

目次

1	イントロダクション：有限群の線形表現論ってどんなことをするのか	6
2	二次巡回群の表現論	6
2.1	で、なにが分かるのか？	7
2.1.1	命題 2.6 の証明	7
2.2	有限群の表現論って？	10
2.3	目標	10
2.3.1	二次巡回群の場合の指標は？	11
3	復習：基底と座標と表現行列	11
3.1	基底と座標	11
3.1.1	線形写像と表現行列	12
4	トレースと行列式	13
4.1	トレース	13
4.2	おまけ：行列式	14
4.3	線形写像の行列式とトレース	15
5	テンソル積空間 $U \otimes V$	16
5.1	テンソル積空間に誘導される線形写像	18
5.1.1	おまけ	19
6	線形写像のなすベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ 、双対空間 U^*	19
6.1	行列のなすベクトル空間 $\text{Mat}_{n,m}$	19
6.2	線形写像のなすベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$	21
6.3	双対空間 U^*	22
6.4	テンソル積空間と Hom 空間との関係	23
7	部分空間への直和分解	25
8	直和についてもうすこし（外直和）	26
8.1	内直和：いままでの直和	26
8.2	外直和	26
8.3	外直和と内直和の関係	27
8.3.1	外直和から内直和	27
8.3.2	内直和から外直和	27
8.4	(外) 直和空間の線形写像の表示	28
8.4.1		28
8.4.2	例	29
8.5	直和と Hom 空間	29

9	群論の復習	30
9.1	群	30
9.1.1	群の例	30
9.2	群準同型	31
10	群の表現	31
10.1	群の表現	32
10.2	群の表現の例	33
10.2.1	集合への作用の拡張	33
10.2.2	巡回群の表現	34
10.2.3	対称群の表現の例	34
10.2.4	$GL_2(\mathbb{C})$ の 3次元表現	35
10.3	正則表現 $\mathbb{C}G$	35
10.4	自明表現 \mathbb{C}	35
10.5	表現のテンソル積	36
10.6	Hom 表現、反傾表現	36
10.7	部分表現	36
10.7.1	既約表現	37
10.7.2	表現の直和分解	38
10.7.3	既約表現 v.s. 直既約表現	39
11	G 準同型 : 表現の準同型	40
11.1	G 準同型写像	40
11.1.1	G 同型写像	41
11.2	G 準同型の像と核	43
11.3	シューア (Schur) の補題	43
12	有限群の表現論	44
12.1	レイノルズ (Reynolds) 作用素	44
12.2	G 表現の半単純性	46
12.3	定理 12.5 の証明 その 1	46
12.3.1	π^{Hom}	46
12.3.2	証明	48
12.4	定理 12.5 の証明 その 2	49
12.4.1	エルミート内積	49
12.4.2	ユニタリー表現	49
12.4.3	証明	50
12.4.4	内積について補足	50
13	ここまでのまとめ。	51
14	指標	52
14.1	例	53
14.1.1	1次元表現	53

14.1.2	正則表現	53
14.1.3	3次対称群の自然表現	53
14.2	指標の計算	54
14.3	関数空間 $\mathcal{H} = \text{Map}(G, \mathbb{C})$	55
14.3.1	\mathcal{H} の基底	56
14.4	\mathcal{H} のエルミート内積と積分	56
14.4.1	\mathcal{H} のエルミート内積	56
14.4.2	積分	56
14.5	指標の積分公式、内積公式	56
14.6	既約指標の正規直交性	57
14.7	例：巡回群の指標	57
14.8	既約表現の同型類の個数は有限個	59
14.8.1	既約表現の同型類	59
14.8.2	59
14.9	重複度	60
14.9.1	60
14.9.2	重複度	60
14.10	同型の判定	61
14.11	既約性の判定	61
14.12	正則表現の既約分解	61
15	巡回群の既約表現を完全分類	62
16	既約表現の個数を決定する	62
16.1	類関数	63
16.1.1	共役類	63
16.1.2	指標は類関数	63
16.2	準備：関数 $f \in \mathcal{H}$ を表現に作用させる。	64
16.2.1	類関数の特徴づけ	64
16.2.2	65
16.3	個数勘定	66
17	表現 V の既約分解 1/2	66
17.1	状況設定と問題提起	66
17.2	V_i の一意性と構成	67
18	例：有限巡回群（伏線回収）	68
18.1	既約表現と既約指標	68
18.2	表現の既約分解	68
18.2.1	$N = 2$ の場合	69
18.2.2	$N = 3$ の場合をやってみよう。	69

19 表現 V の既約分解 2/2	69
19.1 準備	69
19.1.1 $V = W$ の場合	71
19.2 $V_i \cong W_i^{m_i}$ について	72
19.2.1 やることとその舞台裏	72
19.2.2 射影子 p_{ab}^U	73
19.2.3 $U = V_j$ の場合	74
19.2.4 $U = W_i$ の場合	75
19.2.5 ゴール	75
20 例：3 次対称群 S_3	76
20.0.1 既約表現を探そう	76
20.0.2 e_i	77
20.0.3 p_{ab} for H	78
20.1 正則表現 $\mathbb{C}S_3$ の既約分解	79
20.1.1 正則表現の要素の表記法を変更	79
20.1.2 記号法をもう少し。	79
20.1.3 既約分解	80
21 直積群の表現	81
21.1 関数空間 $\mathcal{H}_{G_1 \times G_2}$ 、類関数の空間 $\mathcal{C}_{G_1 \times G_2}$	81
21.2 直積群の既約表現	82
22 有限アーベル群の表現論	82
22.1 有限アーベル群の既約表現と指標	83
23 対角表現の既約分解と第二直交関係式	83
23.1 準備	84
23.1.1 共役類、中心化群	84
23.1.2 反対群 G^{op} の表現	84
23.2 直積 $G \times G^{\text{op}}$ の表現	84
23.2.1 対角表現	84
23.2.2 Hom 表現	85
23.3 指標公式と対角表現の直既約分解	85
23.3.1	85
23.3.2 対角表現の既約分解	86
23.4 第二直交関係式	87
23.5 命題 23.6 の別証明	87
24 制限表現	88
24.1 指標の制限	88
24.1.1 練習問題	89
25 例：四元数単位のなす群	89

26	誘導表現	91
26.1	部分群 $H < G$ による左剰余	91
26.1.1	全射性に関する注意	92
26.2	誘導表現	92
26.2.1	誘導表現の構成に関する説明	93
26.3	誘導表現の指標	94
26.4	類関数の誘導	95
26.5	フロベニウス (Frobenius) の相互律	95
27	例 : S_3 と部分群 $C \cong C_3$	96
27.0.1	直接計算で命題 27.2 を確認しよう。	97
28	二面体群の表現論	99

1 イントロダクション：有限群の線形表現論ってどんなことをするのか

群 G の（線形）表現とは、ものすごく大雑把にいうと、群 G を正方行列でシミュレーションしたものです。群の表現は群自体の研究手法としても重要であるとともに、群の表現自体が重要な研究対象です。

群以外にも環やリー環等の表現も考えることができ、同様に、これらの代数系の重要な研究手段であるとともに、表現自体が重要な研究対象になっています。

今回は、非自明なものの中で一番簡単な二次巡回群の表現論を考察します。

この講義では、複素数体 \mathbb{C} 上で議論を進めます。行列、数ベクトルは複素数を成分とするものを指します。また（抽象）ベクトル空間は有限次元のもののみを扱います。

2 二次巡回群の表現論

非自明なものなかで一番簡単な群である二次巡回群 C_2 を考えてみましょう。これは二つの要素 e, g から構成される集合 $\{e, g\}$ に次のように積を定義したものです：

$$(2-1) \quad ee := e, \quad eg := g, \quad ge := g, \quad gg := e.$$

この群 C_2 の単位元は e ですね。上に並べた 4 つの積の定義のなかで、最初の三つの式は e が単位元である、という性質を述べているものです。なので、本質的なのは最後の定義

$$(2-2) \quad gg := e$$

であることに注意しておきます。

では、さて、二次巡回群 C_2 の表現とはなんでしょう？

定義 2.1 (表現の暫定的な定義). $n \geq 1$ を自然数とする。二次巡回群 C_2 の n 次表現 A とは、 n 次正方行列 A で次を満たすものと定める：

$$(2-3) \quad A^2 = E_n$$

ただし、 E_n は n 次単位行列をあらわす。

注意 2.2. 正式な群の表現の定義は定義 10.1 で与えられます。その定義とここで与えた暫定的な定義が同じものであることは簡単に確認できます。定義 10.1 にたどり着いたときに思い返して考えてみてください。

これは C_2 の積の定義に現れた $gg = e$ を正方行列により模写しているとおもえますね。要素 g に正方行列 A を対応させるわけです。これ以外に三つの積の定義式が (2-1) には現れていますが、単位元 e にたいして単位行列 E_n を対応させることにすれば、三つの式は単位行列の性質から自動的に成り立ちますね：

$$(2-4) \quad E_n E_n = E_n, \quad E_n A = A, \quad A E_n = A.$$

群 C_2 の定義 (2-1) と等式 (2-3) と (2-4) を見比べると、表現というのは群を正方行列でシミュレートするものである、というのが理解できるとおもいます。

例を挙げておきます。

例 2.3 (一次表現). 1次正方行列 $A = (a)$ はスカラー $a \in \mathbb{C}$ と同一視できますね。 C_2 の一次元表現 A というのは、つまり、 $a^2 = 1$ を満たす複素数です。これはもちろん以下の二つの場合しかありません。

(1) (自明表現) $a = 1$.

(2) $a = -1$.

二次表現の例も挙げておきます。

例 2.4 (二次表現の例).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

必修問題 2.5. 上の例が C_2 の表現であることを確かめよう。

2.1 で、なにが分かるのか？

行列のサイズを特に指定しなくていい場合は、定義 2.1 で与えられた二次巡回群の n 次表現を、二次巡回群 C_2 の表現と呼ぶことにします。

といっても、二次巡回群 C_2 の表現と偉そうに言ってみても、単に $A^2 = E_n$ をみたす正方行列を考えるだけにすぎません。なにか面白いことがあるのでしょうか？

実は次がなりたちます。

命題 2.6. 二次巡回群 C_2 の n 次表現 A は対角化可能である。さらに、固有値は $1, -1$ のみが現れる。

皆さんが一年生の時に習った対角化可能性の判定法は、固有多項式を求め、固有値と固有空間を計算することで、対角化可能であるか否かを判定しました。上の命題は、行列が具体的に与えられていないので、この方法を適用するのは難しそうですね。

この命題自体はとジョルダン標準形の理論を用いても示すことは可能です。今回は、有限群の表現論の知見にもとづいた証明を与えていきます。実際、等式 (2-3) だけを用いて、正方行列 A が対角化可能であることを示すことができるのです。

行列の代数的な関係式のみから色々なことが導出できることが表現論の醍醐味です。

2.1.1 命題 2.6 の証明

設定を書いておきましょう。 A は n 次正方行列で次を満たす：

$$(2-5) \quad A^2 = E_n.$$

対角化可能であることを示すために、次の二つの行列 B, C を導入します：

$$(2-6) \quad B := \frac{1}{2}(E_n + A), \quad C := \frac{1}{2}(E_n - A).$$

注意 2.7. 二つの行列 B, C を見出すところが証明の鍵で、これが有限群の表現論に由来しています。

一般の有限群 G の表現にたいしても、同様な構成が可能であり、それを理解することが講義の目標の一つです。

次の補題を確認しましょう。

補題 2.8. 次の等式が成り立つ：

$$(1) B + C = E_n.$$

$$(2) B^2 = B, C^2 = C.$$

$$(3) BC = 0, CB = 0.$$

$$(4) AB = B, AC = -C.$$

証明は計算するだけです。

Proof.

$$(1) B + C = \frac{1}{2}(E_n + A) + \frac{1}{2}(E_n - A) = E_n$$

$$(2) B^2 = \frac{1}{4}(E_n + A)^2 = \frac{1}{4}(E_n + 2A + A^2) \\ \stackrel{*}{=} \frac{1}{4}(2E_n + 2A) = \frac{1}{2}(E_n + A)$$

$$(3) BC = \frac{1}{4}(E_n + A)(E_n - A) = \frac{1}{4}(E_n - A^2) \\ \stackrel{*}{=} \frac{1}{4}(E_n - E_n) = 0$$

$$(4) AB = \frac{1}{2}A(E_n + A) = \frac{1}{2}(A + A^2) \\ \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(E_n + A)$$

*のついた等号で(2-5)を用いています。

□

必修問題 2.9. 残っている等式を確認しよう。

上の補題は、単に A, B, C の関係式を並べただけのようにみえますが、実は、これらの関係式だけから A の対角化可能性が示されるのです。

まず B, C の像と核がつぎを満たすことを確認しましょう。上で示した関係式のみから像と核についての知見が得られることを証明を読んで理解してください。

補題 2.10. 次の等式が成り立つ。

$$(1) \text{Im } B = \text{Ker } C, \text{Im } C = \text{Ker } B.$$

$$(2) \text{Im } B + \text{Im } C = \mathbb{C}^n.$$

$$(3) \text{Im } B \cap \text{Im } C = 0.$$

$$(4) \text{Im } B \oplus \text{Im } C = \mathbb{C}^n.$$

Proof. (1) $\text{Ker } C \subset \text{Im } B$ を示す。 $v \in \text{Ker } C$ をとる。補題 2.8(1) より $v = E_n v = Bv + Cv = Bv$ が成り立つ。よって $v = Bv$ であり、とくに $v \in \text{Im } B$ が結論される。

$\text{Im } B \subset \text{Ker } C$ を示す。 $v \in \text{Im } B$ をとってくる。ある $u \in \mathbb{C}^n$ が存在して $v = Bu$ をみたく。よって補題 2.8(3) より、 $Cv = CBu = 0$ がなりたつ。

(2) $v \in \mathbb{C}^n$ をとってくる。補題 2.8(1) より、 $v = Bv + Cv$ である。 $Bv \in \text{Im } B$, $Cv \in \text{Im } C$ より、 $v \in \text{Im } B + \text{Im } C$ である。

(3) $v \in \text{Im } B \cap \text{Im } C$ をとってくる。ある $u, w \in \mathbb{C}^n$ が存在して $v = Bu = Cw$ をみたく。等式 $v = Bu$ に B を掛ける。補題 2.8(2) より $Bv = B^2u = Bu = v$ である。一方、等式 $v = Cw$ に B を掛けると、補題 2.8(3) より、 $Bv = BCw = 0$ である。この二つを合わせると $v = Bv = 0$ が得られる。

(4) は (2) と (3) の帰結ですね。

□

対角化に関して固有空間を調べましょう。 n 次正方行列 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に属する固有空間 $V_\lambda = V(A; \lambda)$ は以下で定義されました：

$$V(A; \lambda) := \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

別の言い方では $\lambda E_n - A$ の核と一致することがわかります：

$$V(A; \lambda) = \text{Ker}(\lambda E_n - A).$$

補題 2.11. 次が成り立つ。

$$\text{Im } B = V(A; 1), \quad \text{Im } C = V(A; -1)$$

注意 2.12. 実は $V(A; 1) = \text{Ker } C$, $V(A; -1) = \text{Ker } B$ なので、この補題は補題 2.10(1) に他ならないのですが、それとは違った証明を与えます。

