \frac{1}{1 + I/I_S + \tilde{\delta}^2}\right) = \exp\left(-\frac{D}{2}\right) \quad (4.1)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 \tilde{n}}{2} \frac{\tilde{\delta}}{1 + I/I_S + \tilde{\delta}^2} = \tilde{\delta} \frac{D}{2} \quad (4.2)$$

$$D = \frac{\sigma_0 \tilde{n}}{1 + I/I_S + \tilde{\delta}^2} \quad (4.3)$$

ここで、原子の共鳴周波数を  $\omega_0$ 、probe 光の周波数  $\omega$ 、線幅  $\Gamma$ 、離調  $\delta = \omega - \omega_0$  または  $\tilde{\delta} = \delta/\Gamma$ 、原子気体の密度  $n$ 、縦密度  $\tilde{n} = \int n dz$ 、吸収断面積  $\sigma_0 = 6\pi\lambda^2$ 、飽和強度  $I_S$  とする。透過率と phase shift の離調依存性が異なるのがポイントで、離調を大きくとったときに、phase shift が 0 に収束するよりも透過率のほうが早く 1 に収束する。したがって、probe 光の離調を大きくとることによって原子に光を吸収させずに、かつ phase shift に有限の値を持たせることができる。

また、一瞬間あたりに原子が吸収する photon の数を photon scattering rate といい、式 (2.60) から、

$$\Gamma_p = \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_S}{1 + I/I_S + (2\tilde{\delta}/\Gamma)^2} \quad (4.4)$$

で与えられる。また、1つの photon を吸収することによる加熱効果は  $k_B T = (\hbar k)^2 / 2m$  で与えられるので、 $^{41}\text{K}$  の場合は1つの photon を吸収すると  $T \sim 400\text{nK}$  程度だけ加熱する。したがって、photon scattering rate を抑えることが BEC を非破壊で観測するために必要である。

Phase Contrast Imaging で得られるコントラストは式 (2.5) より、

$$I_{PC}/I_0 = t^2 + 2 - 2\sqrt{2}t \cos\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.5)$$

となる。 $I_0$  は原子がないときの probe 光の強度である。この式から PCI では原子による光の吸収だけでなく、phase shift も測定することができることが分かる。透過率が十分1に近いときのコントラストの phase shift への依存性は図 4.1 のようになる。

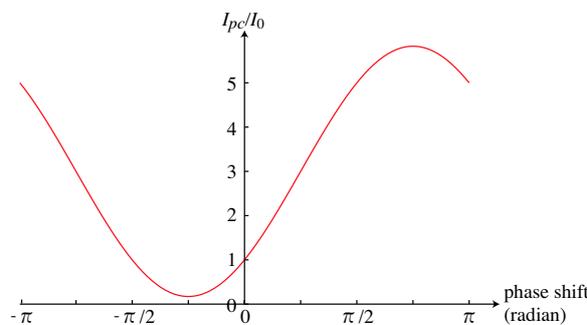


図 4.1 コントラストの phase shift 依存性

phase が進む時はコントラストが1より大きくなり、逆に phase が遅れるときはコントラストが1より小さくなる。

実際に我々が得る情報はコントラスト  $I_{PC}/I_0$  であるが、コントラスト  $I_{PC}/I_0$  から phase shift を求めるには、式 (2.5) を  $\phi$  について解いた、

$$\phi = \arccos\left(\frac{3 - I_{PC}/I_0}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} \quad (4.6)$$

を用いる。

BEC に関する有用な公式 ここでは BEC を評価するために必要ないくつかの公式を示す。これらの公式の導出は参考文献 [17] を見ていただきたい。今回の実験では BEC は磁場のポテンシャルによって空間中にトラップされている。

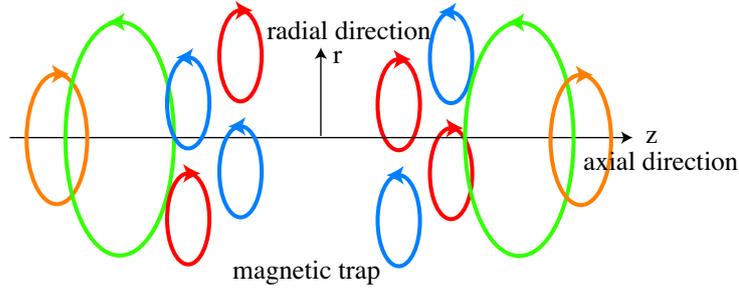


図 4.2 磁場トラップの概要

図 4.2 の丸い円は磁場トラップを構成するコイルであり、矢印は電流の方向を示す。このような構成の磁場トラップを cloverleaf 型磁場トラップと言う [18]。cloverleaf 型磁場トラップのポテンシャルは近似的に非等方の 3 次元調和ポテンシャルと見なすことができ、そのポテンシャルは近似的に、

$$V(r, z) = \frac{1}{2} m (\omega_r^2 r^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (4.7)$$

