
^{12}C における 3α 相関の解析 Hoyle状態は α 凝縮しているのか？

千葉陽平
大阪市大 & NITEP

共同研究者：山本昌幸(原子核理論B4)

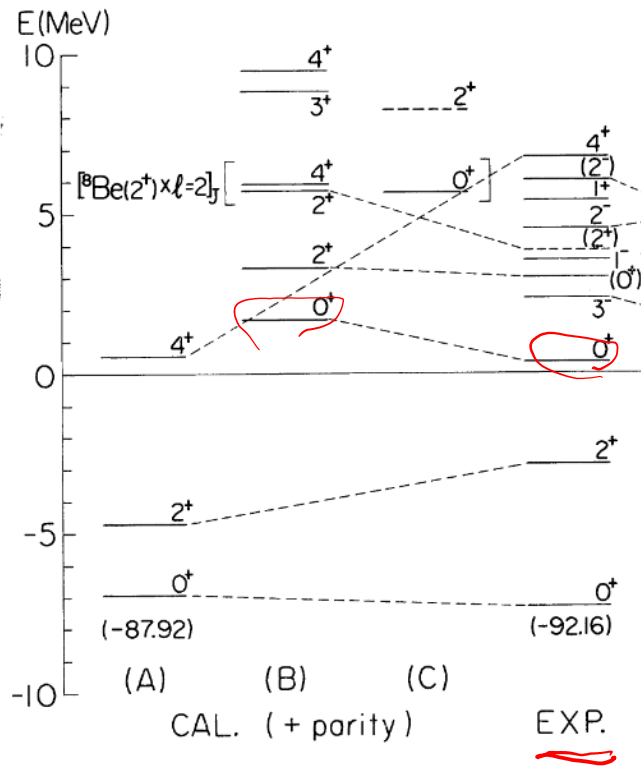
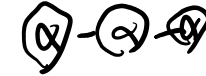


素朴な疑問：Hoyle状態は 3α 凝縮状態？

- ^{12}C のHoyle状態($0+2$ 状態)は α 凝縮状態であると考えられている
- 少なくとも α 凝縮をリスペクトした模型(THSR)が最も成功を収めているのは事実ではあるが、 α 凝縮していることの実験的証拠はない。
- 励起エネルギーを再現していても、Hoyle状態の構造は理論模型により異なる。特に相互作用依存性（クラスター由来 or 平均場由来）が顕著。
- 今回はそもそもHoyle状態が α 凝縮状態なのかを理論的に解析した結果を紹介したい

Geometric ? Dilute-gas? α condensation?

- “three alpha particle in a line” (H. Morinaga, Phys. Rev. 1956)
- Dilute 3alpha gas (GCM, RGM...), “no specific configuration” $r > 3.2$ fm



E. Uegaki et al., PTP55 (1977)

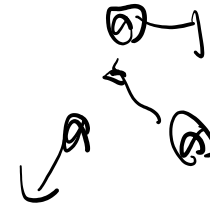
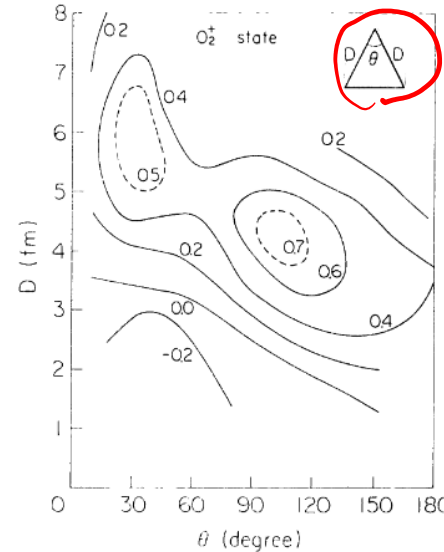


Fig. 4. The 0_2^+ state is shown by overlaps $G(\theta, D) \equiv \langle \Phi^{J^{\pi} = 0^+}(\theta, D) | \Psi(0_2^+) \rangle$. Broad zero-point oscillation is seen, which well corresponds to the energy valley in Fig. 2(b).

補足：この時点でHoyle状態に関する観測量はおおよそ説明可能

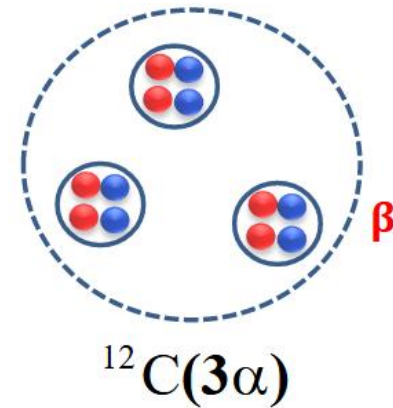
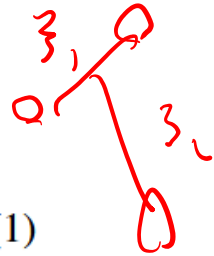
α condensation: THSR (container picture) Tohsaki et al., PRL (2001)

$$\Phi^{\text{THSR}}(\beta) = \mathcal{A} \left[\prod_{i=1}^3 \exp \left\{ -2 \sum_{k=x,y,z} \frac{(R_{ik} - X_k)^2}{b^2 + 2\beta_k^2} \right\} \phi(\alpha_i) \right], \quad (1)$$

$$= \mathcal{A} \left[\exp \left\{ - \sum_{i=1}^2 \mu_i \sum_{k=x,y,z} \frac{\xi_{ik}^2}{b^2 + 2\beta_k^2} \right\} \phi(\alpha_1) \phi(\alpha_2) \phi(\alpha_3) \right],$$

$$\phi(\alpha_i) \propto \exp \left[- \sum_{1 \leq j < k \leq 4} (r_{4(i-1)+j} - r_{4(i-1)+k})^2 / (8b^2) \right], \quad (2)$$