Proof. $\text{Im } B \subset V(A; 1)$ を示す。 $v \in \text{Im } B$ をとってくる。ある $u \in \mathbb{C}^n$ が存在して $v = Bu$ をみたく。補題 2.8(4) より $Av = ABu = Bu = v$ が成り立つ。よって、 $v \in V(A; 1)$ である。

$V(A; 1) \subset \text{Im } B$ を示す。 $v \in V(A; 1)$ をとってくる。すると $Bv = v$ が成り立つことが次のように確認できる：

$$Bv = \frac{1}{2}(v + Av) = \frac{1}{2}(2v) = v$$

よって、 $v \in \text{Im } B$ である。

□

練習問題 2.13. もう片一方の等号を示そう。

これで命題 2.6 の証明が完成していますね。念のために確認しましょう。補題 2.10 と補題 2.11 より、次が成り立ちます：

$$\mathbb{C}^n = V(A; 1) \oplus V(A; -1).$$

これは正方行列 A が対角化可能であり、しかも、固有値は $1, -1$ のみである、ということに他なりません。(命題 2.6 の証明終)

2.3.1 二次巡回群の場合の指標は？

二次巡回群 C_2 の n 次元表現 A の分解 (= 対角化後の形) を考えたいとしましょう。分解が知りたいのなら (2-7) の m, ℓ が手に入ればそれでいいのですが、対角化する以外で A から求める簡単な方法は見当たりません。

そこで、次のように考えます。行列のサイズ n は分かっているとしていいでしょう。 $m + \ell = n$ だったので、あとは $m - \ell$ の値が求まればいいですね。 $t = m - \ell$ とおけば $m = \frac{1}{2}(n + t)$, $\ell = \frac{1}{2}(n - t)$ として、欲しい情報が得られますね。

でも、 $m - \ell$ は簡単に A から計算できるのでしょうか？ そうでないと上のアイデアは絵にかいた餅にすぎないですね。

で、でも、出来ちゃうんですね。

補題 2.16. 二次巡回群 C_2 の n 次元表現 $A = (a_{ij})$ の対角成分の総和が $m - \ell$ を与える。つまり、次が成り立つ：

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = m - \ell.$$

何の気なしに述べていますが、結構驚くような主張です。見てみると右辺は整数ですよ。なので、上の補題は正方行列 A が $A^2 = E_n$ を満たせば対角成分の総和は整数になる、ということを暗に主張しているわけです。パッと考えると成り立つのが不思議に感じられます。

それはともかく、最もらしさを検証するために、簡単な場合に主張が成り立っているかを確認しましょう。

必修問題 2.17. 式 (2-7) の行列にたいして補題 2.16 をチェックしよう。

補題の左辺に現れた正方行列 A の対角成分の総和はトレース $\text{Tr } A$ と呼ばれます。一般の有限群の表現論でもトレースを用いて指標を定義します。

今回は、トレースの性質を勉強から始めましょう。

3 復習：基底と座標と表現行列

線形代数は既知としていますが記号の設定も兼ねて必要なことの復習をしましょう。

もう一度言うておくと、この講義では、複素数体 \mathbb{C} 上で議論を進めます。行列、数ベクトルは複素数を成分とするものを指します。また (抽象) ベクトル空間は有限次元のもののみを扱います。

3.1 基底と座標

ベクトル空間 U の基底とは U の部分集合 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ で次の性質を満たすものでした：
任意の $u \in U$ にたいして $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ が一意的に存在して

$$(3-8) \quad u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m$$

が成り立つ。この式に現れた c_i を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ にかんする $u \in U$ の第 i 座標と呼ぶのでした。

ついでに復習しておく、ベクトル空間 U の次元とは基底を構成しているベクトルの個数でした。なので、上で基底が m 個のベクトルから構成されている状況を考えてるので、暗黙に U の次元を m と設定していることになります。

座標をベクトルとして表示するには並べる順番を指定しなければいけませんね。そのためには、基底に順序を備え付けてやる必要があります。

定義 3.1. ベクトル空間 U の順序付き基底¹ $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ に関する $u \in U$ の座標 $c \in \mathbb{C}^n$ を以下が成り立つものと定める：

$$(3-9) \quad u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m.$$

上で述べたことから、 c は一意的に存在するのです。

あんまり使わないですが、座標を表す記号を導入しておきます：記号： $[u]_{\underline{u}} := c$

説明のために、まず線形写像と表現行列を復習しましょう。

3.1.1 線形写像と表現行列

U を m 次元ベクトル空間、 V を n 次元ベクトル空間とします。線形写像 $f : U \rightarrow V$ とは写像であり、次を満たすものとして定義されました：

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad f(cu) = cf(u)$$

for all $u_1, u_2, u \in U$ and all $c \in \mathbb{C}$.

定義 3.2 (表現行列). 線形写像 $f : U \rightarrow V$ の U の順序付き基底 $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ と V の順序付き基底 $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ に関する表現行列 $A = (a_{ij})$ は次を満たす $n \times m$ 行列として一意的に定まりました：

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i.$$

記号： $[f]_{\underline{v}, \underline{u}} := A$.

U に二つの順序付き基底 $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\underline{u}' = (u'_1, \dots, u'_m)$ が与えられたとします。順序付き基底 \underline{u} から順序付き基底 \underline{u}' への基底の変換行列 $P = (p_{ij})$ とは次を満たす m 次正方行列として一意的に定まりました：

$$u'_j = \sum_{i=1}^m p_{ij} u_i.$$

練習問題 3.3. 恒等写像 $\text{id}_U : U \rightarrow U$ の表現行列を値域の U に \underline{u}' を、定義域の U に \underline{u} を与えたときに考えたものが、上の変換行列であることを確かめよう。つまり、次を確かめよう：

$$P = [\text{id}_U]_{\underline{u}, \underline{u}'}$$

表現行列に関して不安のある方は各自復習をしておいてください。ここでは後で重要な役割を果たす、次のことだけを復習しておきます。

定理 3.4 (表現行列の変換公式). 線形写像 $f : U \rightarrow V$ を考えます。

U に二つの順序付き基底 $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\underline{u}' = (u'_1, \dots, u'_m)$ が与えられ、 V に二つの順序付き基底 $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\underline{v}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ が与えられたとします。

これらに関して表現行列を $A := [f]_{\underline{v}, \underline{u}}$, $A' := [f]_{\underline{v}', \underline{u}'}$ とおきます。

すると、次の等式がなりたつ：

$$A' = Q^{-1} A P.$$

ただし、 P は \underline{u} から \underline{u}' への変換行列であり、 Q は \underline{v} から \underline{v}' への変換行列です。

¹ 1 回生の教科書では順序付き基底は $[u_1, u_2, \dots, u_m]$ と書かれていました。

あとで重要になってくるのは次の特別な場合の公式です。線形写像の値域と定義域が一致してる状況を扱います。

定理 3.5 (表現行列の変換公式). 線形写像 $f : U \rightarrow U$ を考えます。

U に二つの順序付き基底 $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\underline{u}' = (u'_1, \dots, u'_m)$ が与えられたとします。

これらに関して表現行列を $A := [f]_{\underline{u}, \underline{u}}$, $A' = [f]_{\underline{u}', \underline{u}'}$ とおきます。

すると、次の等式がなりたつ：

$$A' = P^{-1}AP.$$

ただし、 P は \underline{u} から \underline{u}' への変換行列です。

4 トレースと行列式

トレースを導入します。行列式に比べて簡単な式で与えられますが、講義では大活躍してくれます。念のために、行列式の復習をしておきます。

4.1 トレース

正方行列のトレースというものを導入します。

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ のトレース $\text{Tr } A$ を次の式で定義する：

$$\text{Tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

単に対角成分を足しあげているだけです。行列式に比べると随分簡単ですね。

必修問題 4.1. (1) $n = 1, 2, 3$ の場合のトレースを書き下そう。

(2) 自分で具体的な行列を与えて、そのトレースを求めよう。

基本的な性質を述べます。

命題 4.2. n 次正方行列 A, B と複素数 $c \in \mathbb{C}$ にたいして次がなりたつ。

(1) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr } A + \text{Tr } B.$

(2) $\text{Tr}(cA) = c \text{Tr } A.$

(3) $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA.$

(4) $\text{Tr } {}^t A = \text{Tr } A.$

(5) $\text{Tr } E_n = n.$

注意 4.3. 一般には $\text{Tr } AB \neq (\text{Tr } A)(\text{Tr } B)$ であることに注意しましょう。

次は大事です。

系 4.4. n 次正方行列 A と n 次正則行列 P にたいして次がなりたつ：

$$\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr } A.$$

Proof.

$$\operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr}((PA)P^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(PA)) = \operatorname{Tr}((P^{-1}P)A) = \operatorname{Tr}(E_n A) = \operatorname{Tr} A.$$

一つ目の等号は行列の積の順番を指定しただけです。二つ目の等号は上の命題の (3) を使っています。あとは、逆行列の性質から従います。

(コメント) 二つ目の等号以外はトレースを施す前から成り立つものです。二つ目の等号はトレースを施して初めて成り立つものです。

数学を勉強する際は、まず各等号がどのような理由から成り立っているかを理解しましょう。

□

必修問題 4.5. 補題 2.16 を示せ。

4.2 おまけ：行列式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det A$ は次の式で定義されましたね：

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

ここで S_n は n 個の文字 $1, 2, \dots, n$ の順列の集合であり、 $\operatorname{sgn} \sigma$ は順列の符号数を表します。

練習問題 4.6. (1) $n = 1, 2, 3$ の場合の行列式を書き下そう。

(2) 自分で具体的な行列を与えて、その行列式を求めよう。

行列式の基本的な性質を復習しておきましょう。

命題 4.7. n 次正方行列 A, B と複素数 $c \in \mathbb{C}$ にたいして次がなりたつ。

(1) $\det AB = (\det A)(\det B)$.

(2) E_n を n 次単位行列とすると $\det E_n = 1$

(3) A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ である。

この条件が成り立つとき、逆行列 A^{-1} の行列式は A の行列式の逆数である： $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(4) $\det(cA) = c^n \det A$.

(5) $\det({}^t A) = \det A$ ここで ${}^t A$ は A の転置行列を表す。

系 4.8. n 次正方行列 A と n 次正則行列 P にたいして次がなりたつ：

$$\det(PAP^{-1}) = \det A.$$

4.3 線形写像の行列式とトレース

定義 4.9. 線形写像 $f : U \rightarrow U$ の行列式 $\det f$ とトレース $\text{Tr } f$ を以下のように定義する。

Step I. まずベクトル空間 U の順序付き基底 \underline{u} をもってくる。

Step II. そして、表現行列を考える $A := [f]_{\underline{u}, \underline{u}}$.

Step III. A の行列式、トレースとして定める：

$$\det f := \det A, \text{Tr } f := \text{Tr } A.$$

大切なことは、これが順序付き基底の選び方に依らないということです。

必修問題 4.10. 定義 4.9 で与えたトレースと行列式の定義が Step I で選んだ順序付き基底 \underline{u} の選び方に依らないことを確かめよう。つまり、Step I で別の順序付き基底 \underline{u}' を選んで、同様に f のトレースと行列式を定義したとしても同じ値が得られることを確かめよう。

トレースの定義に順序付き基底を用いましたが、実は、(順序を考えない) 基底を用いても定義できます。

ポイントは、いちいち表現行列の形を作らなくてもトレースを計算できるということです。正方行列のトレースは対角成分の総和でした。正方形に行列を表示しなくても、対角成分という概念が意味をもてば、それを足しあげること、トレースが得られますね。以下で示す計算方法の Step II で行っているのが、対角成分を求めることに相当しています。実際、基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ に順序を与えて、 f の表現行列をあたえれば、対角成分になっていますね。

注意 4.11 (トレースの計算方法). 線形写像 $f : U \rightarrow U$ の行列式 $\det f$ とトレース $\text{Tr } f$ は以下の手順で計算できる。

Step I. まずベクトル空間 U の基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ をもってくる。

Step II. そして、Step I できめた基底の各構成要素 u_j の f による像 $f(u_j)$ の u_j に関する座標 a_{jj} を求める。

もう少し具体的にいうと、 $f(u_j)$ を Step I できめた基底で展開して、その u_j の係数を求める。

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i$$

Step III. Step II でもとめた a_{jj} を足しあげる。

$$\text{Tr } f = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}$$

ここで説明した方法は、定義した方法と全然変わってないといえば変わってないのですが、定義のように「表現行列を求めて、その対角成分の総和」と思い込んでいると困ることがすぐ後にできます。

問題 6.3 では基底に順序を入れるのが難しくなる状況を考えます。なので順序を入れなくてもトレースが計算できないとちょっと困るのです。

5 テンソル積空間 $U \otimes V$

二つのベクトル空間 U, V からテンソル積空間と呼ばれる新たなベクトル空間 $U \otimes V$ を構成します。
(最初は何をやっているのか掴みにくいかも知れないです。すぐに理解できなくてもかまいません。講義で学んでいく中で、ぼちぼち、慣れて行ってください。)

定義 5.1 (テンソル積空間 (正統ではない定義)). 二つのベクトル空間 U, V からテンソル積空間と呼ばれる新たなベクトル空間 $U \otimes V$ を以下のように構成する:

1. 先ず、 U の基底 $\{u_1, \dots, u_m\}$ と V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ とを選ぶ。
2. 次に、数ベクトル空間 \mathbb{C}^{mn} を考える。(mn は m と n の掛け算。)
3. そして、 \mathbb{C}^{nm} の標準基底 $\{e_k \mid k = 1, 2, \dots, mn\}$ を考える。(標準基底は mn 個のベクトルから構成されていますね。)
4. 最後に、 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ にたいして

$$u_i \otimes v_j := e_{(i-1)n+j}$$

と書くことにする。

これでテンソル積空間は定義されました。

注意 5.2 (定義の方法に関する注意). 最後の段階の基底の書き換えは、本当は並び順はなんでも構いません。

適当に e_k を $m \times n$ の長方形に並べて、 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ にたいして形式的に記号 $u_i \otimes v_j$ で書き換えてやればいいのです

注意 5.3 (正統な定義って?). 上の定義は間違っていないけれど、正統なものではありません。正統な定義では基底を選んだりせず抽象的にベクトル空間を構成します。

基底を選んで構成すると出来上がったものがその選び方に依らないのかが気になります。そういうことを示すことはできますがここでの説明はしません。

必修問題 5.4. m 次元ベクトル空間 U と n 次元ベクトル空間 V のテンソル積空間 $U \otimes V$ の次元を求めよう。

ベクトル $u \in U$ と $v \in V$ のテンソル $u \otimes v$ が $U \otimes V$ の中に定義されます。

定義 5.5. U の基底 $\{u_1, \dots, u_m\}$ と V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ とを選んでテンソル積空間 $U \otimes V$ を作っておきます。

$u \in U$ と $v \in V$ にたいしてテンソル積空間 $U \otimes V$ の要素 $u \otimes v$ を以下のように定義する:

1. $u \in U$ と $v \in V$ を上で選んだ基底の一次結合として表す:

$$u = \sum_{i=1}^m a_i u_i, \quad v = \sum_{j=1}^n b_j v_j.$$

2. そして、次で $u \otimes v \in U \otimes V$ を定義する:

$$u \otimes v := \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_i b_j u_i \otimes v_j.$$