で表される。ここで  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  は磁場トラップの動径方向 (radial direction)、 $z$  は軸方向 (axial direction) である。また、 $\omega_r$ 、 $\omega_z$  をそれぞれ動径方向、軸方向のトラップ周波数という。今回の実験ではトラップ周波数はそれぞれ  $\omega_r = 2\pi \times 325\text{Hz}$ 、 $\omega_z = 2\pi \times 15\text{Hz}$  となっている。ここで、 $\omega_r$  と  $\omega_z$  の相乗平均として  $\bar{\omega} = (\omega_r^2 \omega_z)^{1/3}$  を定義しておく。

BEC の密度分布を平均場近似と Thomas-Fermi 近似を用いて求めると、

$$n(r) = \frac{\mu}{U_0} \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{d_r^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right] \quad (4.8)$$

となる (ただし、 $r^2/d_r^2 + z^2/d_z^2 \leq 1$ )。ここで、 $d_r$ 、 $d_z$  はそれぞれ BEC の動径方向、軸方向の大きさ、 $\mu$  は化学ポテンシャル、 $U_0$  は 2 粒子間相互作用の大きさであり、原子の s 波散乱長  $a$  を用いて以下のように書ける。

$$\mu = \frac{1}{2} \hbar \bar{\omega} \left( 15Na \sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5} = 1.48 (Na \hbar^2 \bar{\omega}^3 m^{1/2})^{2/5} \quad (4.9)$$

$$U_0 = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (4.10)$$

$$d_v = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_v^2}} \quad (v = r, z) \quad (4.11)$$

$N$  は BEC の原子数、 $^{41}\text{K}$  の場合  $a = 3.18\text{nm}$  である。これらの式を用いて BEC の特性を評価することができる。

実際に BEC を PCI によって観測する際にはデータとして phase shift  $\phi$  の空間分布が得られる。この値から原子数を評価するには上の式は不便であるので、いくらか式を変形しておく。BEC の密度分布を動径方向と軸方向の大きさをういて書き換えると、

$$n(\mathbf{r}) = \frac{15N}{8\pi d_r^2 d_z} \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{d_r^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right] \quad (4.12)$$

となる。いま、probe 光は動径方向から入射するとして、その方向 (ここでは x 方向とする) の縦密度を求めると、

$$\tilde{n} = \int_{-d_r}^{d_r} \sqrt{1 - (y^2/d_r^2 + z^2/d_z^2)} dx n(\mathbf{r}) = \frac{5N}{2\pi d_r d_z} \left[ 1 - \left( \frac{y^2}{d_r^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.13)$$

が得られる。したがって、phase shift は式 (4.1) を用いると、

$$\phi = \frac{5N\sigma_0}{4\pi d_r d_z} \frac{\delta}{1 + I/I_S + \delta^2} \left[ 1 - \left( \frac{y^2}{d_r^2} + \frac{z^2}{d_z^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.14)$$

となる。つまり、実験によって得られた phase shift の値を上式によって fitting し、BEC の大きさ  $d_r$ 、 $d_z$ 、原子数を評価することができる。

## 4.2 実験のセットアップ

この節では BEC を PCI するための実験系について、そして実験手順について述べる。

### 4.2.1 実験系

図 4.3 に BEC の PCI を行うための実験系を示す。

この実験系は object が BEC であることを除いて、2 章で説明した PCI の実験系と同等である。BEC は高真空度の glass cell の中に磁場トラップによってトラップされている。以下で実験系について解説する。この系はもともと BEC の Absorption Imaging を行うためのものであったが、レンズの焦点の位置に phase plate を入れるだけで、PCI 用の実験系として使うことができる。



となっていた。この系では CCD カメラの 1pixel は  $4.2\mu\text{m}$  となっている。また、CCD カメラは PC と接続されており、とった画像をすぐに処理するプログラムがある。