Y. Funaki, PRC67 (2003)



taken from B. Zhou slide(JCNP2015)

基底状態・Hoyle状態の波動関数をそれぞれ“ほぼ”1つのTHSR波動関数で記述可能

- 基底状態：1つのTHSR波動関数との重なり ~ 0.99
- Hoyle状態：基底状態を記述するTHSR波動関数と直交化したTHSR波動関数との重なり ~ 0.95

最新のクラスターモデルの結果の比較

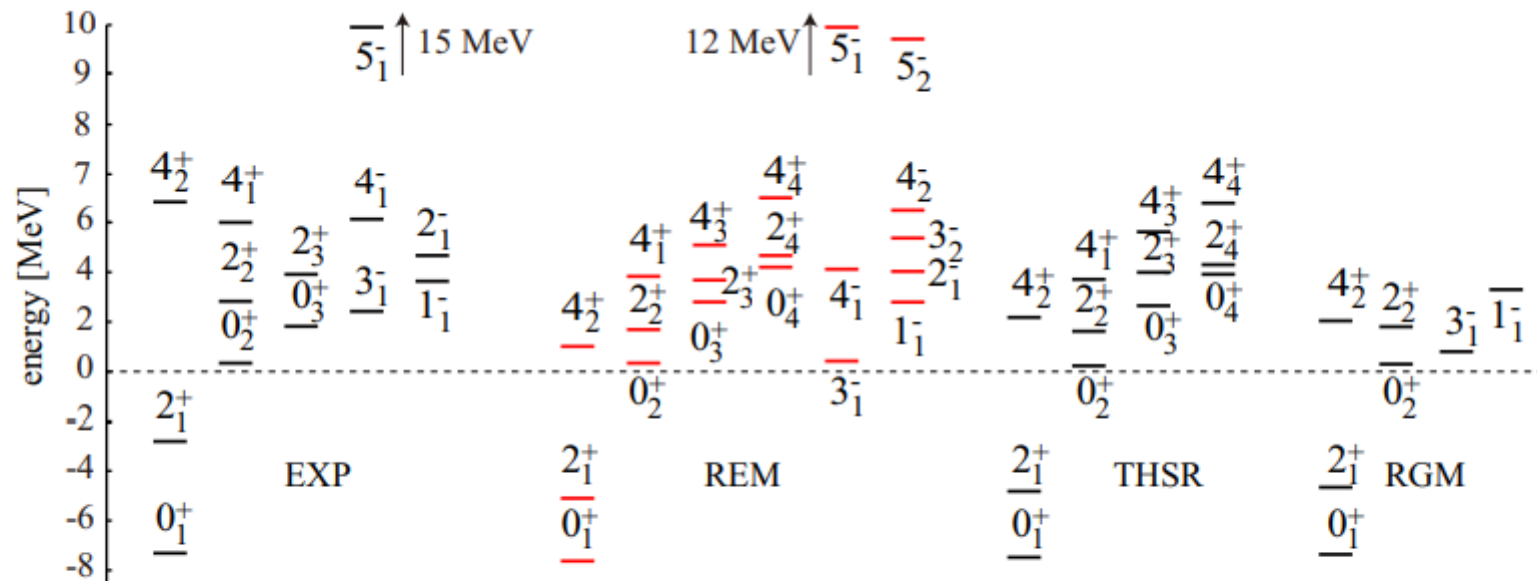
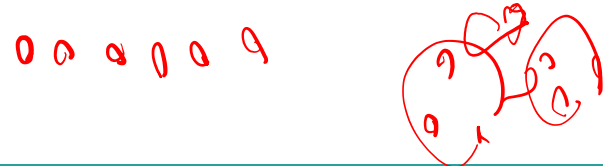


FIG. 9. Excitation energies measured from the 3α threshold. Theoretical results by the REM, THSR [18,23] and RGM [2,3] are compared with the experiments [13–16,19,72–76]. The calculated 4_1^+ , 4_2^+ , 5_1^- , and 5_2^- states are labeled according to the observed counterparts.

幾何学的クラスター模型 (D_{3H} 対称性)



- 基底状態が 3α の正三角形構造を持つと仮定
対称性からハミルトニアンが定まり、そのパラメータは観測データから決定

M.Lambarri et al., PRL113 (2014)