注意 5.6. テンソル積空間 $U \otimes V$ の一般的な要素の表し方は次です：

$$\sum_{i,j} c_{ij} u_i \otimes v_j.$$

もとの空間の要素 $u \in U$, $v \in V$ のテンソル積 $u \otimes v$ の形に任意の要素 $w \in U \otimes V$ が表せるわけではありません。

例 5.7. $m = 2, n = 2$ の場合。 U, V を 2次元ベクトル空間としそれぞれの基底 $\{u_1, u_2\}$, $\{v_1, v_2\}$ を選びます。

これをもちいてテンソル積空間 $U \otimes V$ を作るというのは、4次元²数ベクトル空間 \mathbb{C}^4 の標準基底を次のように名付けるということです：

$$u_1 \otimes v_1 = e_{(1-1)2+1} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 \otimes v_2 = e_{(1-1)2+2} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_2 \otimes v_1 = e_{(2-1)2+1} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 \otimes v_2 = e_{(2-1)2+2} = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

そしてベクトル $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 \in U$ と $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 \in V$ のテンソル積 $u \otimes v$ は次のように計算できますね：

$$u \otimes v = a_1 b_1 u_1 \otimes v_1 + a_1 b_2 u_1 \otimes v_2 + a_2 b_1 u_2 \otimes v_1 + a_2 b_2 u_2 \otimes v_2 = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

少し頭をつかうと、 $U \otimes V = \mathbb{C}^4$ の要素 w が $u \otimes v$ の形に表されるわけではないことがわかります。実は次が成り立ちます：

$$(5-10) \quad \{u \otimes v \in U \otimes V \mid u \in U, v \in V\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid c_1 c_4 - c_2 c_3 = 0 \right\}.$$

必修問題 5.8. 等号 (5-10) を示そう。

(ヒント：右辺の方程式は2次正方行列の行列式と思えなくもないですよ)

練習問題 5.9. 例えば、 $m = 3, n = 2$ の場合に同じことをしてみよう。出来れば、この場合に $U \otimes V$ の要素が一般には $u \otimes v$ の形にあらわされるわけではないことを確かめよう。

²この4はもちろん $2 \cdot 2 = 4$ の4です。

5.1 テンソル積空間に誘導される線形写像

定義 5.10 (線形写像のテンソル積). 線形写像 $f: U \rightarrow U'$ と $g: V \rightarrow V'$ が与えられているときに線形写像 $f \otimes g: U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$ を次で定義する:

$$(f \otimes g)\left(\sum_{ij} c_{ij} u_i \otimes v_j\right) := \sum_{ij} c_{ij} f(u_i) \otimes g(v_j).$$

例を見ましょう。例 5.7 をさらに数ベクトル空間に限定して考えます。

例 5.11. この例では $U = U' = V = V' = \mathbb{C}^2$ とし、基底は標準基底を考える。

二次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ による掛け算写像 T_A, T_B をそれぞれ $f = T_A: U \rightarrow U'$, $g = T_B: V \rightarrow V'$ とおく。

テンソル積 $f \otimes g$ を計算しましょう。

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(e_i \otimes e_j) &= f(e_i) \otimes g(e_j) \\ &= (a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2) \otimes (b_{1j}e_1 + b_{2j}e_2) \\ (5-11) \quad &= a_{1i}b_{1j}e_1 \otimes e_1 + a_{1i}b_{2j}e_1 \otimes e_2 + a_{2i}b_{1j}e_2 \otimes e_1 + a_{2i}b_{2j}e_2 \otimes e_2 \\ &= \sum_{st} a_{si}b_{tj}e_s \otimes e_t \end{aligned}$$

テンソル積空間 $U \otimes V$ と $U' \otimes V'$ を例 5.7 の方法で \mathbb{C}^4 と同一視した場合の $f \otimes g$ の表現行列を $A \otimes B$ とあらわします³。上の計算から、 $A \otimes B$ は具体的には次で与えられます:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

次のように表示する方が分かり易いかもしれませんね:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}.$$

(この表示では各成分 $a_{ij}B$ が 2×2 行列です。)

たとえば次が成り立ちます。

$$E_2 \otimes B = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

練習問題 5.12. 一般の場合に上のようなことを考えてみよう。

練習問題 5.13 (線形写像のテンソル積のトレース). 自己線形写像 $f: U \rightarrow U$ と $g: V \rightarrow V$ が与えられているときに、次が成り立つことを示せ。

$$\text{Tr}(f \otimes g) = \text{Tr}(f) \text{Tr}(g)$$

³これは行列 A, B の Kronecker 積と呼ばれます

5.1.1 おまけ

補題 5.14. テンソル積空間 $U \otimes V$ の任意の要素 $w \in U \otimes V$ にたいして U の一次独立な組 $\{u_1, \dots, u_r\}$ と V の一次独立な組 $\{v_1, \dots, v_r\}$ が存在して次の等式をみたす。

$$w = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$$

Proof. U の基底 $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ と V の基底 $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ を選んでテンソル積空間を作る。すると、ある $c_{ij} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) が存在して

$$w = \sum_{i,j} c_{ij} u'_i \otimes v'_j$$

を満たす。そこで $v''_i := \sum_{j=1}^m c_{ij} v'_j$ と定める。並び替えることで、次が成り立つと仮定して良い：

ある $r \leq m$ が存在して、 $\{v''_1, \dots, v''_r\}$ は一次独立、 $k = 1, \dots, n-r$ にたいして $v''_{r+k} \in \langle v''_1, \dots, v''_r \rangle$ がなりたつ。

後半の条件より、あるスカラー $d_{jk} \in \mathbb{C}$ が存在して $k = 1, \dots, n-r$ にたいして等式

$$v''_{r+k} = \sum_{j=1}^r d_{jk} v''_j$$

をみたす。よって

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i,j} c_{ij} u'_i \otimes v'_j \\ &= \sum_{i=1}^m u'_i \otimes v''_i \\ &= \sum_{i=1}^r u'_i \otimes v''_i + \sum_{k=1}^{m-r} u'_{r+k} \otimes \left(\sum_{j=1}^r d_{jk} v''_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \left(u'_i + \sum_{j=1}^{m-r} d_{jk} u'_{r+k} \right) \otimes v''_i \end{aligned}$$

が成り立つ。最後の式の左側に現れているベクトルの組 $\{u'_i + \sum_{j=1}^{m-r} d_{jk} u'_{r+k} \mid 1 \leq i \leq r\}$ は一次独立なので主張は証明された。□

6 線形写像のなすベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ 、双対空間 U^*

6.1 行列のなすベクトル空間 $\text{Mat}_{n,m}$

自然数 m, n にたいして $n \times n$ 行列の集合を $\text{Mat}_{n,m}$ とあらわします。これは行列の和とスカラー倍でベクトル空間になりますね。

サイズ $n \times m$ の行列の成分の個数は nm ですよね。なので、ベクトル空間 $\text{Mat}_{n,m}$ の次元は nm であり、よって特に nm 次元数ベクトル空間 \mathbb{C}^{nm} と同型です。

$$\text{Mat}_{n,m} \cong \mathbb{C}^{nm}.$$

これは腑に落ちると思います。この同型を与えるということは $n \times m$ の長方形に並んだ nm 個の複素数を縦一直線に並べることです。それは簡単なことですが、列ベクトルを積み重ねるとかすればいいわけです。

ベクトル空間 $\text{Mat}_{n,m}$ の標準的な基底として行列単位 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ を考えることができます。ここでサイズ $n \times m$ の第 (i, j) 行列単位 E_{ij} とは、第 (i, j) 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 の $n \times m$ 行列です。

例 6.1. $m = 3, n = 2$ の場合。

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$n \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ は基底 $\{E_{ij}\}$ によって次のように展開できますね：

$$(6-12) \quad A = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{ij} E_{ij}.$$

練習問題 6.2. これを確かめよう。

トレースなんて簡単なものですが、線形写像の由来が込み入ってくると計算が面倒 (= 楽しく) なってきます。

補題 6.3. A を m 次正方行列、 B を m 次正方行列とする。線形写像 $F : \text{Mat}_{n,m} \rightarrow \text{Mat}_{n,m}$ を以下で定める：

$$F(X) := BXA \text{ for all } X \in \text{Mat}_{n,m}.$$

すると、トレースの値は A と B のトレースの積である。つまり、次が成り立つ：

$$\text{Tr}(F) = (\text{Tr } A)(\text{Tr } B).$$

Proof. 注意 4.11 の方法で求めます。

Step I. 基底は行列単位で与えられるものを考えます。

Step II. $F(E_{ij})$ を行列単位で展開したときの E_{ij} の係数を求めましょう。展開式 (6-12) から、そのためには $n \times m$ 行列 $F(E_{ij})$ の第 (i, j) 成分を求めればよいのです。

写像 F の定義に戻ると $F(E_{ij}) = BE_{ij}A$ でした。右辺は単なる行列の積なので、計算は皆さんにお任せします。計算すると $F(E_{ij})$ の第 (k, ℓ) 成分は $b_{ki}a_{j\ell}$ です。

よって特に求める値は $b_{ii}a_{jj}$ です。

Step III. 上で求めた値を足しあげる。

$$\text{Tr } F = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} b_{ii}a_{jj} = \left(\sum_{i=1}^n b_{ii} \right) \left(\sum_{j=1}^m a_{jj} \right) = (\text{Tr } B)(\text{Tr } A)$$

□

補題 6.4. A を n 次正方行列とする。線形写像 $F : \text{Mat}_{n,n} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}$ を以下で定める：

$$F(X) := (\text{Tr } X)A \text{ for all } X \in \text{Mat}_{n,n}.$$

すると、トレースの値は A である。つまり、次が成り立つ：

$$\text{Tr}(F) = \text{Tr } A.$$

物凄く省略した証明.

$$F(E_{ij}) = \text{Tr}(E_{ij})A = \delta_{ij}A = \delta_{ij} \sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}.$$

よって

$$\text{Tr } F = \sum_{i,j} \delta_{ij}a_{ij} = \sum_i a_{ii} = \text{Tr } A.$$

□

必修問題 6.5. 補題 6.3 の証明を参考にして、うえの補題 6.4 を証明の詳細を補おう。

6.2 線形写像のなすベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$

定義 6.6. ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像の集合を $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ とあらわす。

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) := \{f : U \rightarrow V \mid f \text{ は線形写像}\}.$$

この集合は線形写像の和とスカラー倍により、ベクトル空間になるのであった。

ベクトル空間 U に順序付き基底 \underline{u} が与えられていれば、座標を対応させる写像 $\Psi_{\underline{u}} : U \rightarrow \mathbb{C}^m$, $\Psi_{\underline{u}}(u) := [u]_{\underline{u}}$ は同型写像なのでした。同様のことが表現行列を考えても成り立ちます。

命題 6.7. ベクトル空間 U の順序付き基底 \underline{u} とベクトル空間 V の順序付き基底 \underline{v} とが与えられているとする。このとき、表現行列を対応させる写像

$$\Psi_{\underline{v}, \underline{u}} : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \rightarrow \text{Mat}_{n,m}, \quad \Psi_{\underline{v}, \underline{u}}(f) := [f]_{\underline{v}, \underline{u}}$$

は同型写像である。

特に次元が計算できますね：

$$\dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) = (\dim U)(\dim V)$$

命題 6.7 の状況で話を進めます。同型 $\Phi_{\underline{v}, \underline{u}} : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \rightarrow \text{Mat}_{n,m}$ により行列単位 E_{ij} にたいおうする $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素を e_{ij} とあらわすことにします。同型でたいおうするのだから、集合 $\{e_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ は $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の基底です。

ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素というのは U から V への線形写像なのでした。では、いま定めた e_{ij} というのはどのような線形写像なのでしょう？

補題 6.8. 線形写像 $e_{ij} : U \rightarrow V$ は次をみます：

U の要素 $u = \sum_{\ell=1}^m c_{\ell}u_{\ell}$ にたいして

$$(6-13) \quad e_{ij}(u) = c_j v_i.$$

練習問題 6.9. これを示そう。

注意 6.10. 重要なことは、式 (6-13) により、線形写像が定義されるということです。なので、補題を逆用すると、式 (6-13) を線形写像 e_{ij} の定義として採用してもいいのです。

6.3 双対空間 U^*

定義 6.11 (双対空間). ベクトル空間 U の双対空間 U^* を 1 次元数ベクトル空間 \mathbb{C} への線形写像のなすベクトル空間として定義する。

$$U^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$$

上で説明した Hom 空間の特別な場合です。ですが、ベクトル空間に対する基本的な操作として重要です。

注意 6.10 に基づいて、次の定義をします。

定義 6.12 (双対基底). ベクトル空間 U を考える。 U の基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ が与えられたとする。

この状況で、 $i = 1, 2, \dots, m$ にたいして U^* の要素 u_i^* を以下で定める：

U の要素 $u = \sum_{\ell=1}^m c_{\ell} u_{\ell}$ にたいして

$$(6-14) \quad u_i^*(u) := c_i.$$

このとき、 U^* の部分集合 $\{u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*\}$ は U^* の基底である。

これを U の基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ の双対基底と呼ぶ。

これは先の節で考察した基底 $\{e_{ij}\}$ の特別な場合です。

注意 6.13. 1. 上の定義 6.12 では写像 $U \ni u \mapsto u^* \in U^*$ を構成したわけではありません。

2. また基底を構成している一つのベクトル u_i から双対空間の要素 u_i^* を構成したわけではありません。

3. U の基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ を用いて、各 $i = 1, 2, \dots, m$ にたいして u_i^* を構成しました。

ベクトル空間は次元で同型が判定できました。それはある意味では、ベクトル空間は次元の分しか個性がない、ということです。ベクトル空間 U の双対空間 U^* の次元はもとの空間の次元と等しいですね。つまり $\dim U^* = \dim U$ になります。なので、とくにこれら二つは同型 $U^* \cong U$ です。しかし、この同型は基底の選び方に依存しています。標準的にぴったり同一視はできません。同一視はできないけれど、 U から U^* が作られるので、非常に密接な関係があるのです。後の講義ではベクトル空間 U に群 G が表現されているときに双対空間 U^* にも群 G が表現される、というようなことを学びます。

例 6.14. 数ベクトル空間 \mathbb{C}^n の要素は列ベクトル (= 縦ベクトル) で表示することにしましょう。すると、双対空間 $(\mathbb{C}^n)^*$ は行ベクトル (= 横ベクトル) の空間と見なすことができます。鍵は次の計算です：

$$(n \text{ 次行ベクトル})(n \text{ 次列ベクトル}) = \text{スカラー}.$$

n 次行ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられれば線形写像 $f_x : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (つまり、双対空間 $(\mathbb{C}^n)^*$ の要素) を

$$f_x(u) := xu \text{ for all } u \in \mathbb{C}^n$$

により定義できますね。

この対応により、双対空間 $(\mathbb{C}^n)^*$ は行ベクトル (= 横ベクトル) の空間と同一視できます。以降、本講義では暗黙にこの同一視を用います。

(この同一視の下では、) 数ベクトル空間 \mathbb{C}^n の標準基底 e_1, e_2, \dots, e_n の双対基底 $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ は標準行ベクトルに対応します。つまり、 e_i^* は第 i 成分が 1 でそれ以外はすべて 0 の n 次行ベクトルです。

$$e_i^* = (0, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \dots, \overset{n}{0})$$