#### 4.2.2 実験手順

imaging の方法として、蒸発冷却が終了した時点で磁場トラップを切る TOF imaging(Time of Flight)、磁場トラップし続ける in trap imaging の 2 種類があるが、今回は in trap imaging を行った。TOF imaging では磁場トラップを切った直後に原子がその速度にしたがって広がるので、BEC の速度分布を得ることができる。しかし、今回は速度分布を得ることが目的ではなく、PCI によって BEC の image をとることが目的である。そのため、密度が高い in trap のほうがはっきりとした像を得ることができ、実験を行いやすいので、今回は in trap での imaging を行う。

以下に PCI で in trap の BEC の image をとる実験手順を示す。

1. MOT(Magnet-Optical Trap) によって glass cell 中に  $^{41}\text{K}$  原子を集め、冷却する。十分な原子数が集まったら CMOT(Compressed MOT) に切り替え、原子気体の密度を上昇させつつ、より低温に冷却する。その後 MOT を切り、磁場トラップにて原子気体をトラップする。この段階で原子気体の密度は  $5 \times 10^{10}/\text{cm}^3$ 、温度は  $100\mu\text{K}$  程度となっている。
2. 磁場にトラップされた原子気体に対して蒸発冷却を行う。この蒸発冷却によって原子気体の温度は  $1\mu\text{K}$  以下にまで下がり、Bose-Einstein 凝縮する。このときの原子数は  $N \sim 10^5$  程度である。
3. 蒸発冷却が終了し、BEC が生成された直後に probe 光を入射し、CCD カメラにて BEC の in trap image をとる。これによって PCI における光の強度  $I_{\text{PC}}$  を得る。
4. 磁場トラップを切ると原子は飛散していなくなるので、CCD カメラに probe 光を入射して probe 光の強度  $I_0$  を得る。さらに、probe 光も入れない状態での CCD カメラの出力を取り込む。これは、CCD カメラに probe 光以外の光が入ってきている可能性、または CCD カメラ自体の誤差を取り除くためである。このときの光の強度を  $I_{\text{offset}}$  とする。
5. 一連の過程で得られたデータ  $I_{\text{PC}}$ 、 $I_0$ 、 $I_{\text{offset}}$  から

$$\phi = \arccos \left( \frac{3 - (I_{\text{PC}} - I_{\text{offset}})/(I_0 - I_{\text{offset}})}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{4} \quad (4.15)$$

によって phase shift を算出する。また、このデータを元にして fitting を行い、BEC の広がり、phase shift のピーク値を得る。

### 4.3 実験結果

PCI による BEC の非破壊測定 大きく離調をつけた probe 光によって、BEC を非破壊で測定することができるか実験を行った。今回の実験では図 4.4 に示すように probe 光を  $300\mu\text{s}$  間隔で断続的に入射して、BEC の連続的な image を撮影した。

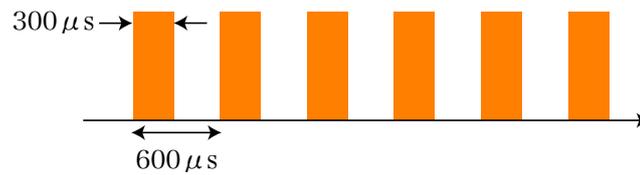


図 4.4 probe 光の入射間隔

probe 光として共鳴付近 ( $+20\text{MHz}$ ) のものと、大きく離調をつけたもの ( $+400\text{MHz}$ ) の 2 種類を用いて BEC の PCI を行った。図 4.5 に実験結果を示す。