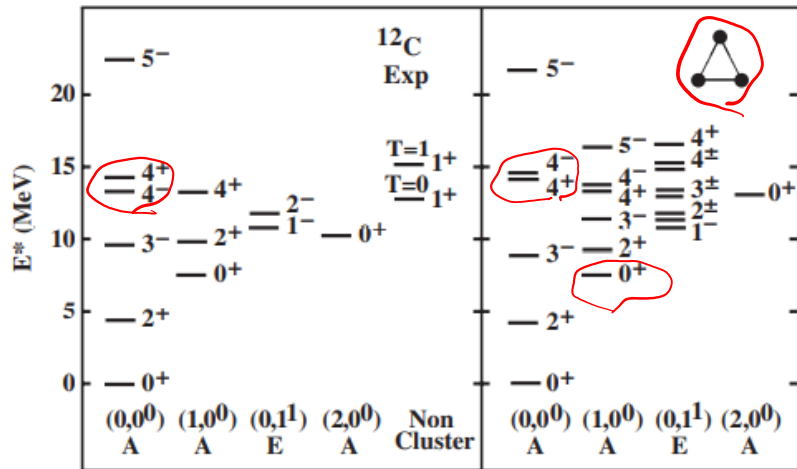
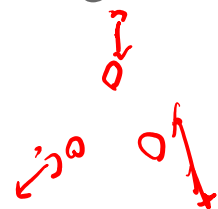


FIG. 5. Comparison between the low-lying experimental spectrum of ^{12}C and the energies of the oblate symmetric top calculated using Eq. (2) with parameters that are discussed in the text. The levels are organized in columns corresponding to the ground state band and the vibrational bands with A and E symmetry of an oblate top with triangular symmetry. The last column on the left-hand side, shows the lowest observed non-cluster (1^+) levels.



$$E = E_0 + \omega_1 \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{v_1 + 1/2}{N} \right) + \omega_2 (v_2 + 1) \left(1 - \frac{v_2 + 1}{N + 1/2} \right) + \kappa_1 L(L + 1) + \kappa_2 (K \mp 2\ell_2)^2 + \left[\lambda_1 \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) + \lambda_2 (v_2 + 1) \right] L(L + 1). \quad (2)$$

D_{3H} 対称性で観測データを説明可能
この模型ではHoyle状態は正三角形の大きさだけが変化する breathing mode. つまり、3つの α が同時に運動している状態



平均場模型を用いたHoyle状態の記述

Skyrme力を用いた 多スレーター行列式による 軽い核の励起構造計算

Y. Fukuoka¹

Y. Funaki^{2,3}, K. Yabana^{1,2,3}, T. Nakatsukasa^{2,3}

¹ Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

² Center for Computational Sciences, University of Tsukuba

³ RIKEN Nishina Center

RCNP 研究会「クラスターガス状態探索のための研究戦略会議」

¹²Cにおける平均自乗半径についてのまとめ

Hoyle stateについて

Hoyle stateのエネルギーが小さくなるにつれ、平均二乗半径も同様に小さくなっていく

半径が大きいこととエネルギーが低いことが両立できない

0_2^+	全エネルギー [MeV]	平均二乗半径 [fm]
クラスター	-75.08	3.33
クラスター (虚時間)	-93.08	2.98
全て	-95.84	2.72
虚時間	-96.17	2.72

		Exp.	AMD (*1)	FMD (*2)	RGM (*3)	BEC (*4)	GCM (*5)	Cal.
平均二乗半径 (fm)	0_1^+	2.31	2.53	2.53	2.40	2.40	2.40	2.53±0.01
	0_2^+	-	3.27	3.38	3.47	3.83	3.40	2.72±0.01
Monopole (efm ²)	$0_1^+ \rightarrow 0_2^+$	5.4(2)	6.7	6.53	-	6.45	6.6	4.88±0.40

M(E0)は他の理論計算は大きく、我々の計算結果は小さい

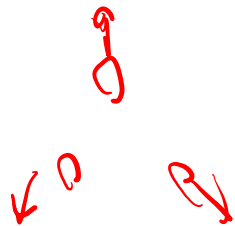
17

平均場由来の相互作用 (Skym, Gogny相互作用) とクラスター由来の相互作用では半径が大きく異なる。さらに具体的にどのように構造が違うは誰も議論していないうえ、本当に α 凝縮しているかは検証されていないのが現状。

結局のところ、何が違うのか？ $\hat{A}|\dots\rangle = \hat{A}|\otimes\rangle \rightarrow \hat{A}|a^0\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{A}|\dots\rangle + \hat{A}|\otimes\rangle)$

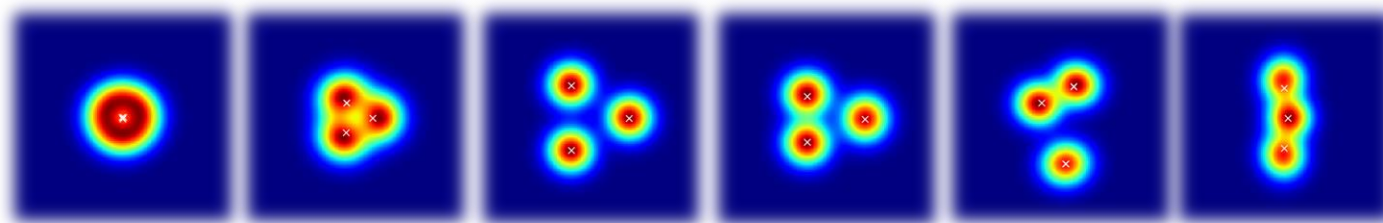
- Hoyle状態が 3α クラスター状態であることはほぼ確定(3α 反応率)
- 問題はどのような構造を持つかで言い換えると、どのように3つの α クラスターが関連して運動しているかである
 - α 凝縮：無相関
 - 幾何学的構造：強相関
- これまでの理論研究ではこの相関を直接的に解析・議論していない。していても、描像を反映した波動関数への射影の大きさのみ。
- そこで 3α の波動関数を12体系の波動関数から抽出して、相関について調べれば理論的には α 凝縮なのかがわかる。
- ここでは平均場由来の相互作用とクラスター由来の相互作用を使った結果を紹介