必修問題 6.15. 例 6.14 の最後の段落の内容を確かめよう。次の手順で行えます。

- (1) 数ベクトル空間 \mathbb{C}^n の標準基底の定義を述べよ。
- (2) クロネッカーのデルタ δ_{ij} の定義を述べよ。
- (3) 双対基底が標準行ベクトルと一致することを示すためには、次の式の成立を示せばいいことを説明せよ：

$$(\text{第 } i \text{ 標準行ベクトル})e_j = \delta_{ij} \text{ for all } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

(行ベクトルと列ベクトルの積です。)

- (4) 上の式がなりたつことを示せ。

6.4 テンソル積空間と Hom 空間との関係

ここまでで学んだ Hom 空間と双対空間とテンソル積空間には、次の関係があります。

まず、ベクトル空間 U, V を考えます。 U の双対空間 U^* の要素 $f \in U^*$ と V の要素 $v \in V$ から $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素 $\Phi_{v,f}$ を次のように定義することができます：

1. U の双対空間 U^* の要素 $f \in U^*$ とは線形写像 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ でした。
なので、 U の要素 $u \in U$ にたいして $f(u)$ というスカラーが定まります。
2. $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素とは線形写像 $\phi: U \rightarrow V$ でした。
なので、要素 $\Phi_{v,f}$ を定めるには、各 $u \in U$ にたいして V の要素 $\Phi_{v,f}(u)$ を定めなければいけません。そこで、 V の要素 v のスカラー $f(u)$ 倍として定義します：

$$\Phi_{f,v}(u) := f(u)v$$

3. 上で定まったのは写像 $\Phi_{v,f}: U \rightarrow V$ なので、これの線形性を確認しましょう（練習問題）。そうすれば、晴れて要素 $\Phi_{v,f} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の定義が完了するわけです。

こうして組 (v, f) にたいして要素 $\Phi_{v,f}$ を対応させることができました。この対応は次のベクトル空間の同型を引き起こします：

命題 6.16. U^* の基底 $\{f_1, \dots, f_m\}$ と V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を選んでおく。写像 $\Phi: V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ を以下で定義する：

$$\Phi \left(\sum_{i,j} c_{ij} v_i \otimes f_j \right) := \sum_{i,j} c_{ij} \Phi_{v_i, f_j}.$$

この写像は同型写像である。

線形代数に慣れてくると、もう少し簡明な記法で済むことがわかります。というのも、線形写像を定義するには生成系に対して写像を定義すればいいと分かるからです。今の場合だと、テンソル積 $v \otimes f$ に対してのみ像 $\Phi(v \otimes f)$ を定めればいいのですが、それを $\Phi_{v,f}$ としているというのが、上の定義なのです：

$$\Phi : V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}(U, V), \quad \Phi(v \otimes f) := \Phi_{v,f}.$$

例 6.17. 数ベクトル空間 \mathbb{C}^m の双対空間 $(\mathbb{C}^m)^*$ は横ベクトルの空間とみなせるということを例 6.14 で確かめました。

上の同型写像 $\Phi : \mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ と表現行列を対応させる同型写像 $\Psi : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Mat}_{n,m}$ の合成はどういう写像をあたえるのかを観察しましょう。

$$\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^* \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \xrightarrow{\Psi} \text{Mat}_{n,m}$$

この合成写像は n 次縦ベクトル v と m 次横ベクトル f の組にたいして $n \times m$ 行列 $\Phi(v \otimes f)$ を対応させています。そういう対応の規則を皆さん既に一つご存知ですよ。それは、行列としての積 vf です。 n 次縦ベクトルというのは $n \times 1$ 行列であり、 m 次横ベクトルというのは $1 \times m$ 行列なので、その行列としての積は $n \times m$ 行列ですよ。

計算すればこの二つが一致していることがわかります：

$$(\Psi \circ \Phi)(v \otimes f) = vf.$$

例 6.18. $U = V$ の場合は U の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を選んだときには、 V^* の基底としては双対基底 $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ を選ぶと便利だったり、面白いことが起こったりします。

今の場合、基底と双対基底を順にテンソルして足しあげたものを w とします。具体的には

$$w := \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^*.$$

同型写像 $\Phi : V \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ による像 $\Phi(w)$ はどうなるのでしょうか？実は、恒等写像 id_V に一致します：

$$(6-15) \quad \Phi(w) = \text{id}_V.$$

練習問題 6.19. 等号 (6-15) を確認しよう。

ヒント：まず、 $\phi = \Phi(w)$ とおいて $\phi(v_i) = v_i$ を確認しよう。

(恒等写像の定義が怪しい人はそれも書いてください。)

例 6.20. 例 6.18 を $m = 2, n = 2$ の場合に数ベクトル空間の場合に確かめてみましょう。そのために例 6.17 を使います。

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi)(w) &= (\Psi \circ \Phi)(e_1 \otimes e_1^* + e_2 \otimes e_2^*) \\ &= e_1 e_1^* + e_2 e_2^* \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同型写像 $\Psi : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \rightarrow \text{Mat}_{2,2}$ によって単位行列 $E_2 \in \text{Mat}_{2,2}$ に対応するのが恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{C}^2} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ なので、 $\Phi(w) = \text{id}_{\mathbb{C}^2}$ が示されたことになります。

7 部分空間への直和分解

命題 7.1. r を 2 以上の自然数とする。ベクトル空間 V に r 個の自己線形写像 $e_i : V \rightarrow V$ ($i = 1, 2, \dots, r$) が与えられて次を満たすとする：

$$e_i \circ e_i = e_i, \quad e_i \circ e_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{id}_V = \sum_{i=1}^r e_i.$$

すると次の直和分解が存在する：

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im } e_i.$$

必修問題 7.2. この命題 7.1 はすでに示しているある命題⁴の一般化です。

- (1) まず、その命題を見つけよう。(命題番号を書いてください。)
- (2) 次に、その証明を参考にしつつ、この命題の証明をしてください。

系 7.3. ベクトル空間 V の自己線形写像 $e : V \rightarrow V$ が $e \circ e = e$ を満たすとする。このとき、次の直和分解が存在する：

$$V = \text{Im } e \oplus \text{ker } e.$$

さらに、次がなりたつ：

$$\text{Tr } e = \dim \text{Im } e.$$

Proof. $e_1 = e$, $e_2 = \text{id}_V - e$ とおく。すると、これらは上の命題 7.1 の仮定をみたす。よって、 $V = \text{Im } e \oplus \text{Im}(\text{id}_V - e)$ がなりたつ。

あとは $\text{Ker } e = \text{Im}(\text{id}_V - e)$ が示せるので問題の直和分解が示せる。

$e(\text{Im } e) \subset \text{Im } e$ であり、 $e|_{\text{Im } e} = \text{id}_{\text{Im } e}$ である。また、 $e(\text{Ker } e) = 0$ である。よって、 $\text{Im } e$ の基底と $\text{Ker } e$ の基底とを並べて e の表現行列を作ると $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。ここで $m = \dim \text{Im } e$ とおいた。この行列表示から $\text{Tr } e = \dim \text{Im } e$ が導かれる。 □

練習問題 7.4. 証明の詳細を埋めよう。 $\text{Ker } e = \text{Im}(\text{id}_V - e)$ の証明は、うえの必修問題と同じく、講義中に既に与えられています。

⁴ここでいっている「命題」というのは数学的な命題という意味です。なので講義ノートのなかで該当する主張は「命題」とは呼ばれず「定理」あるいは「補題」と呼ばれてるかもしれません。

8 直和についてもうすこし（外直和）

外直和の説明です。ご存知の方はこの節は飛ばしてください。

外直和と対比して言うときには、皆さんがご存知の直和は内直和と呼びます。

この講義でいままでベクトル空間や表現の直和とってきましたが、それは大概是内直和でしたが、内直和というのはベクトル空間と部分空間との関係を表わした概念ですが、外直和というのは複数のベクトル空間から抽象的に新たなベクトル空間を作る操作です。

内直和と外直和は別のものですが、（すぐに説明するように）まとめて直和と言ってしまっても問題がないので、この節以外ではそうします。

8.1 内直和：いままでの直和

念のために内直和を復習しておきます。

定義 8.1 (内直和：今までの直和). ベクトル空間 V が部分空間 V_1, V_2, \dots, V_m の内直和であるとは以下が成り立つことをいった：

- (1) $V = V_1 + V_2 + \dots + V_m$.
- (2) $(V_1 + \dots + V_i) \cap V_{i+1} = 0$ for all $i = 1, 2, \dots, m-1$.

内直和の状況設定としては、

- (I) ベクトル空間 V がある。
- (II) V の部分空間 V_1, V_2, \dots, V_m を考える。

という風になっていますね。

外直和は全体空間 V がなく、ベクトル空間 V_1, V_2, \dots, V_m がある状況から出発します。

8.2 外直和

定義 8.2 (外直和). ベクトル空間 V_1, V_2, \dots, V_m の外直和 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ とは以下で定義されるベクトル空間である。

- (1) $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ の下部集合は直積集合 $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m$ である。
- (2) 和とスカラー倍は成分ごとに定める：

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, \dots, v_m) + (u_1, u_2, \dots, u_m) &:= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_m + u_m) \\ c(v_1, v_2, \dots, v_m) &:= (cv_1, cv_2, \dots, cv_m).\end{aligned}$$

練習問題 8.3. 上の定義でベクトル空間が定義されていることを示せ。

直和を $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ とあらわすこともあります。

8.3 外直和と内直和の関係

内直和と外直和を混同してしまっても問題にならないということを説明します。

8.3.1 外直和から内直和

命題 8.4. ベクトル空間 V_1, V_2, \dots, V_m の外直和 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ を V とおく。

$$W := V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m.$$

このとき、次がなりたつ。

(1) $i = 1, 2, \dots, m$ にたいして写像 $I_i : V_i \rightarrow V$ を以下で定めると、これは単射線形写像である：

$$I_i(v) := (0, \dots, 0, \overset{i}{v}, 0, \dots, 0) \text{ for all } v \in V_i.$$

(2) V は像 $\text{Im } I_1, \text{Im } I_2, \dots, \text{Im } I_m$ の内直和である。

主張 (2) において、像 $\text{Im } I_i$ と V_i とを同一視すれば、

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

が内直和の意味でなりたつ、ということを言っているのです。

内直和空間と外直和空間は自然に同型なので、同一視しても問題にならないのです。

8.3.2 内直和から外直和

ベクトル空間 V と部分空間 V_1, V_2, \dots, V_m を考えます。ただし、和空間 $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ は内直和とは仮定しません。

部分空間といえども（数学的ない意味ではなく通常の意味で）独立した一個のベクトル空間なので、その外直和を考えることができます（ここでは注意のために外直和であることを明記しておきます。）：

$$\overset{\text{外}}{\bigoplus}_{i=1}^m V_i$$

すると、この外直和空間から V に次の自然な線形写像がつくれます：

$$S : \overset{\text{外}}{\bigoplus}_{i=1}^m V_i \rightarrow V, (v_1, v_2, \dots, v_m) \rightarrow v_1 + v_2 + \dots + v_m.$$

次が成り立ちます：

命題 8.5. (1) 線形写像 S の像は和空間 $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ である。

(2) S が同型であるための必要十分条件は和空間 $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ が内直和空間であることである。

8.4 (外) 直和空間の線形写像の表示

直和空間 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ から直和空間 $U := \bigoplus_{i=1}^n U_i$ への線形写像の与え方に関して考察します。

各組 (i, j) にたいして線形写像 $f_{ij} : V_j \rightarrow U_i$ があたえられていた時に、線形写像 $f = (f_{ij}) : V \rightarrow U$ を以下で構成することが出来ます：

$$f(v_1, v_2, \dots, v_m) := \left(\sum_{j=1}^m f_{1j}(v_j), \sum_{j=1}^m f_{2j}(v_j), \dots, \sum_{j=1}^m f_{nj}(v_j) \right)$$

よく見ると、行列をベクトルにかけてやるときの式ですね。実際、それは次の例をみればわかります。

例 8.6. 上の状況で特別に $V_j = U_i = \mathbb{C}$, for all i, j の場合を考えます。このとき、 $V = \mathbb{C}^m$, $U = \mathbb{C}^n$ です。

線形写像 $f_{ij} : V_j \rightarrow U_i$ はすべてスカラー倍です。なので、そのスカラーを a_{ij} とおきます。すると、上で定義した線形写像 $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ は $n \times m$ 行列 $A := (a_{ij})$ の掛け算写像に他ならないのです。

数ベクトル空間の間の線形写像は行列で表示されましたが、同じようなことが直和空間でも成り立ちます。

8.4.1

実は、直和空間 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ から直和空間 $U := \bigoplus_{i=1}^n U_i$ への任意の線形写像

$$f : V = \bigoplus_{j=1}^m V_j \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n U_i = U$$

は上でやったように行列表示できます。

そのためには命題 8.4 の単射 $I_j : V_j \rightarrow V$ が必要です。これともう一つ、双対的な全射線形写像

$$P_i : U \rightarrow U_i, P(u_1, \dots, u_n) := u_i$$

も必要です。

さて、線形写像 $f : V \rightarrow U$ が与えられたします。これにたいして $f_{ij} : V_j \rightarrow U_i$ を以下の合成写像で定義します：

$$f_{ij} := P_i f I_j : V_j \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow U_i.$$

命題 8.7. 上で定義した f_{ij} から行列表示で得られる線形写像 $(f_{ij}) : V \rightarrow U$ はもとの線形写像 f と等しい。

$$f = (f_{ij}).$$

8.4.2 例

表現に関係して出てくるのは次のような状況です。

直和空間 $V = V_1 \oplus V_2$ の自己線形写像 $f : V \rightarrow V$ を与えることは、4つの線形写像

$$f_{11} : V_1 \rightarrow V_1, f_{12} : V_2 \rightarrow V_1, f_{21} : V_1 \rightarrow V_2, f_{22} : V_2 \rightarrow V_2$$

を与えることと同値であり、その関係は

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} : V = V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2 = V.$$

となっている。

簡単にわかることですが、次を頭の隅においておくといふことがあるかも。

命題 8.8. 上の状況で、 $f(V_1) \subset V_1$ が成り立つための必要十分条件は $f_{21} = 0$ である。

8.5 直和と Hom 空間

直和空間 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ から直和空間 $U := \bigoplus_{i=1}^n U_i$ への線形写像に関する上の節の議論は Hom 集合の言葉では次のように言い換えられます。

命題 8.9. 直和空間 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ から直和空間 $U := \bigoplus_{i=1}^n U_i$ への線形写像のベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U)$ は直和空間 $\bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_j, U_i)$ とは行列表示を対応させる線形写像により同型である：

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U) \rightarrow \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_j, U_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U), f \mapsto (f_{ij})$$

9 群論の復習

群論は既知としていますが記号の設定も兼ねて復習をしていきましょう。

9.1 群

群の定義を復習しておきましょう。

定義 9.1. 群 G とは集合 G と写像 $\mu : G \times G \rightarrow G$ との組 $G = (G, \mu)$ で次の公理を満たすものと定める：

[積の結合法則] $\mu(g_1, \mu(g_2, g_3)) = \mu(\mu(g_1, g_2), g_3)$ for $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$.