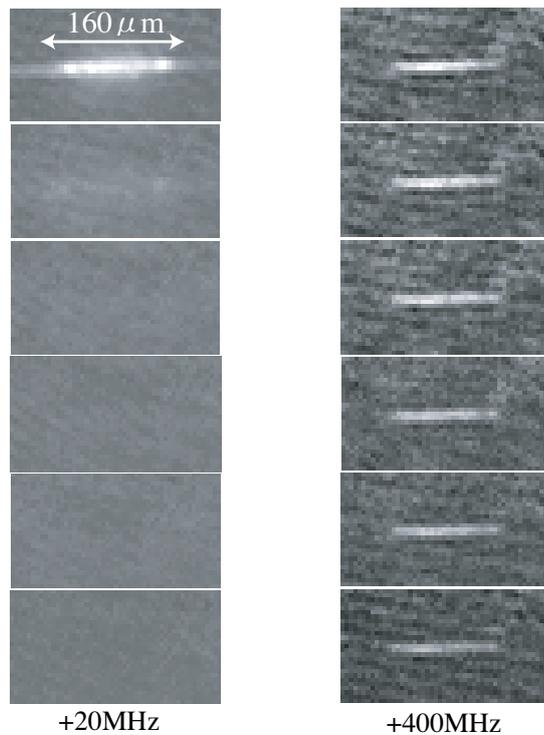


図 4.5 BEC の非破壊測定

図を見れば分かるように、共鳴に近い probe 光では BEC は破壊されてしまっているが、離調を大きくつけた場合、BEC を連続的に imaging できていることが分かる。次に、

より定量的に評価するために様々な離調に対して BEC の PCI を行ってみる。

phase shift の離調依存性 様々な離調をつけた probe 光によって BEC の PCI を行った時の image を図 4.6 に示す。図を見ると分かるように離調が正の時 phase shift の値は

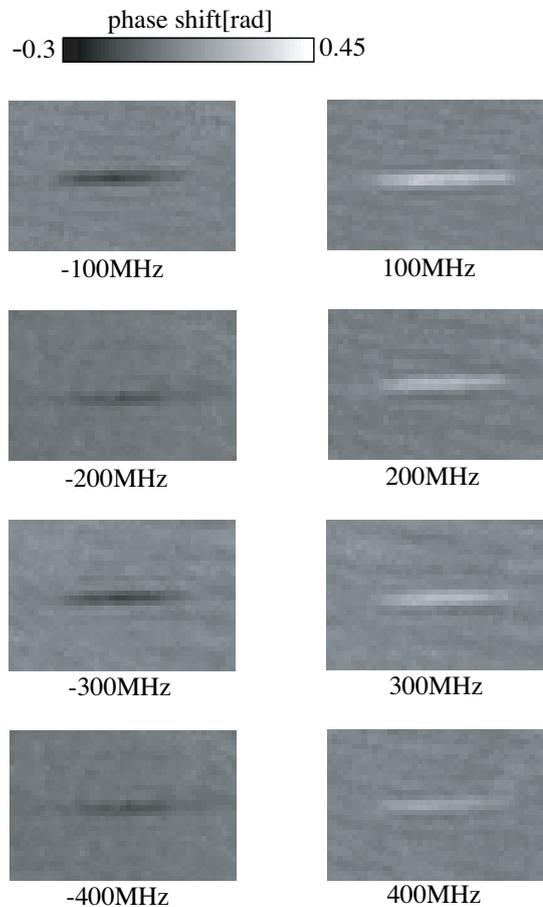


図 4.6 PCI による BEC の image

負、離調が負の時 phase shift の値は正となっている。これは理論から予想される振る舞いに一致している。さらに、probe 光が共鳴に近くなればなるほど phase shift は大きくなっている。

また、離調に対する phase shift の変化をグラフにしたものを図 4.7 に示す。

赤い点の実験によって得られた phase shift で、青い曲線は理論曲線である。いま、共鳴付近には興味がないので、 $t = 1$  として phase shift を求めている。この図から、実験値と理論曲線がよく一致していることが分かる。また、理論曲線との比較によってえられた BEC の密度は  $2.9 \times 10^{13} / \text{cm}^3$  であった。これは Absorption Imaging によって測定した密度  $3.5 \times 10^{13} / \text{cm}^3$  の 80 % 程度の値である。phase plate を PCI した時にも同様の誤差が見られており、妥当な結果が得られている。

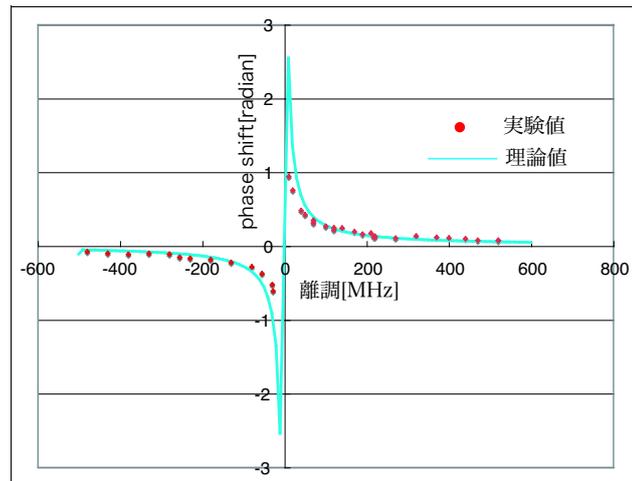


図 4.7 phase shift の離調依存性の実験結果

BEC の成長過程 蒸発冷却が終了する 1 秒前から 150ms ごとに、離調 400MHz の probe 光で原子気体を PCI によって撮影した image を図 4.8 に示す。

