

2026年度 複素解析シラバス（月曜2限：航空・電シス・マテ）

授業概要 複素解析の初歩（複素変数の関数の微積分）について解説する．複素微分，複素積分，級数展開などを実数値関数の微積分を復習しながら理解させ，複素関数における基本的な性質がコーシーの積分公式から得られることを講義する．さらに，実積分の計算への留数の応用を述べる．具体的に以下の能力を身につけることを目標とする：

- ◆ 複素数の計算ができ，その複素平面における図形的意味を理解できる．
- ◆ コーシーの積分定理，コーシーの積分公式を理解し，活用できる．
- ◆ テイラー展開，ローラン展開ができる．
- ◆ 留数が計算でき，留数定理が利用できる．
- ◆ 複素積分を実積分の計算に応用できる．

実積分の復習

例 1. $e^x \cos x$ の不定積分を求めよ．

(解答 1) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= \int (e^x)' \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \\ &= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ \therefore \int e^x \cos x dx &= \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x)\end{aligned}\tag{1}$$

(解答 2) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いると， $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ より

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

と表せる．このとき

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (a \neq 0)$$

より

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= \int e^x \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + \frac{e^{(1-i)x}}{1-i} \right\} = \frac{e^x}{2} \left\{ \frac{1-i}{2} e^{ix} + \frac{1+i}{2} e^{-ix} \right\} \\ &= \frac{e^x}{2} \left\{ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right\} = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x)\end{aligned}$$

となり，(1) に一致する．

□

担当教員名：松永秀章 研究室：杉本キャンパス 理学部 F 棟 4 階 413 室

連絡先：hideaki.matsunaga[at]omu.ac.jp ※ [at] を@に置き換えて下さい

教科書：「複素解析入門 第2版」原・松永著 共立出版

複素積分の応用

例 2. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta$ を求めよ.

(解答 1) $\tan \frac{\theta}{2} = x$ と変数変換して, 定積分 I を求めると, $I = \frac{\pi}{2}$ が得られる.

(解答 2) 定積分 I を単位円周上の複素積分に置き換えて考える. $z = e^{i\theta}$ とおくと, $\theta: -\pi \rightarrow \pi \iff \{z: |z| = 1\} = C$ かつ $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$ より

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{1}{5 + 3(z^2 + 1)/(2z)} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_C \frac{2}{3z^2 + 10z + 3} \cdot \frac{1}{i} dz \\ &= \int_C \frac{2}{i(z+3)(3z+1)} dz = \frac{2}{3i} \int_C \frac{1}{(z+3)(z+1/3)} dz \end{aligned}$$

ここで, 被積分関数の分母を 0 にする点は $z = -3$ および $z = -1/3$ であるが, 単位円 C の内部にあるものは $z = -1/3$ だけである. したがって, $f(z) = 1/(z+3)$ とおくと, コーシーの積分公式により

$$I = \frac{2}{3i} \int_C \frac{f(z)}{z + 1/3} dz = \frac{2}{3i} \times 2\pi i \times f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

————— * ————— * ————— * —————

定理 1. $f(z)$ は単純閉曲線 C の周および内部で正則とし, a を C の内部の任意の点とする. このとき, 次式が成り立つ:

- $\int_C f(z) dz = 0$ (定理 3.4, コーシーの積分定理)
- $\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ (定理 3.7, コーシーの積分公式)
- $\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^m} dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)$ (定理 3.8, コーシーの積分公式)

定理 2. $f(z)$ は単純閉曲線 C の内部の孤立特異点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を除いて C の周および内部で正則であるとする. このとき, 次式が成り立つ:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f, a_k] \quad (\text{定理 5.4, 留数定理})$$

ただし

$$\text{Res}[f, a_k] = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow a_k} (z - a_k) f(z) & (a_k \text{ が 1 位の極のとき}) \\ \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a_k)^m f(z)] & (a_k \text{ が } m \text{ 位の極のとき}) \end{cases}$$