[単位元の存在] $\exists e \in G$ s.t. $\mu(e, g) = g, \mu(g, e) = g$ for $\forall g \in G$.

[逆元の存在] For $\forall g \in G, \exists h \in G$ s.t. $\mu(g, h) = e, \mu(h, g) = e$.

以降は、群 (G, μ) の下部集合 G の要素 $g, h \in G$ にたいして

$$gh := \mu(g, h)$$

とかくことにする。さらに、群 (G, μ) を G という記号で代表させる。(しかし、その背後には積があることを忘れてはいけない。また、積以外はないことも忘れてはいけない。)

9.1.1 群の例

群の例で大切なものを挙げます。

例 9.2 (巡回群). 一つの要素で生成される群を巡回群と呼びました。巡回群は位数で同型類が定まりました。自然数 ≥ 1 にたいして位数 n の有限群を C_n とあらわします。また、位数無限大の巡回群を C_∞ とあらわします。

これらは、それぞれ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, \mathbb{Z} と同型です： $C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $C_\infty \cong \mathbb{Z}$. (ただ、この講義では群を加法的に表示することはまずないとおもいます。)

例 9.3 (対称群). 自然数 $n \geq 1$ にたいして n 文字の集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ から自分自身への全単射が合成に関してなす群を n 次対称群とよび S_n とあらわします。

行列式の定義に現れていますね。

例 9.4 (一般線形群). $n \geq 1$ を自然数とします。

- (1) n 次 (複素) 正則行列が掛け算に関してなす群を $GL_n(\mathbb{C})$ とあらわし n 次 (複素) 一般線形群と呼びます。
- (2) n 次実正則行列が掛け算に関してなす群を $GL_n(\mathbb{R})$ とあらわし n 次実一般線形群と呼びます。
- (3) n 次元ベクトル空間 V の自己同型写像 $f : V \rightarrow V$ が合成に関してなす群を $GL(V)$ とあらわす。
 V の順序付き基底 $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ を選んで、自己同型写像 $f : V \rightarrow V$ を行列表示すること ($f \mapsto [f]_{\underline{v}, \underline{v}}$) で写像 $GL(V) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ が得られます。これは (群の) 同型写像です。

$$GL(V) \xrightarrow{\cong} GL_n(\mathbb{C}), f \mapsto [f]_{\underline{v}, \underline{v}}.$$

例 9.5 (有限巡回群と二面体群). 実数 θ にたいして行列 $R(\theta), S(\theta)$ を次で定める :

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

自然数 $n \geq 1$ にたいして以下で $GL_2(\mathbb{R})$ の部分集合 C_n, D_n を定義する。

$$C_n := \left\{ R\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, D_n := \left\{ R\left(\frac{2k\pi}{n}\right), S\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

これらは $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である。 C_n は n 次巡回群である。 D_n は n 次二面体群と呼ばれる。

必修問題 9.6. (i) C_n, D_n は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群であることをしめせ。

(ii) C_n, D_n の位数をもとめよ。

(iii) C_n は巡回群であることを示せ。

(iv) D_n は巡回群でないことを示せ。

(v) 二つの要素から構成される D_n の生成系を挙げよ。

9.2 群準同型

群 (準) 同型写像の定義も復習しておきましょう。

定義 9.7. 群 G (の下部集合) から群 H (の下部集合) への写像 $f : G \rightarrow H$ が群準同型とは次が成り立つこととをいう :

$$f(gg') = f(g)f(g') \text{ for all } g, g' \in G.$$

全単射な群準同型写像を群同型写像という。

群準同型は単位元と逆元を保つのでした。正確には次が成り立ちます :

$$f(e_G) = e_H, \quad f(g^{-1}) = f(g)^{-1} \text{ for all } g \in G.$$

例はあとでたっぷりやるので、ここでは少しだけ挙げます。

例 9.8. 1. 符号数 $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ を対応させる写像は群準同型でした。

2. 行列式 $\det : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ を対応させる写像も群準同型でした。

10 群の表現

いよいよ、群の表現を論じていきます。講義の最終的な目標は有限群の表現論です。ですが、まずは有限とは限らない一般の群の表現をあつかいます。

10.1 群の表現

やっと、群の表現の定義を与えることができます。

定義 10.1 (群の表現). 群 G の表現 (V, ρ) とはベクトル空間 V と群準同型 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ の組のことと定める。

記法や用語に関する注意：

- (1) ρ による $g \in G$ の像 $\rho(g)$ を ρ_g とあらわすことがおおい。
- (2) ρ_g は V から V への写像なので、 $v \in V$ にたいして $\rho_g(v)$ という V の要素が定まる。これを gv とか $g \cdot v$ とか書くこともある。

$$gv = g \cdot v = \rho_g(v) = \rho(g)(v).$$

- (3) 表現 (V, ρ) を V とあらわしたり ρ とあらわしたりする。また、 ρ^V とあらわすこともある。
- (4) 群 G の表現 (V, ρ) をベクトル空間 V への表現といたりもする。また線形な作用と言ったりもする。
- (5) 表現 (V, ρ) の次元を V の次元と定める。

群の表現の具体例を与えるためには次の補題を知っていると便利なことが多いです。

ベクトル空間 V の自己線形写像の空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ を $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ とあらわす。定義から $\text{GL}(V)$ は $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の部分集合である。

補題 10.2. G を群、 V をベクトル空間とする。写像 $\rho : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が群 G の V への表現を与えるための必要十分条件は次が成り立つことである：

$$(10-16) \quad \rho_e = \text{id}_V, \quad \rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h.$$

「写像 $\rho : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が群 G の V への表現を与える」という文言がなにをいっているかという、写像 $\rho : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の像が部分集合 $\text{GL}(V) \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に含まれて、さらに誘導される写像 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ が群準同型になるということです。

Proof. 必要条件であることは自明ですね。

十分条件であることを確かめるには、条件 (10-16) がなりたてば、 $\rho_g : V \rightarrow V$ は同型写像であることを示せばいいのです。そのためには ρ_g が逆写像を持つことを示せばいいのですね。実際には次の式から $\rho_{g^{-1}}$ が ρ_g の逆写像であることがわかります：

$$(10-17) \quad \rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \rho_{gg^{-1}} = \rho_e = \text{id}_V, \quad \text{略}$$

□

必修問題 10.3. 等式 (10-17) にどの条件を用いているかを述べよ。また略された式を書け。

10.2 群の表現の例

10.2.1 集合への作用の拡張

群論の講義で群 G の集合 X への (左) 作用というものを学びました。群 G の表現 (V, ρ) というのは群 G のベクトル空間 V への線形な作用ということができますね。

群 G が集合 X に作用しているとする: $\rho: G \curvearrowright X$. $\mathbb{C}X$ を X と基底とするベクトル空間とする。(つまり、 X の要素の個数を $n = \#X$ とすると、 \mathbb{C}^n の標準基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ に適当に $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ の要素を対応させたベクトル空間を $\mathbb{C}X$ とかいています。テンソル積空間の定義とそのあとの注意を参照してください。)

群 G への X を $\mathbb{C}X$ への表現に拡張することができます。それは次のように定義してやります:

$$(10-18) \quad \rho_g \left(\sum_{x \in X} a_x e_x \right) := \sum_{x \in X} a_x e_{gx}.$$

慣れてくると、上の式で表現 $(\mathbb{C}X, \rho)$ が定義されていると分かるのですが、もう少し詳しく見ていきましょう。

1. キッチンと定義にもどると、群 G の $\mathbb{C}X$ への表現をつくるには、写像 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}X)$ を作らないといけないですね。

つまり、 G の要素 $g \in G$ にたいして $\text{GL}(\mathbb{C}X)$ の要素 $\rho_g \in \text{GL}(\mathbb{C}X)$ を対応させる規則を作らないといけないわけです。

2. なので、次に $\text{GL}(\mathbb{C}X)$ の要素とはなんだったのかを考えることになります。要素 $\lambda \in \text{GL}(\mathbb{C}X)$ というのはベクトル空間 $\mathbb{C}X$ から $\mathbb{C}X$ への (線形) 同型写像でしたね。

$$\lambda: \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}X.$$

3. うえのことを合わせると、

群 G の $\mathbb{C}X$ への表現をつくるには、 G の要素 $g \in G$ にたいして $\text{GL}(\mathbb{C}X)$ の自己同型写像 $\rho_g: \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}X$ を対応させる規則を作らないといけないわけです。

4. しかし、ややこしいけれど写像 $\lambda: \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}X$ も $\mathbb{C}X$ の要素 $\alpha \in \mathbb{C}X$ にたいして $\mathbb{C}X$ の要素 $\lambda(\alpha) \in \mathbb{C}X$ を対応させる規則だったわけです。

5. 煎じ詰めると、群 G の $\mathbb{C}X$ への表現をつくるには、 G の要素 $g \in G$ と $\mathbb{C}X$ の要素 $\alpha \in \mathbb{C}X$ にたいして $\mathbb{C}X$ の要素 $\rho_g(\alpha) \in \mathbb{C}X$ を対応させる規則を作らないといけないとわかります。

それを実際に構成しているのが (10-18) なのです。

6. 表現を作るためには確かめなければいけないことが二点あります。

- (i) 写像 $\rho_g: \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}X$ は (線形) 同型写像である。
- (ii) 写像 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ は (群) 準同型写像である。

この二つの確認には補題 10.2 を用いることができます。

コメント： 結構面倒ですね。以降で表現の定義は (10-18) のように与えられることが多いです。元の定義との関係はここで説明した通りです。

練習問題 10.4. 6 の (i)(ii) を確認しよう。

必修問題 10.5. $\text{Tr } \rho_g = \#\{x \in X \mid gx = x\}$.

(左辺は (後に導入する) g の指標というものです。右辺は g が固定する X の点の個数ですね。)

10.2.2 巡回群の表現

$n \geq 1$ を自然数とする。 C_n を g を生成元とする n 次巡回群とする。

$$C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}.$$

この表現の例をいくつか見ていきましょう。

(1) $\zeta := \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}$ とおく。

整数 $m \in \mathbb{Z}$ にたいして C_n の 1 次元表現 $\rho^{(m)}$ を次で定める：

$$\rho^{(m)}(g^i)(a) := \zeta^{mi}a \text{ for } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ and all } a \in \mathbb{C}.$$

(2) 2 次元表現 r を次で定める：

$$r(g^i) := \begin{pmatrix} \cos \frac{2i\pi}{n} & -\sin \frac{2i\pi}{n} \\ \sin \frac{2i\pi}{n} & \cos \frac{2i\pi}{n} \end{pmatrix} \text{ for all } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

必修問題 10.6. この講義で r が既に現れています。その場所を指摘しよう。

n 次巡回群 C_n というのは周期 n で繰り返してる様子を司るものですが、そういう感じが表現にも表れていますね。

10.2.3 対称群の表現の例

$n \geq 1$ を自然数とする。ベクトル空間 V の n 個のテンソル積空間 $V^{\otimes n}$ を考える。

$$V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V \quad (n \text{ 個}).$$

n 次対称群 S_n が $V^{\otimes n}$ に次のように表現されます：

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

練習問題 10.7. これが表現であることを確かめよう。

注意したいのは上に現れている v_1, v_2, \dots の添え字があらわしているのはベクトルが何番目のテンソル積にいるかということです。今までにベクトル空間 V の基底を v_1, v_2, \dots , とかあらわしていますが、この場合の添え字は、いわば V の要素についている名前なのです。同じ記号ですが、意味は違います。

10.2.4 $GL_2(\mathbb{C})$ の 3次元表現

群 $GL_2(\mathbb{C})$ は自然な 2次元表現をもちますね。こいつが、例えば 3次元の表現を持つのかは自明ではないですが、次のものがあります。

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ にたいして 3次正方行列 $f(A)$ を以下で定める：

$$f(A) := \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

必修問題 10.8. 1. A が正則行列ならば $f(A)$ も正則行列であることをしめせ。

2. 写像 $f: GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$ は群準同型であることをしめせ。

ヒント 補題 10.2 を用いると楽かも。

10.3 正則表現 $\mathbb{C}G$

この節では G は有限群とします。 G の G 自身への集合としての正則作用 $r: G \curvearrowright G$

$$r_g(x) := gx \text{ 右辺は群の積}$$

を線形に拡張した作用 (節 10.2.1) を正則表現とよびます。

正確には次です。

定義 10.9 (正則表現). G を有限群とする。ベクトル空間 $\mathbb{C}G$ に次で G の作用 r を定めたものを G の正則表現 とよぶ。

$$r_g \left(\sum_{h \in G} x_h e_h \right) := \sum_{h \in G} x_h e_{gh}$$

10.4 自明表現 \mathbb{C}

群準同型 $f: G \rightarrow H$ が自明とは $f(g) = e_H$ がすべての $g \in G$ にたいして成り立つことでした。群 G がベクトル空間 V へ自明に作用するとは、作用を与える群準同型 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ が自明であることをいいます。これはつまり次が成り立つことと言い換えられますね

$$\rho_g(v) = v \text{ for all } g \in G, v \in V.$$

自明な作用を与えられた空間を自明な表現と呼びたくなりますが、自明表現という用語は特別に一次元の場合をさすことが多いです。

定義 10.10 (自明表現). 1次元ベクトル空間 \mathbb{C} と自明な作用 ρ の組を 自明表現 と呼ぶ。

10.5 表現のテンソル積

定義-命題 10.11 (表現のテンソル積). G 表現 $(U, \rho^U), (V, \rho^V)$ が与えられているとする。下部ベクトル空間 $U \otimes V$ に次で G の線形作用 $\rho^{U \otimes V}$ を定めることができる：

$$\rho_g^{U \otimes V}(u \otimes v) := \rho_g^U(u) \otimes \rho_g^V(v) \quad \text{for all } u \in U, v \in V$$

G 表現 $(U \otimes V, \rho^{U \otimes V})$ を G 表現 $(U, \rho^U), (V, \rho^V)$ のテンソル積とよぶ。

単に $U \otimes V$ とあらわすこともおおい。線形写像のテンソル積の言葉を使えば $\rho_g^{U \otimes V} = \rho_g^U \otimes \rho_g^V$ であることを指摘しておく。

10.6 Hom 表現、反傾表現

定義-命題 10.12 (Hom 表現). U, V を G 表現とする。線形写像の空間 $H = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ に次のようにして G の表現を定義することができる：

$$\rho_g^H(\phi) := \rho_g^V \circ \phi \circ \rho_{g^{-1}}^U$$

ここで $\rho_g^V : V \rightarrow V$ と $\rho_{g^{-1}}^U : U \rightarrow U$ は写像としてかんがえていて上の式の右辺は写像の合成

$$\rho_g^V \circ \phi \circ \rho_{g^{-1}}^U : U \xrightarrow{\rho_{g^{-1}}^U} U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\rho_g^V} V$$

である。

練習問題 10.13. 上の定義で表現が与えられていることを確認しよう。

以下、何も言わなければ表現の間の線形写像の空間には上の G 作用を与える。

定義 10.14 (反傾表現). G 表現 V の反傾表現 V^* とは双対空間 $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ に V と自明表現 \mathbb{C} から誘導される Hom 表現を与えたものと定める。