図に示した原子の phase shift は、赤い点の実験データであり、曲線は fitting によって得られた曲線である。t=0ms の図を見ると、原子の phase shift が Gauss 分布でよく fitting できていることが分かる。これは温度が高い原子気体の状態を反映している。蒸発冷却が進み、t=300ms あたりになると、Gauss 分布に従わない成分が現れ始めているのが分かる。これがボース凝縮した成分である。実験値は Thomas-Fermi 近似による理論式 (4.14) とよい一致を示している。原子気体が BEC 成分とそれ以外の成分に分かれている状態を bimodal という。さらに蒸発冷却が進むと、温度の高い原子は取り除かれ、BEC 成分だけが残っていることが分かる。

このように、PCI を用いることによって BEC が蒸発冷却によってどのように成長するのかということを、非破壊的に観測することができた。

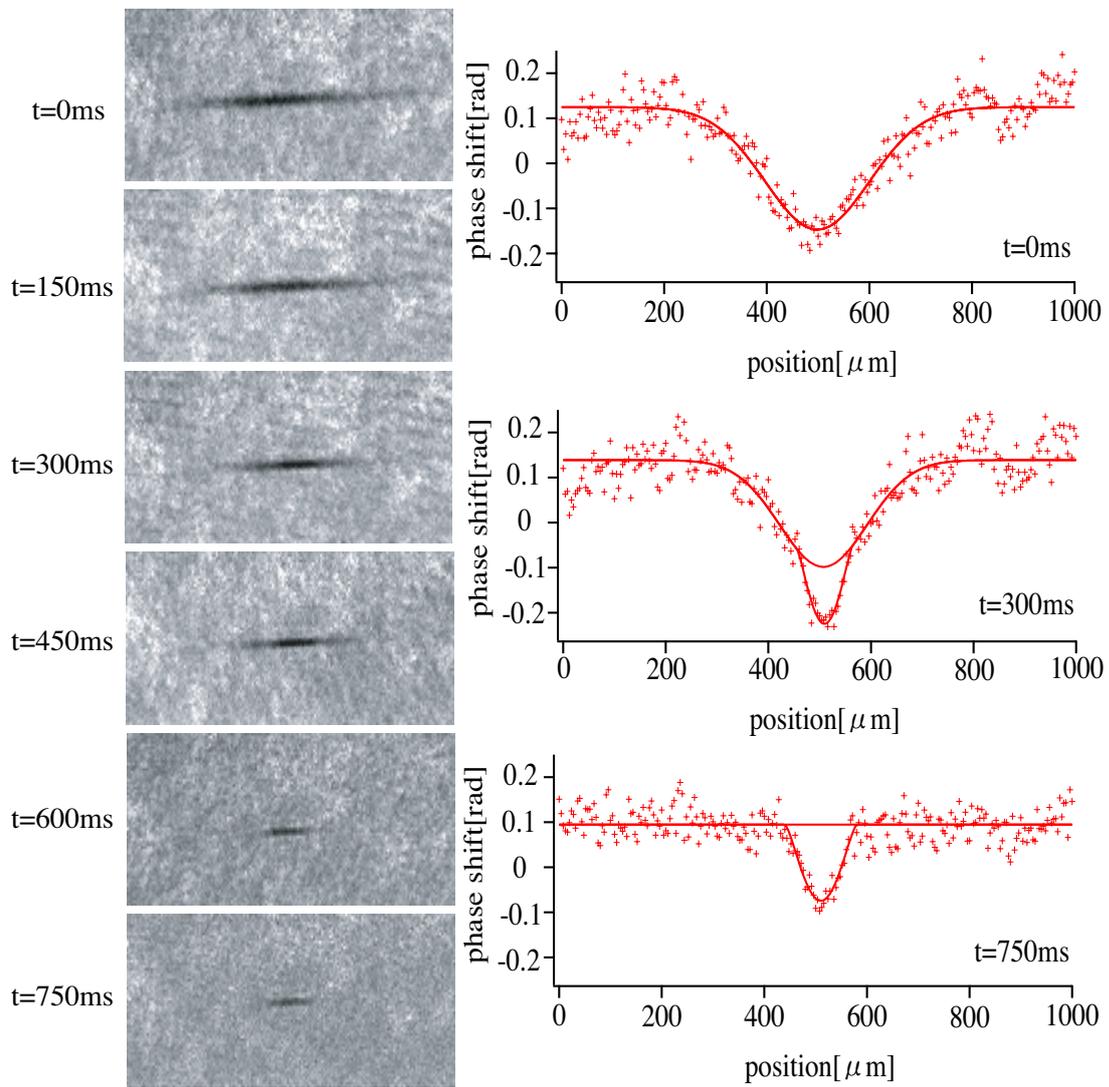


図 4.8 BEC の成長過程

## 第 5 章

# まとめと今後の展望

今回の卒業研究では Phase Contrast Imaging の実験、laser offset lock system の構築、BEC の Phase Contrast Imaging の 3 つの実験を行った。まず、phase plate を object として用いた PCI によって、object の phase shift が見えることを実験的に確認した。PCI では phase shift の量を小さく見積もってしまうが、その理由は未だに分からず、今後の課題としたい。

そして DDS と PLL を用いた offset lock system を構築し、それによって 180MHz から 500MHz までの offset lock を達成した。この 500MHz という値は beat signal を検出するのに用いる photo detector によって決まってしまう。今後、さらに高速の photo detector (~ GHz) を用意することで lock できる範囲を GHz 程度にまで広げていく予定である。また、DDS は周波数を正確に、そして素早く、位相連続に変更できるので、蒸発冷却用の良質な rf 磁場を作り出すことができる。このような、蒸発冷却の改善に向けた DDS rf 磁場システムの構築も今後の目標である。