AMD(Antisymmetrized Molecular Dynamics; 反对称化分子動力学)

$$\Phi_{AMD} = \mathcal{A}\{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_A\},$$
$$\varphi_i = \exp \left[- \sum_{\sigma=xyz} \nu_{\sigma} \left(r_{\sigma} - \frac{Z_{i\sigma}}{\sqrt{\nu_{\sigma}}} \right)^2 \right] \otimes (\alpha_i | \uparrow \rangle + \beta_i | \downarrow \rangle) \otimes \xi_i$$

^{12}C



$N(\lambda, \mu)$ 8(0,4) 10(0,5) 20(0,10) 16(4,6) 20(12,4) 16(16,0)

クラスター構造を仮定せずに基底状態・励起状態を記述可能

理論計算の流れ

Variation

- パリティ射影後のエネルギーに拘束ポテンシャルを加えたものが最小になるように変分
- $E'_c = \frac{\langle \Phi^\pm | \hat{H} | \Phi^\pm \rangle}{\langle \Phi^\pm | \Phi^\pm \rangle} + V_{cnst}(c)$
- 変分パラメータは $Z_{i\sigma}, \nu_\sigma, \alpha_i, \beta_i$.

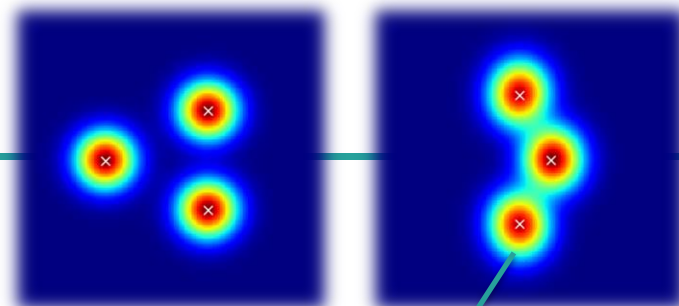
Angular
Momentum
Projection

- 変分で得られた波動関数は角運動量の固有状態ではない
- $|\Phi_{cMK}^{J\pm}\rangle \propto \int d\Omega D_{MK}^J \hat{R}(\Omega) |\Phi_c^\pm\rangle$

Generator
Coordinate
Method

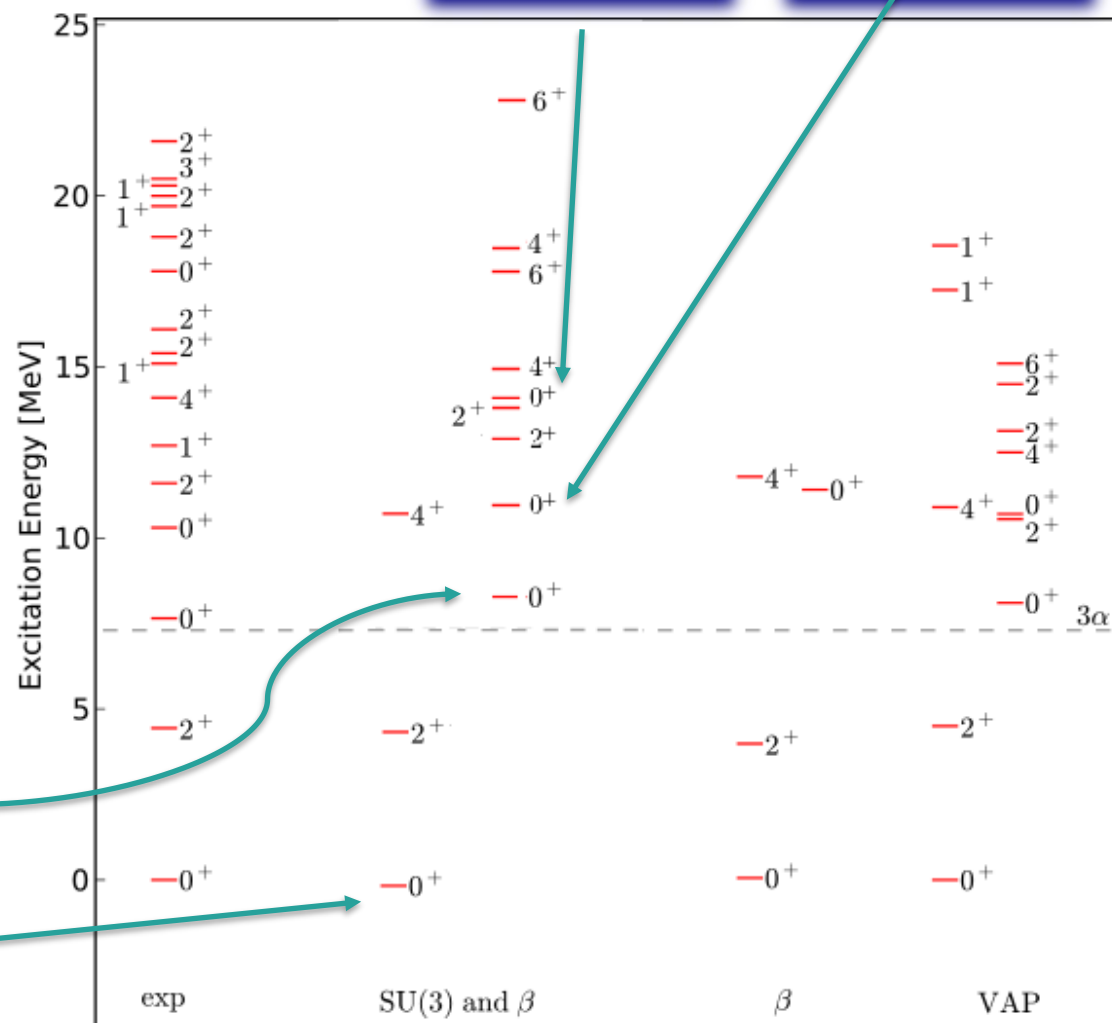
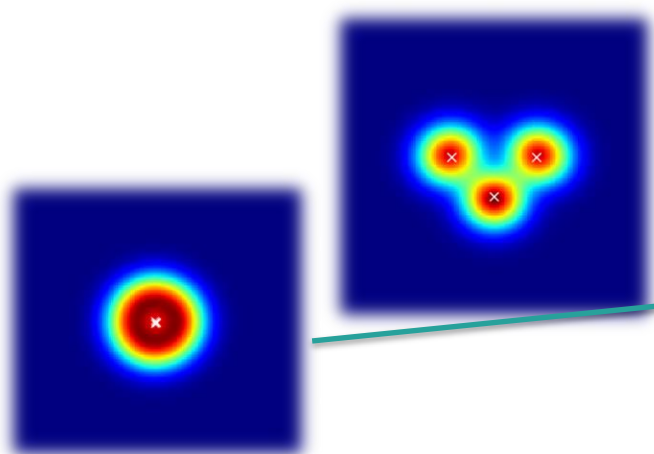
- 角運動量射影した波動関数でHamiltonianを対角化
- $|\Phi_n^{J\pm}\rangle = \sum_{cMK} g_{cMKn}^{J\pm} |\Phi_{cMK}^{J\pm}\rangle$