具体的には、反傾表現 ρ^{V^*} は次で与えられる：

$$\rho_g^{V^*}(\phi) := \phi \circ \rho_{g^{-1}}^V \quad \text{for all } \phi \in V^*.$$

10.7 部分表現

ベクトル空間 V の部分空間 U とは V の下部集合の空でない部分集合で和とスカラー倍で閉じているものをいいました。ベクトル空間 V に群 G が作用している場合には、さらに、 G の作用で閉じているというのが自然な条件です。

定義 10.15 (G 安定). 群 G がベクトル空間 V に線形に作用しているとする。部分空間 $U \subset V$ が G 安定とは以下が成り立つことをいう：

任意の $u \in U$ にたいして $gu \in U$ がなりたつ。

G 安定な部分空間 U には自然に G の作用が誘導されます。

定義 10.16 (部分表現). 群 G の表現 $V = (V, \rho)$ の部分表現 U とは (下部ベクトル空間) V の G 安定な部分空間 U と自然に誘導された G 表現の組をいう。

例 10.17. V を G の表現とする。このとき V 自身とゼロベクトル空間 0 は部分表現である。これらを自明な部分表現とよぶ。

定義 10.18. V を G の表現とする。

(1) $v \in V$ が G 不変とは等式 $gv = v$ が任意の $g \in G$ にたいしてなりたつことをいう。

(2) 不変元の集合を V^G とあらわす：

$$V^G := \{v \in V \mid gv = v \text{ for all } g \in G\}.$$

補題 10.19. V を G 表現とする。不変元の集合 V^G は G 安定な部分空間である。

必修問題 10.20. 補題 10.19 を示せ。

10.7.1 既約表現

定義 10.21 (既約表現⁵). 非自明な部分表現をもたない G 表現を既約とよぶ。

つまり、 G 表現 V が既約というのは、部分表現 $U \subset V$ は $U = V$ か $U = 0$ のどちらかのみである表現として定義されます。

1次元空間 \mathbb{C} は (G 安定という条件ぬきにしても) 部分空間は自明なものしかありませんでした。そのことから次は明らかです。

命題 10.22. 群 G の1次元表現は既約である。

1次元でなくても既約な表現はあります。

練習問題 10.23. 自然数 $n \geq 1$ を考える。一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ の n 次元ベクトル空間 \mathbb{C}^n への自然な表現は既約であることを示せ。

ヒント: 任意のベクトルの組 $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{C}^n, \vec{v} \neq 0, \vec{u} \neq 0$ にたいしてある $g \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して $g\vec{u} = \vec{v}$ を満たすことをまず示す。

(これをみとめてそれ以降の証明だけをかいてもらってもいいです。)

この例は群 $G = GL_n(\mathbb{C})$ が無限群であり表現空間 \mathbb{C}^n に (数学的な意味はなく、感じとして) まんべんなくベッタリ作用してる感じなので、既約であるのも当然かとも思えます。

作用する群が有限なら (数学的な意味はなく、感じとして) 作用はスカスカな感じなので2次元以上の場合に規約な表現なんてあるのかな、と思っちゃいますが、あるのです。

例 10.24 (4次二面体群 D_4 の \mathbb{C}^2 への自然な作用). 例 9.5 の4次二面体群 D_4 を考えます。要素を具体的に書きましょう：

$$D_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

⁵既約表現は単純表現とも呼ばれます。

要素の行列表示により自然に \mathbb{C}^2 への作用が定まりますね。それを自然表現とよび ν とあらわします⁶。

主張. 自然表現 ν は既約である。

部分表現 $U \subset \mathbb{C}^2$ が $U \neq 0$ かつ $U \neq \mathbb{C}^2$ であると仮定して矛盾を導く。

$U \neq 0$ なので、ある $\vec{u} \in U$, $\vec{u} \neq 0$ が存在する。

U が部分表現なので、 D_4 の要素である行列を \vec{u} にかけて得られるベクトルはまた U の要素である。とくに、次の二つは U の要素である：

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{u}, \quad \vec{w} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}.$$

\vec{u} を $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と成分表示すると、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

である。

$U \neq \mathbb{C}^2$ ということは、 U は一次元空間である。よって、特に次の二つのことがなりたつ

(i) \vec{v} は \vec{u} の定数倍である。

(ii) \vec{w} は \vec{u} の定数倍である。

まず (i) から、 \vec{u} の形は

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

に限定される。つまり $y = 0$ または $x = 0$ が導出される。次に、(ii) よりいずれの場合でも $x = 0, y = 0$ が導出される。これは $\vec{u} \neq 0$ に矛盾。

証明は随分とごたごたとしてますが、のちに指標理論を学ぶと、ものすごく簡単になります。

練習問題 10.25. n 次巡回群 C_n と n 次二面体群 D_n の自然表現の既約性を調べよう。

10.7.2 表現の直和分解

定義 10.26 (表現の直和分解). G 表現 V が部分表現 U と部分表現 W の直和であるというのは、下部ベクトル空間 V が部分空間 U, W の直和に分解されていることをいう。このとき

$$V = U \oplus W$$

とあらわす。

既約と紛らわしいですが「直既約」という概念を導入します。「直和分解に関して既約（既に簡約化されてる）」という意味です。

⁶ ν は n の由来となったギリシャ文字です。

定義 10.27 (直既約表現). G 表現 V が直既約とは、 $V \neq 0$ かつ非自明な直和分解を持たないことをいう。

後半の意味をキチンと述べます。

V が直和分解 $V = U \oplus W$ を持ったとすれば次のいずれかが成り立つ：

- (i) $U = 0, W = V$.
- (ii) $U = V, W = 0$.

逆に言えば、表現 V が直既約でないというのは、自明でない直和分解 $V = U \oplus W$, $U \neq 0, W \neq 0$ をもつということです。もしか、この直和因子 U, W に直既約でないものがあれば、さらに、それを直和分解することができますね。

この講義での暗黙の了解として、表現は有限次元表現のみを扱うことにしていました。非自明な直和分解の直和因子はもとの空間のよりも低い次元をもつので、表現 V の直和分解を繰り返していく手続きはどこかで停止します。つまり、表現 V を直既約表現の直和として表すことができるのです。

定理 10.28 (表現の直既約分解). (有限次元) 表現 V は直既約な部分表現の直和である。つまり、 V の直既約な部分表現 V_1, V_2, \dots, V_m が存在して、 V はこれらの直和である：

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m.$$

この定理のお陰で、表現の研究は、表現の直既約分解の研究と直既約表現の研究に帰着されます。

10.7.3 既約表現 v.s. 直既約表現

次は条件を比較するだけで自明に得られる命題です。

命題 10.29. 既約表現は直既約である。

注意 10.30. 下の例で示すように、一般の群 G にたいしては上の命題の逆は成り立ちません。つまり、直既約であるが既約でない表現が存在します。

しかし、のちに有限群 G にたいしては逆が成り立つことを示します。

例 10.31 (直既約であるが既約でない表現). 加法群 \mathbb{C} の 2 次元表現 $V = (\mathbb{C}^2, \rho)$ を次で定義します：

$$\rho_a := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for all } a \in \mathbb{C}.$$

作用を明確にあらわすと

$$\rho_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix} \text{ for all } a \in \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

まず、不変元集合 V^G を求めましょう。つまり $\rho_a \vec{x} = \vec{x}$ である $\vec{x} \in \mathbb{C}^2$ を見つけるということです。これは簡単ですね。答えは

$$V^G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}.$$

不変元集合は G 不変であることは示しています。さらに上で求めたことから $V^G \neq 0$, $V^G \neq V$ です。

V は非自明な部分表現を持つので既約ではありません。

では、次に V が直既約であることを見ていこうか、となるかもしれないですが、焦らずに、部分表現を調べていきましょう。

ここまでで V の部分表現は三つ見つかっています。0, V^G , V ですね。じつは、これ以外の部分表現がないことがわかります。

主張. V の部分表現 U は 0, V^G , V のどれかである。

これを示しましょう。

まず部分表現 U が V^G に含まれないとすれば、 $U = V$ であることを示します。仮定から $U \setminus V^G$ は空集合ではありません。別の言い方では $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$, で $y \neq 0$ をみたすものが存在します。

いま、 U は $G = \mathbb{R}$ の作用で安定なので、任意の $a \in \mathbb{R}$ にたいして $\rho_a \vec{x} \in U$ がなりたちます。とくに $a = 1$ と選ぶと $\rho_1 \vec{x}$ が U に属していることがわかります。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と成分表示すると、 $\rho_1 \vec{x} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ ですね。

上の二つのベクトルは一次独立である。…♠

よって、 $\vec{x}, \rho_1 \vec{x} \in U$ は \mathbb{C}^2 の基底になり、ゆえに $U = \mathbb{C}^2$ が成り立ちます。

部分表現 V^G は一次元なので、これに含まれる部分空間は 0 か自分自身しかありません。よって、とくに V^G に含まれる部分表現は 0 か V^G のどちらかです。

これにて主張の証明が完了しました。

さて、最後に V が直既約であることを示しましょう。 V が非自明な直和分解を持ったとします。つまり、部分表現 U, W で $U \neq 0, V \neq 0$ により直和分解されていたとします: $V = U \oplus W$. しかし、上の主張により U, W は V^G または V のどちらかです。可能性は 4 パターンありますが、いずれの場合でも $U \cap W = 0$ は満たされないので矛盾です。

必修問題 10.32. 上の命題 ♠ を示せ。($y \neq 0$ に気を付けて。)

11 G 準同型 : 表現の準同型

11.1 G 準同型写像

線形写像 $\phi: U \rightarrow V$ とは和とスカラー倍を保つ写像なのでした。 G 表現の場合には、さらに G の作用を保つことを要請するのが自然です。

定義 11.1 (G 準同型). U, V を G 表現とする。(下部ベクトル空間の間の) 写像 $\phi: U \rightarrow V$ が G 準同型 とは線形写像であり次をみたすものをいう :

$$(11-19) \quad \phi(gu) = g\phi(u) \quad \text{for all } u \in U, g \in G.$$

定義 11.2 (G 準同型の空間). G 表現 U から G 表現 V への G 準同型集合を $\text{Hom}_G(U, V)$ とあらわす。これは定義から線形写像の空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の部分空間である :

$$\text{Hom}_G(U, V) := \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \mid \phi \text{ は } G \text{ 準同型} \}.$$

定義に現れた条件式 (11-19) を吟味しましょう。

観察 11.3. 条件式 (11-19) を詳しく書くと以下ですね：

$$(11-20) \quad \phi(\rho_g^U u) = \rho_g^V \phi(u) \quad \text{for all } u \in U, g \in G.$$

右辺と左辺との g の作用の意味が違っているのですね。

いったん g を先に固定して、次に u を動かすことにすると、上の式は以下の写像の一致と読み替えられますね：

$$(11-21) \quad \phi \circ \rho_g^U = \rho_g^V \circ \phi \quad \text{for all } g \in G.$$

写像 $\rho_g^U : U \rightarrow U$ は同型写像で、その逆写像は $\rho_{g^{-1}}^U$ で与えられるのでした。上の式の両辺に右から $\rho_{g^{-1}}^U$ を掛けてやる（というか合成してやる）ことで条件式 (??) は次と同値とわかります：

$$(11-22) \quad \phi = \rho_g^V \circ \phi \circ \rho_{g^{-1}}^U \quad \text{for all } g \in G.$$

これらの観察から、 G 準同型の空間は次のようにあらわせることもわかります：

$$(11-23) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_G(U, V) &= \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \mid \phi \circ \rho_g^U = \rho_g^V \circ \phi \text{ for all } g \in G \} \\ &= \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \mid \rho_g^V \circ \phi \circ \rho_{g^{-1}}^U = \phi \text{ for all } g \in G \} \\ &= \{ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \mid \rho_g^H(\phi) = \phi \text{ for all } g \in G \} \end{aligned}$$

ただし、最後にあらわれた ρ_g^H は定義 10.12 であたえた Hom 表現への G 作用です。

よく見ると、最後の表示は線形写像 $\phi : U \rightarrow V$ が G 準同型であることが $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素として G 不変元であることと同値であると言っています。我々は次の命題を示しました。

命題 11.4. G 表現 U から G 表現 V への G 準同型集合 $\text{Hom}_G(U, V)$ は $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の G 不変元の集合と一致する：

$$\text{Hom}_G(U, V) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)^G.$$

11.1.1 G 同型写像

定義 11.5 (G 同型写像、 G 同型). (1) 全単射な G 準同型写像を G 同型写像とよぶ。

(2) G 表現 U, V が同型（あるいは G 同型）とは、同型写像 $\phi : U \rightarrow V$ が存在することをいう。

G 表現 U, V が同型であることを $U \cong V$ とあらわす。

表現を ρ^U, ρ^V をつかってあらわす場合は $\rho^U \cong \rho^V$ と書く。

（ただし、この記号はベクトル空間の同型と同じ記号なので、文脈上使い分けを明記する必要がある場合には注意して使おう。）

G 表現 U, V は下部ベクトル空間が（ベクトル空間として）同型であっても G 表現としては同型とは限らない。

例 11.6. 節 10.2.2 の状況で考えましょう。

$n \geq 1$ を自然数とする。 C_n を g を生成元とする n 次巡回群とする : $C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$.
 次で 1 次元表現を定義しました。

$\zeta := \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}$ とおく。 整数 $m \in \mathbb{Z}$ にたいして C_n の 1 次元表現 $\rho^{(m)}$ を次で定める :

$$\rho^{(m)}(g^i)(a) := \zeta^{mi} a \text{ for } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ and all } a \in \mathbb{C}.$$

この表現にたいして次が成り立ちますね :

二つの整数 k, m にたいして表現 $\rho^{(m)}$ と $\rho^{(k)}$ が同型であるための必要十分条件は $m \equiv k \pmod{n}$ である。

練習問題 11.7. うえの主張を証明しよう。

もう一つ大事な G 表現の同型を取り上げます。

命題 11.8. U, V を G 表現とする。 このとき命題 6.16 の線形同型写像 $\Phi : V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ は G 準同型である。 よって、 $\Phi : V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ は G 表現の同型写像である。

Proof. まずは確認するべき式を導出します。

Step 1 示すべきは $g \in G$ にたいして等式

$$(11-24) \quad \Phi \circ \rho_g^{V \otimes U^*} = \rho_g^{\text{Hom}} \circ \Phi$$

が成り立つことである。

Step 2 以下、 $g \in G$ を一つ固定して考える。

Step 3 等式 (11-24) は $V \otimes U^*$ から $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ への写像の等式であるから、 これを確認するには次を示せばいい :

$$(11-25) \quad \Phi \circ \rho_g^{V \otimes U^*}(w) = \rho_g^{\text{Hom}} \circ \Phi(w) \text{ for all } w \in V \otimes U^*.$$

Step 4 写像は二つとも線形写像なので等式 (11-25) を確認するにはある $V \otimes U^*$ の生成系の上で確認すればよい。 今の場合は生成系 $\{v \otimes f \mid v \in V, f \in U^*\}$ をもちいる。

すると確認することは次ですね。

$$(11-26) \quad \Phi \circ \rho_g^{V \otimes U^*}(v \otimes f) = \rho_g^{\text{Hom}} \circ \Phi(v \otimes f) \text{ for all } v \in V, f \in U^*.$$