BEC の Phase Contrast Imaging ではその結果を見れば分かるように、BEC を非破壊で観測することに成功した。ここでも phase shift の値を低く見積もってしまうという問題は残るが、その部分は Absorption Imaging によって補うことができる。また、冷却原子気体が BEC へ転移する過程を観測することができた。これらのことから、PCI によって BEC のダイナミクスを見ることは十分に可能である。

# 謝辞

本論文は東京大学工学部物理工学科 2007 年度卒業論文として書かれたものです。卒業研究を進める上でお世話になった方々にお礼の言葉を述べることで、本論文の結びとしたいと思います。

まず最初に、本卒業研究の指導教員である井上慎准教授に心から感謝の意を表します。先生にはこの上ない研究環境とともに、「ボース凝縮体の Phase Contrast Imaging」という大変やり甲斐のある研究テーマを与えていただきました。私はこの研究を通じて物理学徒として、人として大きく成長することができました。また、先生の物理に対する深い洞察、研究を進める上で常に先を見つめる姿勢、些細な疑問にも丁寧に答えてくださる心遣い、そのすべてで私に物理学者のあるべき姿を教えてくださいました。4月の終わりに研究室に配属されてから今日までの研究生活は、私にとってかけがえのない日々になりました。

電気通信大学 岸本哲夫助教（元 井上研究室助教）は本実験の理論面・実験面のどちらにおいても丁寧に面倒を見てくださいました。理論面では、物理を直感的にかつ正確に説明して下さり、その分かりやすさに感動を覚えたほどでした。また実験面では機械工作に始まり、光学系の配置の仕方、データ処理などを教えてください、また夜遅くまで実験の面倒を見てくださりました。岸本助教のおかげで安全に、そして確実に実験を行うことができ、大変感謝しております。また、研究以外にも様々な企画を立ててくださり、大いに楽しむことが出来ました。

井上研究室 小林淳助教には実際に実験を行う上で大変お世話になりました。何度も質問に来る私に毎回丁寧に、根気強く答えてくださり、また実験が夜遅くまで長引いたときにも研究室に留まり面倒を見てくださいました。岸本氏と小林氏とともに BEC の Phase Contrast Imaging に初めて成功したあの夜の興奮は、今だ冷めやりません。

赤松大輔博士は物理に対する深く、成熟した知識をもって様々な物理現象について分かりやすく教えてくださいました。また、実験に対する取り組み方など、外から見ていて大変参考になりました。M2 の相川清隆氏の知識の幅広さ、研究熱心さには驚かされるばかりでした。M1 の野田開氏には、私が研究室に配属された直後から井上研についてや、参