Results of ^{12}C

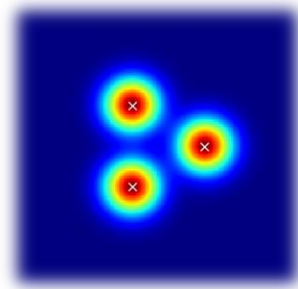


J^π	SU(3)-constraint	VAP	exp
$r(0_1^+)$	2.53	2.53	2.33 ± 0.02 fm
$r(0_2^+)$	2.90	3.27	
$r(0_3^+)$	3.85	3.98	

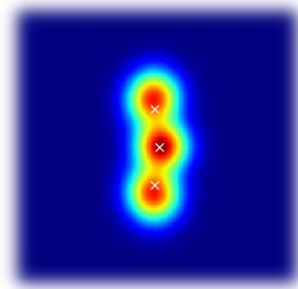
transitions	SU(3)-constraint	VAP	exp
$M(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_2^+)$	5.8	6.7	5.4 ± 0.2 fm ²
$M(E0; 0_1^+ \rightarrow 0_3^+)$	0.0	2.0	
$M(E0; 0_2^+ \rightarrow 0_3^+)$	11		
$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$	9.3	8.5	7.6 ± 0.4 e ² fm ⁴
$B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$	19.0	16	
$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)$	4.39	5.1	2.6 ± 0.4 e ² fm ⁴