Step 5 以下、 $v \in V$ と $f \in U^*$ も固定する。

Step 6 等式 (11-26) の両辺は $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素、つまり、 U から V への線形写像なので、 等号を確認するには写像として一致することを確認しないといけません。 そこで、 記号を簡単にするために、 両辺の写像を L, R とおきましょう。

$$L := \Phi \circ \rho_g^{V \otimes U^*}(v \otimes f), \quad R := \rho_g^{\text{Hom}} \circ \Phi(v \otimes f).$$

すると示すべきことは、 写像の等号、つまり各要素 $u \in U$ の行き先が一致しているということです。 つまり、 以下が確認すべきことです。

$$(11-27) \quad L(u) = R(u) \text{ for all } u \in U$$

あとは頑張って $L(u), R(u)$ を計算して等号の成立を示します。 □

練習問題 11.9. 等号 (11-27) を示せ。

11.2 G 準同型の像と核

定義 11.10 (像と核). G 準同型 $\phi: U \rightarrow V$ の像 $\text{Im } \phi$ と核 $\text{Ker } \phi$ をベクトル空間としてのそれとして定めます。

$$\text{Im } \phi := \{\phi(u) \in V \mid u \in U\}, \quad \text{Ker } \phi := \{u \in U \mid \phi(u) = 0\}.$$

命題 11.11. 上の状況で $\text{Im } \phi$ は V の部分表現であり、 $\text{Ker } \phi$ は U の部分表現である。

必修問題 11.12. 命題 11.11 を示せ。

系 7.3 から次が従います。

命題 11.13. G 表現 V の自己 G 準同型写像 $e: V \rightarrow V$ が $e \circ e = e$ を満たすとする。このとき、次の G 表現としての直和分解が存在する：

$$V = \text{Im } e \oplus \text{ker } e.$$

11.3 シューア (Schur) の補題

シューアの補題と呼ばれる命題は概して定理として紹介されます。

定理 11.14 (シューアの補題). U, V を既約 G 表現とする。すると、次がなりたつ：

$$\text{Hom}_G(U, V) = \begin{cases} \mathbb{C} & U \cong V \\ 0 & U \not\cong V. \end{cases}$$

Proof. Step 1. G 準同型 $\phi: U \rightarrow V$ が 0 でなければ、これは同型である。

核 $\text{Ker } \phi$ は U の部分表現である。既約という仮定から $\text{Ker } \phi = 0$ または $\text{Ker } \phi = U$ である。後者の場合は $\phi = 0$ となってしまうので、 $\text{Ker } \phi = 0$ でなくてはならない。よって、 ϕ は単射である。

像 $\text{Im } \phi$ は V の部分表現である。既約という仮定から $\text{Im } \phi = 0$ または $\text{Im } \phi = V$ である。前者の場合は $\phi = 0$ となってしまうので、 $\text{Im } \phi = V$ でなくてはならない。よって、 ϕ は全射である。

Step 2. 既約表現 V の自己 G 準同型 $\psi: V \rightarrow V$ は定数倍写像である。つまり、あるスカラー $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\psi = \lambda \text{id}_V$ を満たす。

まず、複素数体 \mathbb{C} 上で考えていて、さらに ψ は有限次元ベクトル空間 V の自己線形写像なので、 ψ は必ず一つは固有値を持つことに注意します。(固有多項式 $F_\psi(t) = \det(t \text{id}_V - \psi)$ が根を持つことからしたがいますね。)

ϕ の固有値の一つを λ とおき、 $v \in V$ を λ に属する固有値とする。 $\theta := \psi - \lambda \text{id}_V$ は G 準同型であり、かつ、 $\theta(v) = 0$ を満たす。つまり $v \in \text{Ker } \theta$ である。(固有ベクトルの定義より $v \neq 0$ なので) $\text{Ker } \theta \neq 0$ である。

Step 1 の議論を流用すると、 $\theta = 0$ が分かる。つまり、 $\psi = \lambda \text{id}_V$ が結論される。

Step 3. 既約表現 U, V は同型とする。すると $\text{Hom}_G(U, V) \cong \mathbb{C}$ 。

G 同型写像 $\phi: U \rightarrow V$ を一つきめる。他の G 準同型 $\psi: U \rightarrow V$ は ϕ の定数倍であることを示せばよい。

$\psi \circ \phi^{-1}: V \rightarrow V$ は G 自己準同型なので、Step 2 より、あるスカラー λ が存在して $\psi \circ \phi^{-1} = \lambda \text{id}_V$ がなりたつ。両辺に ϕ を掛けて $\psi = \lambda \phi$ を得る。□

注意 11.15 (\mathbb{C} 上でない場合). Step 2 で複素数体 \mathbb{C} 上であるという仮定を用いました。たとえば \mathbb{C} に変えて \mathbb{R} 上で考えると上の定理は不成立です。Hom 空間の記述は変更しなければいけません。

12 有限群の表現論

群の表現に関して初歩的なことはおさえたので、いよいよ、有限群を扱っていきましょう。

以下、断らなければ G は有限群を表します。

群の要素の個数が有限個、という仮定からどんなことが導出されるのでしょうか。鍵となるのは要素の個数が有限ということです。

12.1 レイノルズ (Reynolds) 作用素

鍵となるのは要素の個数が有限なので G 表現 (V, ρ) があつたら V にたいする $g \in G$ の作用 ρ_g を足しあげることができる、ということです。つまり、次の式が $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の中で意味を持ちます：

$$\sum_{g \in G} \rho_g.$$

こいつを G の要素の個数 $|G|$ で割ってやったものが大切でレイノルズ作用素と呼ばれたりします。

定義 12.1 (レイノルズ作用素). G 表現 (V, ρ) に対する レイノルズ作用素 π を以下で定める：

$$(12-28) \quad \pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g.$$

(これは $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の要素です。)

V への G 作用の (数学的な意味はなく、日常的な意味で) 平均をとっているのですね。こいつがとても強力です。

注意 12.2. 定義式 (12-28) で有限性以外にも使われている特質があります。「足してる」のと「 $|G|$ で割ってる」ということです。

(1) 「足してる」のは足し算が出来るから足せるのです。この足し算はベクトル空間 $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の中の足し算です。

なにを当たり前なことをと思われるかもしれませんが、群 G のみしか考えていないと、要素 $g \in G$ 全てに渡って和をとるという操作ができませんね。また、単に集合 X への作用を考えても、作用の和を考えることはできません。

作用の総和を考えられるというのはベクトル空間への作用を考えているから可能になっている操作なのです。

(2) 「 $|G|$ で割ってる」のも割れるから割っています。それは位数 $|G|$ が複素数体 \mathbb{C} の中で可逆である (逆元が存在する)、ということが効いています。

体の標数というものをご存知であれば、複素数体ではなく標数が $|G|$ を割り切る体で考えると $|G| = 0$ となってしまう、割り算が考えられなくなることが見て取れるでしょう。

レイノルズ作用素の基本的な性質を示します。

補題 12.3. G 表現 V にたいして次が成り立つ。

(1) $\pi \circ \rho_g = \pi, \rho_g \circ \pi = \pi$ for all $g \in G$.

(2) $\pi : V \rightarrow V$ は G 準同型である。

(3) $\text{Im } \pi = V^G$.

(4) π は V から V^G への G 準同型とみなせる。

(5) $\ker \pi = \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$.

(6) $\pi^2 = \pi$.

(7) $V = V^G \oplus \ker \pi$.

(8) $\text{Tr } \pi = \dim V^G$.

Proof. (1)

$$\begin{aligned} \pi \circ \rho_g &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_h \circ \rho_g = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{hg} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_k = \pi \end{aligned}$$

ただし等号 $\stackrel{*}{=}$ では写像 $\cdot g : G \rightarrow G$ が全単射であることを用いている。

もう一つの等式も同様に示せる。

(2) は (1) の帰結である。

(3) 包含関係 $\text{Im } \pi \subset V^G$ は (1) より従う。

$v \in V^G$ をとってくる。次の計算で $\pi(v) = v$ が示され、よってとくに $v \in \text{Im } \pi$ がなりたつ。

(12-29)
$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

(4) は (1)(3) の帰結である。

(5). $W := \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$ とおく。 $v \in W$ をとってくる。(1) より $\pi(v - gv) = \pi(v) - \pi(v) = 0$ が成り立つ。よって $v \in \ker \pi$ である、これ包含関係 $W \subset \ker \pi$ が示せた。

$v \in \ker \pi$ をとってくる。すると、 $\pi(v) = 0$ なので、つぎのように v を表す式がえられる。

$$v = v - \pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v - gv)$$

最右辺の表示から v は W に属することが従う。これで包含関係 $\ker \pi \subset W$ を示すことができた。

(6) 次のようにして等号を示すことができる。

$$\pi \circ \pi = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_h \circ \pi \stackrel{*}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi = \pi$$

ただし $\stackrel{*}{=}$ では (1) を用いた。

(7)(8) は (6)(3) と命題??の帰結である。

□

必修問題 12.4. (1) の証明されていない方の等号を示そう。命題??を見つけよう。

12.2 G 表現の半単純性

つぎの二つの定理が有限群の表現論の基礎定理です。

G 表現 V の部分表現 U にたいして部分表現 $W \subset V$ で $V = U \oplus W$ となるものを U の補表現と呼びます。

有限ではない群 G の表現 V には補表現 W をもたない部分表現 U を持つことがある、という例を例 10.31 で見ました。しかし、 G が有限の場合は任意の部分表現 U は補表現を持つことがわかります。

定理 12.5 (G 表現の半単純性⁷ 1). (G を有限群とする。) G 表現 V の部分表現 U は補表現 W をもつ。

よって、特に直既約表現は既約である。

この定理と定理 10.28 から次が分かります。

定理 12.6 (G 表現の半単純性 2). (G を有限群とする。) G 表現 V は既約表現の直和に分解する。つまり、 V の部分表現 W_1, W_2, \dots, W_m で既約なものが存在して V はこれらの直和である：

$$(12-30) \quad V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m.$$

練習問題 12.7. 定理 12.5 を仮定して定理 12.6 と系??を示そう。

以下では、定理 12.5 の証明を二通り与えます。

12.3 定理 12.5 の証明その 1

12.3.1 π^{Hom}

Hom 表現のレイノルズ作用素 π^{Hom} を考察します。

補題 12.8. U, V を G 表現とする。 Hom 表現 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ のレイノルズ作用素を π^{Hom} とあらわす。次が成り立つ。

(1) 線形写像 $f : U \rightarrow V$ が G 準同型であるための必要十分条件は $\pi^{\text{Hom}}(f) = f$ がなりたつことである。

(2) 線形写像 $f : U \rightarrow V$ にたいして $\pi^{\text{Hom}}(f)$ は G 準同型写像である。

(3) $\text{Tr } \pi^{\text{Hom}} = \dim \text{Hom}_G(U, V)$.

必修問題 12.9. 上の補題 12.8 を証明しよう。

ヒント：これまで示したいくつかの命題から直ちに従います。

まずは G 準同型写像の空間 $\text{Hom}_G(U, V)$ に関する命題を思い出そう。

以下では π^{Hom} がどの Hom 表現のレイノルズ作用素かは明記しない。また、写像の合成 $g \circ f$ の \circ を省略することがおおい。

⁷半単純性は完全可約性ともよばれます

補題 12.10. U, V, W を G 表現とする。

線形写像 $f: V \rightarrow U$ と G 準同型写像 $h: W \rightarrow V$ にたいして次が成り立つ。

$$\pi^{\text{Hom}}(fh) = \pi^{\text{Hom}}(f)h.$$

上の式の左辺の π^{Hom} は $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U)$ のレイノルズ作用素であり、右辺のものは $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U)$ のものである。写像の定義域と値域かわかることなので、明記しなくても問題はない。

Proof. 作用を計算しよう。

$$\rho_g^{\text{Hom}}(fh) = \rho_g^U f h \rho_{g^{-1}}^W = \rho_g^U f \rho_{g^{-1}}^V h = \rho_g^{\text{Hom}}(f)h.$$

あとはレイノルズ作用素が作用の定義にもどれば示すべき等式が得られる。 □

うえの補題 12.10 の形は中途半端に見えます。しかし、いかにも成り立ちそうな、もっと綺麗な主張は一般には不成立です。

注意 12.11. 線形写像 $W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{f} U$ にたいして一般には

$$\pi(fh) \neq \pi(f)\pi(h).$$

である。

例 12.12. 二次巡回群 $G = C_2 = \langle g \rangle$ を考えます。 $U = W = \mathbb{C}$ を自明表現とし、 $V = \mathbb{C}^2$ は $\rho_g^V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる G の表現とします。さらに、線形写像 f, h を以下で定めます：

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : W \rightarrow V, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} : V \rightarrow U.$$

すると具体的な計算で次がわかります：

$$\begin{aligned} fh &= 0, \pi(fh) = 0, \\ \pi(h) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi(f)\pi(h) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

とくに $\pi(fh) \neq \pi(f)\pi(h)$ です。

念のために $\pi(h)$ の計算方法を書いておきます。

$$\begin{aligned} \pi(h) &= \frac{1}{2} (\rho_e^{\text{Hom}}(h) + \rho_g^{\text{Hom}}(h)) \\ &= \frac{1}{2} (h + \rho_g^V h \rho_{g^{-1}}^W) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

必修問題 12.13. $\pi(f)$ の計算をしよう。

後で必要になることはないですが次のことも注意しておきます。

注意 12.14. 線形写像 $f: V \rightarrow U$ が同型であっても $\pi(f)$ が同型になるとは限らない。

例 12.15. $V = U = \mathbb{C}^2$ は $\rho_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる G の表現とします。

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の掛け算写像を $f: V \rightarrow U$ としましょう。すると $\rho_g(f)$ の表現行列は $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ ですね。

$$\rho_g(f) = \rho_g^U f \rho_g^{V-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

なので $\pi(f)$ の表現行列は $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$ です。行列式をもとめると

$$\det B = \frac{1}{4} (2 \det A + a^2 + d^2 - b^2 - c^2).$$

となります。

なので例えば $f: V \rightarrow V$ を行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を掛ける写像とすれば、 f は同型であるが $\pi(f)$ は同型でない例となっていることが分かります。

12.3.2 証明

定理 12.5 の証明. 設定を思い出す。 V は G 表現であり、 U はその部分表現であった。 W' を U の補空間とする。(つまり、ベクトル空間として $V = U \oplus W'$ がなりたつ V の部分空間 W' を一つもってきている。こいつが G 安定であれば、そのまま所望の部分表現を与える。しかし、もちろん W' が G 安定である保証はなにもない。)

$i: U \rightarrow V$ を包含写像とする。(包含関係 $U \subset V$ を写像とみたもの。)

$p': V \rightarrow U$ を直和分解 $V = U \oplus W'$ から定まる射影とする。(要素 $v \in V$ が $v = u + w'$ ($u \in U, w' \in W'$) と表示したときに $p'(v) = u$ で定まる写像のことです。) 写像の等式 $p'i = \text{id}_U$ に注意しておく。

$p := \pi^{\text{Hom}}(p')$ と定める。 $pi = \text{id}_U$ が成り立つことが次で確かめられる。

$$pi = \pi^{\text{Hom}}(p')i = \pi^{\text{Hom}}(p'i) = \pi^{\text{Hom}}(\text{id}_U) = \text{id}_U.$$

