

2026年度 常微分方程式シラバス (火曜3限: 応化・化工)

授業概要 常微分方程式は1変数の未知関数とその導関数を含む方程式で、力学や電気回路のみならず、自然科学や工学の様々な分野で登場する。この授業では常微分方程式の変数分離法、定数変化法、記号解法、行列解法、級数解法について解説する。具体的に以下の能力を身につけることを目標とする:

- ◆ 変数分離法または定数変化法を用いて、1階常微分方程式が解ける。
- ◆ 記号解法を理解し、定数係数の非同次線形常微分方程式の一般解を求められる。
- ◆ 行列解法を理解し、定数係数の連立線形常微分方程式の一般解を求められる。
- ◆ 級数解法を理解し、変数係数の線形常微分方程式の級数解を求められる。
- ◆ 変数変換を用いて、ある常微分方程式を既知の常微分方程式に変換できる。

1階微分方程式

$$x' = f(t)g(x) \quad (1)$$

を考える。 $g(x) \neq 0$ のとき、 $\frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} = f(t)$ の両辺を t で積分すると

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int f(t) dt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る。これを変数分離法という。

1階線形微分方程式

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (2)$$

の解で初期条件 $x(t_0) = x_0$ を満たす解 $x(t)$ は

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t a(s) ds \right\} + \int_{t_0}^t \exp \left\{ \int_r^t a(s) ds \right\} b(r) dr$$

で与えられる。これを定数変化法の公式という。

2階線形微分方程式

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = b(t) \quad (3)$$

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \quad (4)$$

を考える。ここで、 a_1, a_2 は定数で $b(t)$ は連続関数とする。

定理 1. $x_1(t), x_2(t)$ を (4) の1次独立な解とすると、(4) の一般解 $x_h(t)$ は

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

定理 2. (3) の一般解 $x(t)$ は、(4) の一般解 $x_h(t)$ と (3) の特殊解 $x_p(t)$ の和、すなわち

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

担当教員名: 松永秀章 研究室: 杉本キャンパス 理学部F棟4階413室

連絡先: hideaki.matsunaga[at]omu.ac.jp ※ [at] を@に置き換えて下さい

教科書: 「常微分方程式入門 第3版」原・松永著 共立出版

問題 1. (4) の一般解 $x_h(t)$ の求め方は? …… 公式 1 (p.36 例題 2.4)

(3) の特殊解 $x_p(t)$ の求め方は? …… 公式 2 (p.30 公式 2.2)

公式 1. (4) の一般解 $x_h(t)$ は, 特性方程式 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ の 2 解を λ_1, λ_2 とすると

- λ_1, λ_2 が異なる実数解のとき $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $\lambda_1 = \lambda_2$ (重解) のとき $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$
- λ_1, λ_2 が $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$) のとき $x_h(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$

(3) の特殊解 $x_p(t)$ は

$$x_p(t) = \frac{1}{P(D)} b(t), \quad \text{ただし } P(D) = D^2 + a_1 D + a_2, \quad D = \frac{d}{dt}$$

公式 2. $P(\lambda)$ を多項式, D を微分演算子, α を定数, $\varphi(t)$ を任意の関数とすると

- $P(\alpha) \neq 0$ ならば, $\frac{1}{P(D)} e^{\alpha t} = \frac{1}{P(\alpha)} e^{\alpha t}$
- $\frac{1}{P(D)} \{e^{\alpha t} \varphi(t)\} = e^{\alpha t} \frac{1}{P(D + \alpha)} \varphi(t)$

注意. $\varphi(t)$ が多項式のとき, $\frac{1}{P(D)} \varphi(t)$ は山辺の方法により簡単に求められる.

1 階連立線形微分方程式

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (5)$$

を考える. ここで A は 2×2 定数行列とする. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ (P : 正則行列) とおくと, (5) は

$$\mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y} \quad (6)$$

に変換される. $\mathbf{y}(t)$ を (6) の一般解とすると, (5) の一般解は $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ と求められる.

問題 2. (6) の一般解 $\mathbf{y}(t)$ の求め方は? …… 公式 3 (p.64 定理 3.6)

正則行列 P の求め方は? …… A の固有値, 固有ベクトル (p.63 定理 3.5)

公式 3. $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$ は実数で $\beta \neq 0$ とする. (6) の一般解 $\mathbf{y}(t)$ は

- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ならば, $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ならば, $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ならば, $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$