考になる本などを教えてくださり、とても助かりました。M1 の林正泰氏は、私が実験や物理の話で質問をしにいくといつも気さくに答えてくださりました。同輩の田野岡祐介氏とはときに熱く議論し、ときに励まし合うことで互いに切磋琢磨することができました。

上田マクロ量子制御プロジェクトを通じて、上田 ERATO 研究総括である東京工業大学上田正仁教授、不確定性制御グループ・グループリーダーの東京工業大学上妻幹旺准教授、強相関量子制御グループ・グループリーダーの向山敬博士にも大変お世話になりました。この御三方は上田プロジェクトのグループミーティングの際に私の稚拙な英語にも熱心に耳を傾けてくださり、鋭い質問やアドバイスをしてくださいました。そのおかげで、私は自分の研究についてより深く考えを巡らすことができました。また、上田プロジェクト研究員の武井宣幸博士、竹内誠博士、堀越宗一博士、東京大学工学部五神研究室 D2 稲田安寿氏、東京工業大学上田研究室 M2 中島秀太氏、東京工業大学上妻幹旺研究室 B4 土井弘大氏とは同じ居室を用いていることもあり、物理だけでなく、様々なことを話し、とても有意義な時間を過ごすことができました。グループミーティング時の発言や、輪講のときの話は皆様それぞれ個性があり、とても興味深かったです。

最後になりましたが、本研究で用いた phase plate を加工してくださった東京大学大学院工学系研究科産業機械工学専攻 中尾・濱口研究室所属の長藤圭介氏に感謝の言葉を述べたいと思います。氏が加工してくださった phase plate のおかげで、本研究はすばらしい成果を挙げることができました。

ここに書くことが出来なかった方々も含めて、研究を御指導、御支援くださった方々に改めてお礼を申し上げます。皆様のご恩に報いるよう、これからも精進していきたいと思う次第です。

## 参考文献

- [1] E.L.Raab,M.Prentiss,A.Cable,S.Chu,and,D.E.Pritchard,Phys.Rev.Lett.**59**,2631(1987).
- [2] K.B.Davis,M.-O.Mewes,M.R.Andrews,N.J.van Druten,D.S.Durfee,D.M.Kurn,and W.Ketterle,Phys.Rev.Lett.**75**,3969 (1995).
- [3] M.H.Anderson,J.R.Ensher,M.R.Matthews,C.E.Wieman,and E.A.Cornell,Science **269**,198 (1995).
- [4] M.R.Andrews,C.G.Townsend,H.-J.Miesner,D.S.Durfee,D.M.Kurn,and W.Ketterle,Science **275**,637 (1997)...
- [5] K.W.Madison,F.Chevy,W.Wohlleben ,and J.Dalibard,Phys.Rev.Lett.**84**,806 - 809 (2000)
- [6] B.DeMarco and D.S.Jin,Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas,Science,**285**,10(1999)
- [7] M.Bartenstein,A.Altmeyer,S.Riedl,S.Jochim,C.Chin,J.H.Denschlag and R.Grimm,Collective Excitation of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover,Phys.Rev.Lett.**92**,203201(2004)
- [8] W.Ketterle,D.S.Durfee,and D.M.Stamper-Kurn,Making,probing,and understanding Bose-Einstein condensates ,arXiv:cond-mat/9904034
- [9] Analog Dvices 社 Homepage,<http://www.analog.com/>
- [10] Hal.Tasaki, 統計力学,<http://www.gakushuin.ac.jp/881791/statbook/>
- [11] Christopher.J.Foot,Atomic Physics,OXFORD UNIVERSITY PRESS
- [12] 久我隆弘, 量子光学, 朝倉書店
- [13] Harold.J.Metcalf,Peter van der straten,Laser Cooling and Trapping,spinger
- [14] David burns,A Frequency Offset Lock for High Field Imaging,  
<http://www2.physics.utoronto.ca/~astummer/>
- [15] 藤井 信生, 関根 慶太郎, 高木 茂孝, 兵庫 明, 電子回路ハンドブック, 朝倉書店
- [16] 浜松ホトニクス HP,<http://jp.hamamatsu.com/>
- [17] 鳥井 寿夫, ルビジウム原子気体のボース・アインシュタイン凝縮体の生成および原子

波干渉計への応用, 博士論文

[18] 野田 開, 新栄 拓人,  $^{41}\text{K}$  の蒸発冷却のための磁気トラップの作成, 卒業論文