Results of ^{12}C

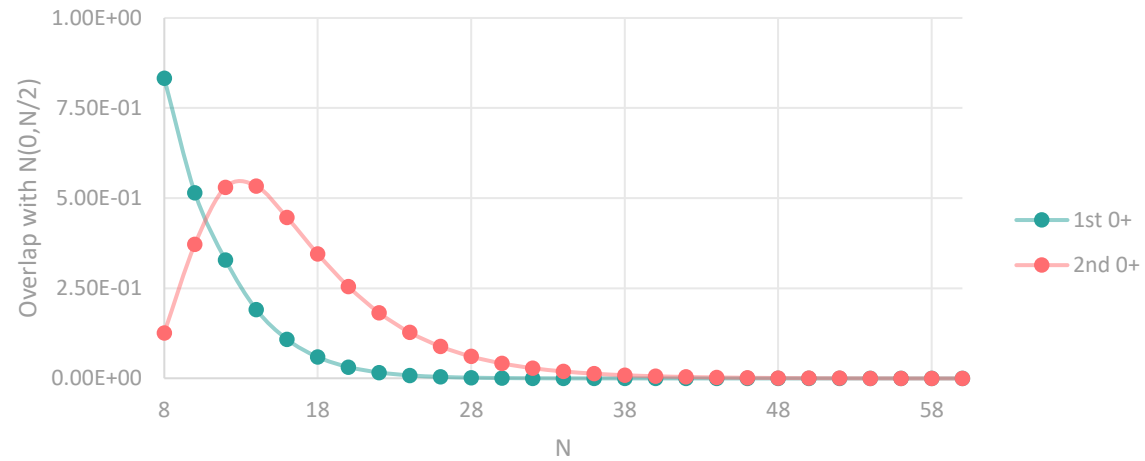


$N(0, N/2)$

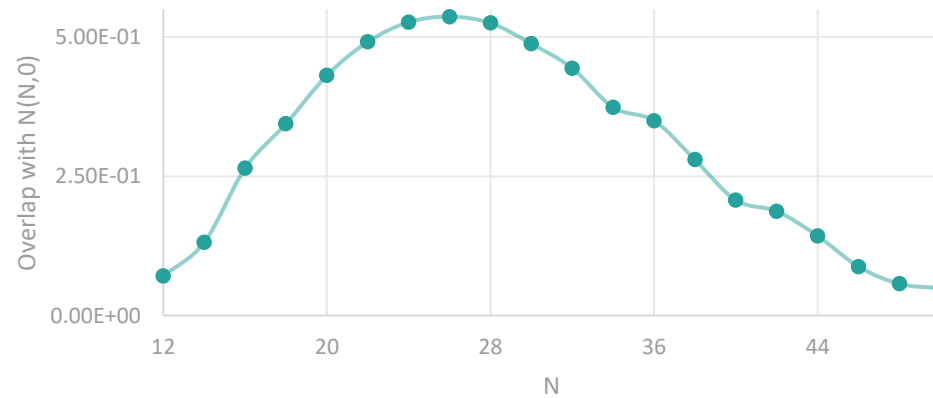


$N(N, 0)$

1st and 2nd 0⁺ state overlap with $N(0, N/2)$



3rd 0⁺ state overlap with $N(N, 0)$



Reduced width amplitude: 微視的波動関数から抽出したクラスター波動関数

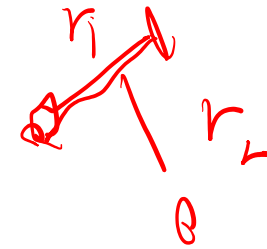
RWA: クラスター波動関数

$$\langle 3\alpha | {}^{12}C(0_{1,2}^+) \rangle$$

$$y_{l=0}(r_1, r_2) = \sqrt{\frac{12!}{(3!)^4}} \langle \delta(r_1 - \xi_1) \delta(r_2 - \xi_2) Y_0(\hat{\xi}_1) Y_0(\hat{\xi}_2) \phi_\alpha \phi_\alpha \phi_\alpha | \Phi_C^{0+} \rangle / r_1^2 r_2^2$$

クラスターの確率密度分布

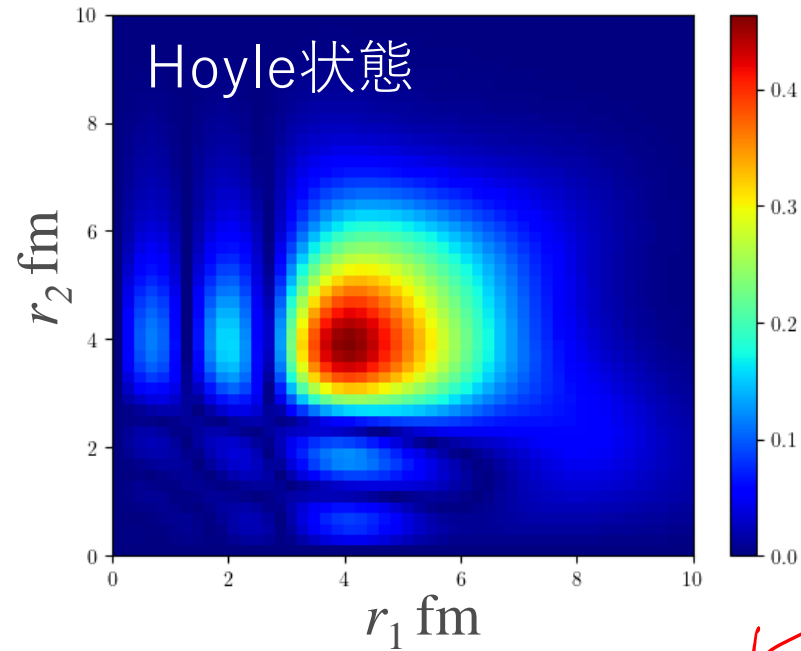
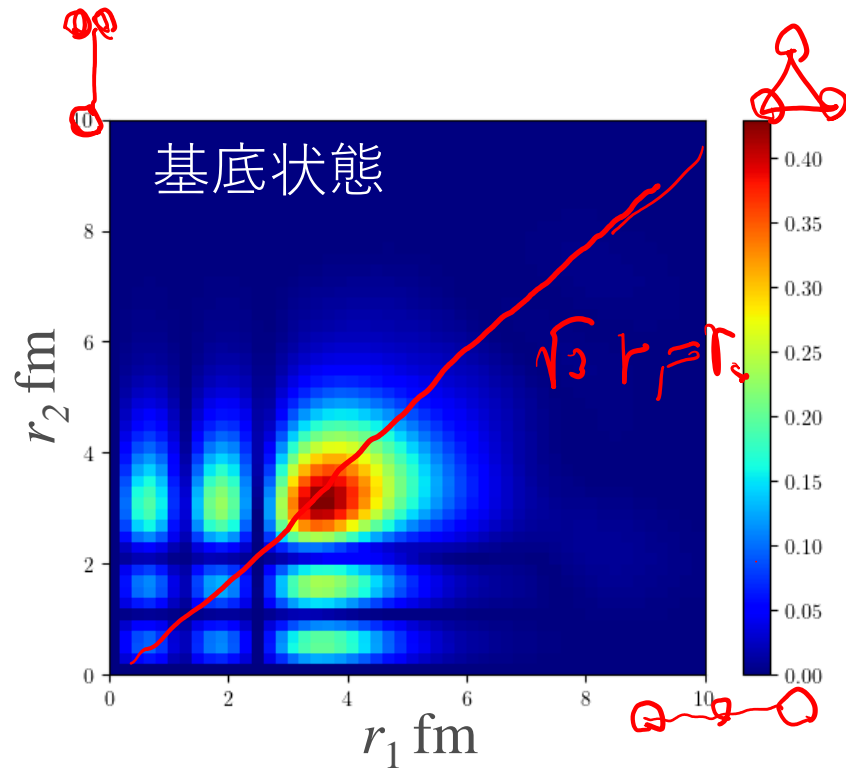
$$\rho_l(r_1, r_2) = |y_l(r_1, r_2)|^2,$$



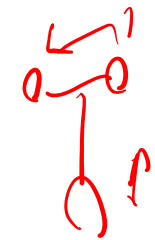
S-factor: クラスターである確率

$$S_l = \int r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 \rho_l(r_1, r_2).$$

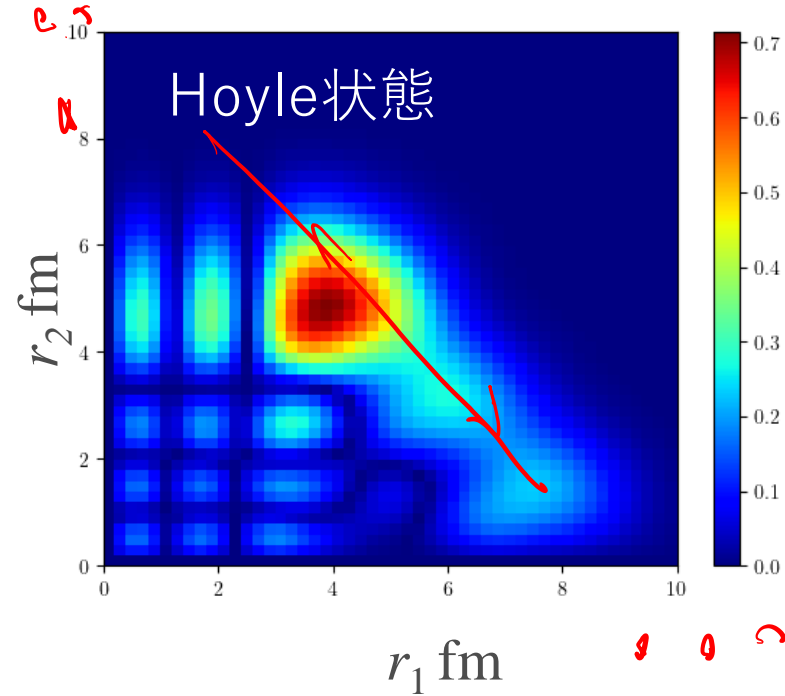
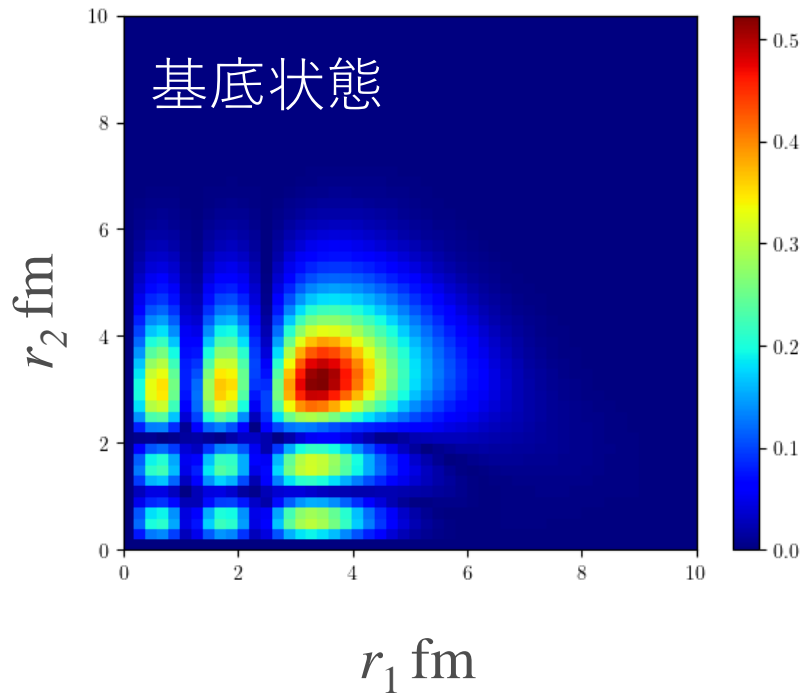
$r_1 r_2 \rho_{l=0}^{1/2}(r_1, r_2)$ with AMD+Gogny D1S



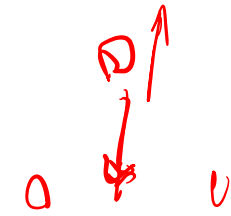
	S_0	$\langle r_1 \rangle$	$\langle r_2 \rangle$	$\rho(r_1, r_2)$
0_1^+	0.10	3.44 fm	2.98 fm	0.15
0_2^+	0.20	4.67 fm	4.15 fm	0.17×10^{-2}



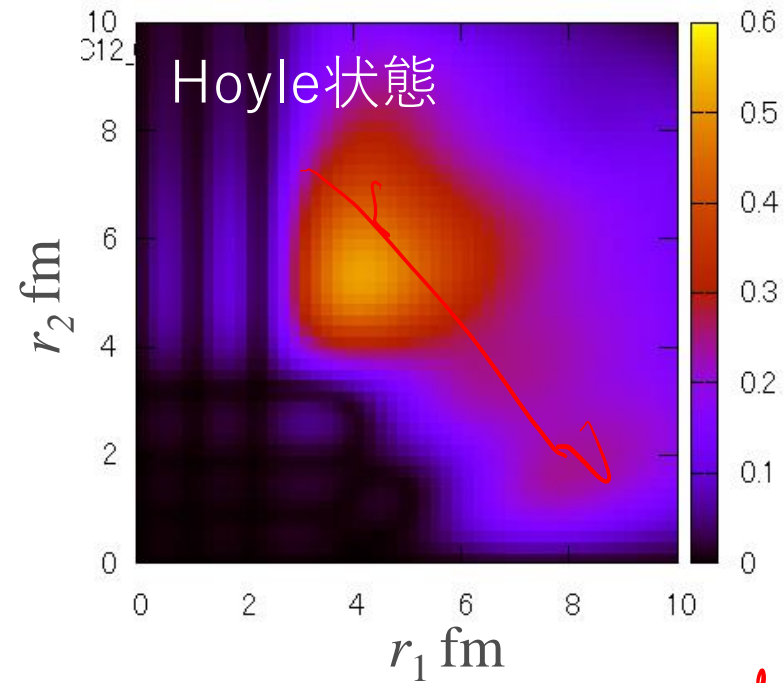
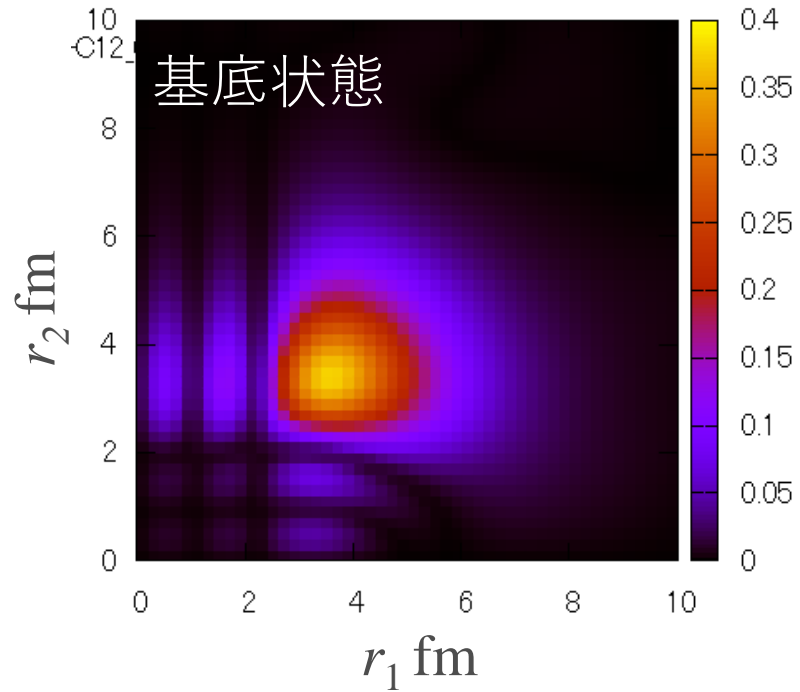
$r_1 r_2 \rho_{l=0}^{1/2}(r_1, r_2)$ with AMD+Volkov No.2



	S_0	$\langle r_1 \rangle$	$\langle r_2 \rangle$	$\rho(r_1, r_2)$
0_1^+	0.17	2.98 fm	2.89 fm	0.17
0_2^+	0.38	4.02 fm	4.25 fm	-0.36



$r_1 r_2 \rho_{l=0}^{1/2}(r_1, r_2)$ with Brink model+Volkov No.2 (山本計算)



AMDと同じ傾向。相互作用依存性のほうが大きい



まとめ

- ^{12}C のHoyle状態(0+2状態)は α 凝縮状態であると考えられている
- 少なくとも α 凝縮をリスペクトした模型(THSR)が最も成功を収めているのは事実ではあるが、 α 凝縮していることは実験的には証拠がない。
- 励起エネルギーを再現していても、Hoyle状態の構造は理論模型により異なる。特に相互作用依存性（クラスター由来 or 平均場由来）が顕著。
- 我々の理論計算では、Hoyle状態はクラスター由来の相互作用だと α 凝縮ではない。平均場由来の相互作用の場合は α 凝縮が支配的に見える。

計算のセットアップ

- Volkov No.2 + zero-range ls interaction(Gogny D1S)
 - スピン軌道相互の強さはGogny D1S を基準にファクター0,0.5,1.0の3パターン
- 各パラメータで以下の手順を実施する
 - TDAMDで3 α クラスター波動関数を初期波動関数として基底関数を生成する
 - 基底状態の波動関数をパリティ射影後のエネルギー変分で生成
 - 以上で求めた基底関数を使ってGCM

$$\Psi_n^{J\pi} = \sum_{iK} g_{iK}^{J\pi} \hat{P}_{MK}^{J\pi} \Phi_{AMD}(t_i) + \sum_K g_K^{J\pi} \hat{P}_{MK}^{J\pi} \Phi_{AMD}^{opt}$$

- 初期波動関数の3 α クラスター波動関数はすべてのパラメータで同一にする