ただし二つ目の等号には補題 12.8 をもちいている。また 4 つ目には補題 12.10 と恒等写像 id_U は G 準同型であることを用いている。

$e := ip$ と定める。これは V の自己 G 準同型写像である。さらに $ee = e$ がなりたつことが以下で示される。

$$(12-31) \quad ee = ipip = i \text{id}_U p = ip = e.$$

よって、命題 11.13 より V は G 表現としての直和分解 $V = \text{Im } e \oplus \text{Ker } e$ をもつ。

$\text{Im } e = U$ を示せば証明が完了する。まず、 $U = \text{Im } i$ に注意する。 $e = ip$ なので下の補題 12.16 より $\text{Im } e \subset U$ が成り立つ。

また、 $ei = i$ が等式 (12-31) と同様に示される。よって包含関係 $U = \text{Im } i \subset \text{Im } e$ が補題 12.16 から従う。 □

補題 12.16. 写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ が与えられているとする。すると、次の包含関係がなりたつ：

$$\text{Im } gf \subset \text{Im } g$$

練習問題 12.17. 上の補題を証明しよう。

12.4 定理 12.5 の証明 その2

12.4.1 エルミート内積

第二の証明ではエルミート内積⁸を用います。
次が大事です。

補題 12.18. (有限次元) ベクトル空間 V はエルミート内積をもつ。

Proof. $n = \dim V$ とする。線形同型写像 $f : V \cong \mathbb{C}^n$ で \mathbb{C}^n の標準内積を引き戻せばよい。

つまり、 $(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{C}^n}$ を \mathbb{C}^n の標準内積としたとき、次の定義式で V のエルミート内積が得られる：

$$(u, v) := (f(u), f(v))_{\mathbb{C}^n} \text{ for all } u, v \in V.$$

□

ベクトル空間 V とエルミート内積 $(-, +)$ の組を計量ベクトル空間と呼びました。例によって計量ベクトル空間 $(V, (-, +))$ をベクトル空間の記号 V で代表させます。

直交補空間の定義を復習しておきます。

定義 12.19 (直交補空間). V を計量ベクトル空間、 U を部分空間とする。このとき、 U の直交補空間 U^\perp を以下で定める。

$$U^\perp := \{v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ for all } u \in U\}$$

計量ベクトル空間 V に部分空間 U が直和分解 $V = U \oplus U^\perp$ ができるのでした。

12.4.2 ユニタリー表現

定義 12.20 (ユニタリー表現). 群 G のユニタリー表現 (V, ρ) とは、計量ベクトル空間 V への表現で、次が成り立つものをいう：

$$(12-32) \quad (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } g \in G, u, v \in V.$$

(この条件が成り立つことを、 G の作用がエルミート内積を保つ、と言ったりする。)

この定義自体は有限ではない群にたいしても有効ですね。

条件 (12-32) は次のようにも言い換えられます：

$$(12-33) \quad (gu, v) = (u, g^{-1}v) \text{ for all } g \in G, u, v \in V.$$

有限性がきいてくるのは次の命題です。

⁸一回生の教科書では複素数体上の場合に内積と呼ばれていたものをここではエルミート内積と呼んでいます。この方が通常の呼び方です。

命題 12.21. G 表現 V は G の作用で保たれるエルミート内積 $(-, +)$ をもつ。よって、この内積との組 $(V, (-, +))$ は G のユニタリー表現である。

Proof. 補題 12.18 より V はエルミート内積 $(-, +)$ をもつ。次の定義式で G の作用で保たれる内積が得られる：

$$(12-34) \quad (u, v) := \sum_{g \in G} \langle gu, gv \rangle$$

□

必修問題 12.22. 定義式 (12-34) がエルミート内積を定めることを示そう。

もう一つ大事なものは次です。

命題 12.23. ユニタリー G 表現 V の部分表現 U の直交補空間 U^\perp は G 安定である。よって、直和分解 $V = U \oplus U^\perp$ は G 表現の直和分解である。

Proof. $v \in U^\perp$ をとってくる。任意の $u \in U$ にたいして $(gv, u) = 0$ が成り立つことを示せばよい。これは次のように確かめられる

$$(gv, u) = (v, g^{-1}u) = 0,$$

一つ目の等号は (12-33) による、二つ目の等号は U が部分表現であるから $g^{-1}u$ であることから従う。 □

これでほぼ終わってるみたいなのですが、定理 12.5 の証明を与えておきます。

12.4.3 証明

定理 12.5 の証明. 定理の設定では G 表現 V と部分表現 U が与えられていた。まず、命題 12.21 により V をユニタリー表現とするエルミート内積 $(-, +)$ が存在する。次に、この内積による直交補空間 U^\perp を考えれば、命題 12.23 により G 表現の直和分解 $V = U \oplus U^\perp$ が得られる。 □

12.4.4 内積について補足

指標理論に向かって内積についての補足をしておきます。

計量ベクトル空間 $V = (V, (-, +))$ の正規直交基底とは部分集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ で次をみたくするものでした：

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad n = \dim V.$$

(念のためにいっておくと、正規直交基底はもちろん V の基底でした。)

思い出しておきたいのは、正規直交基底に関する座標が内積を使ってあらわせる、ということです。より正確には、次が成り立ちます；

補題 12.24. $\{v_1, \dots, v_n\}$ を計量ベクトル空間 V の正規直交基底とする。このとき任意の $u \in V$ にたいして

$$u = \sum_{i=1}^n (u, v_i) v_i$$

がなりたつ。

この補題とトレースの定義（定義 4.9）からトレースが計算できますね。

補題 12.25. $\{v_1, \dots, v_n\}$ を計量ベクトル空間 V の正規直交基底とする。自己線形写像 $f: V \rightarrow V$ のトレース $\text{Tr}(f)$ は次の式で計算できる。

$$\text{Tr}(f) = \sum_{i=1}^n (f(v_i), v_i).$$

これを使って次のことが分かります。

命題 12.26. G を有限群、 $V = (V, \rho)$ をその表現とする。すると、任意の $g \in G$ にたいして次がなりたつ：

$$\text{Tr}(\rho_{g^{-1}}) = \overline{\text{Tr}(\rho_g)}$$

ここで $\overline{(-)}$ は複素共役をあらわす。

Proof. V を G のユニタリー表現とするような内積 $(-, +)$ を考える。（命題 12.21 より存在する。） $\{v_1, \dots, v_n\}$ をその内積に関する正規直交基底とする。

すると、以下の計算で目標とする等式が導出できる：

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_{g^{-1}}) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n (\rho_{g^{-1}}(v_i), v_i) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^n (v_i, \rho_g(v_i)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=1}^n \overline{(\rho_g(v_i), v_i)} \\ &\stackrel{(4)}{=} \overline{\text{Tr}(\rho_g)} \end{aligned}$$

ただし、等号 (1),(4) は補題 12.26 を用いている。等号 (2) は表現のユニタリー性 (12-33)、等号 (3) はエルミート内積の性質から従う。□

13 ここまでのまとめ。

指標理論に進む前に、群の表現論に関して、ここまでのことをまとめておきましょう。

有限とは限らない群の表現論が先にあって、そして有限群の場合には特別なことが成り立つことを確かめました。

(I) (有限とは限らない) 群 G の表現という概念を導入しました。

G の表現にたいして、既約と直既約という二種類のクラスを定義しました。

任意の (有限次元) 表現は直既約表現の直和なのでした。

既約表現はいつでも直既約でしたが、逆は成り立ちませんでした。

(II) 有限群 G の表現に関して特筆すべきは半単純性 (定理 12.5, 12.6) です。

既約表現と直既約表現とは一致します。

任意の表現は既約表現の直和に分解します。

なので、有限群の表現の研究は次の二つのことに的が絞られます：

(A) 表現 V の既約表現への直和分解。

つまり、表現 V が与えられたときに

$$(13-35) \quad V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m \quad (V_1, \dots, V_m \text{ は既約表現}).$$

という分解を見つける。

(B) 既約表現を理解する。

上で掲げた研究方針に関して問題意識をまとめておきます。

問題 13.1. (A) 表現 V が与えられたら、既約表現への直和分解 (13-35) を簡単に見つけることができるのか？

また、既約表現への直和分解の仕方は一意的なのか？

一意的でないとすれば、どのくらいのバリエーションがあるのか？

(B) 既約表現を理解するって言いますが、考えてみると、既約表現がどのくらい沢山あるのか、あるいはまったくないのか、全然わかってないですね。

なので基本的な問題として次を考えたくくなります。

有限群 G の既約表現はいくつあるのか？有限個か？無限個か？

有限個なら、いくつあるのか？

なんにも知らなければ、こういう問題ってとても難しいですね。何らかの意味で表現全部の情報を捕まえないといけないので、大変そうです。

有限群の表現論では指標というものの力を借りてこの問題が解決されます。

14 指標

指標を定義しましょう。

定義 14.1 (指標). G を有限群とします。

G 表現 (V, ρ) の指標 χ^V とは以下で定義される写像 $\chi^V : G \rightarrow \mathbb{C}$ をのことをいう：

$$\chi^V(g) := \text{Tr}(\rho(g)) \text{ for all } g \in G.$$

例によって、 G 表現 (V, ρ) の指標 χ^V にはいくつかの表記方法があります：

$$\chi = \chi^\rho = \chi^V.$$

適宜便利なものを使いましょう。

命題 14.2. G 表現 $V = (V, \rho)$ の指標 χ にたいして次が成り立つ：

(1) $\chi(e) = \dim V$.

(2) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

(3) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

Proof. (1) は $\rho_e = \text{id}_V$ から従う。

(2) は補題 12.26 そのもの。

(3) は、.....

□

必修問題 14.3. (3) を証明しよう。講義で解説したトレースのある性質からほぼ明らかです。

14.1 例

14.1.1 1次元表現

1次正方行列 $A = (a)$ のトレースは $\text{Tr}(A) = a$ なのでした。スカラーと1次正方行列を同一視すれば $\text{Tr}(A) = A$ ですね。これを踏まえると次が容易にわかります。

例 14.4. 1次元表現 ρ の指標 χ^ρ は（上の同一視の下で） ρ と一致する：

$$\chi^\rho = \rho.$$

● 特に自明表現 triv の指標 ρ^{triv} は定数関数 1 です：

つまり、写像 $\rho^{\text{triv}} : G \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$\rho^{\text{triv}}(g) = 1 \text{ for all } g \in G$$

をみます。

14.1.2 正則表現

正則表現（定義 10.9）の指標は練習問題 10.5 で計算されています。

例 14.5. 正則表現 $\text{CG} = (\text{CG}, r)$ の指標 χ^r は次です：

$$\chi^r(g) = \begin{cases} |G| & g = e, \\ 0 & g \neq e. \end{cases}$$

14.1.3 3次対称群の自然表現

例 14.6. 3次対称群 S_3 の自然表現 (\mathbb{C}^3, ν) を次で定義します。

$$\nu_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ x_{\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}.$$

成分に逆に作用してるのは一見妙ですが、標準基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ にたいする作用をみると自然です：

$$\nu_\sigma(\vec{e}_i) = \vec{e}_{\sigma(i)}.$$

必修問題 14.7. 上の標準基底に対する作用が定義から導かれることを確かめよう。

標準基底への作用をみると、実はこの自然表現は S_3 の $X := \{1, 2, 3\}$ への自然な作用を線形に $\mathbb{C}X$ に拡張したもの（節 10.2.1）と同型とわかりますね。

よって、練習問題 10.5 から指標が計算できます：

$$\begin{aligned} \chi^\nu(1) &= 3, \\ \chi^\nu(\sigma) &= 1 \text{ for } \sigma = (1, 2), (2, 3), (1, 3) \\ \chi^\nu(\sigma) &= 0 \text{ for } \sigma = (1, 2, 3), (1, 3, 2). \end{aligned}$$

二つの部分表現

$$\begin{aligned}\ell &:= \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{C}\} \\ H &:= \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}\end{aligned}$$

により自然表現は直和分解 $\mathbb{C}^3 = \ell \oplus H$ されます。

1次元空間 ℓ は S_3 の表現としては自明表現です。なので、指標は

$$\chi^\ell(\sigma) = 1 \text{ for all } \sigma \in S_3$$

です。

よって、次に紹介する定理 14.9 をもちいると、等式 $\chi^H = \chi^\nu - \chi^\ell$ が得られます。これをもちいて H の指標 χ^H を計算できます：

$$\begin{aligned}\chi^H(1) &= 2, \\ \chi^H(\sigma) &= 0 \text{ for } \sigma = (1, 2), (2, 3), (1, 3) \\ \chi^H(\sigma) &= -1 \text{ for } \sigma = (1, 2, 3), (1, 3, 2).\end{aligned}$$

念のために、直接計算でも χ^H を求めましょう。

H の順序付き基底として次の (\vec{v}_1, \vec{v}_2) をとります：

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

すると、線形写像 $\rho_{(1,2)}^H, \rho_{(1,2,3)}^H$ の表現行列を求めると順に

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

となります。これらのトレースをとると、確かに $0, -1$ となって上の計算と一致しますね。

必修問題 14.8. 上で計算した以外の要素 $\sigma \in S_3$ に関する線形写像 ρ_σ^H の表現行列を求めよ。

14.2 指標の計算

与えられた表現から新たに構成される表現の指標をもとの表現の指標から求めることができます。

指標というのは G から \mathbb{C} への写像でした。指標同士の足し算、掛け算や、指標の複素共役は \mathbb{C} で値をつかって定義します。

命題 14.9. U, V を G 表現、 χ^U, χ^V をそれぞれの指標とする。

このとき次がなりたつ。

$$\chi^{U \oplus V} = \chi^U + \chi^V, \chi^{U \otimes V} = \chi^U \chi^V, \chi^{V^*} = \overline{\chi^V}, \chi^{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)} = \overline{\chi^U} \chi^V.$$

キチンと書いておきます：

(1) 直和表現 $U \oplus V$ の指標は $\chi^U + \chi^V$ である。

- (2) テンソル表現 $U \otimes V$ の指標は $\chi^U \chi^V$ である。
 (3) 反傾表現 V^* の指標は $\overline{\chi^V}$ である。
 (4) Hom 表現 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の指標は $\overline{\chi^U} \chi^V$ である。

Proof. (1) は明らか。

(2) は練習問題 5.13.

(4) は補題 6.3 と命題 14.2(2) を合わせて使えばいい。

(3) は (4) と例 14.4 から従う。 □

14.3 関数空間 $\mathcal{H} = \text{Map}(G, \mathbb{C})$

指標の住処である関数空間 $\mathcal{H} = \text{Map}(G, \mathbb{C})$ を導入しておきます。

関数空間というと偉そうだけれど、、、

定義 14.10 ($\mathcal{H} = \text{Map}(G, \mathbb{C})$). 有限群 G (の下部集合) から複素数 \mathbb{C} への写像の集合 $\text{Map}(G, \mathbb{C})$ を \mathcal{H} であらわす。

$$\mathcal{H} := \text{Map}(G, \mathbb{C}).$$

写像の集合なのに関数空間と呼ぶのは気分の問題です。

写像といっても G は所詮有限集合なので大したものではありません。

関数空間 \mathcal{H} の要素 $\phi \in \mathcal{H}$ というのは写像 $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ ですが、それは要素 $g \in G$ に複素数 $\phi(g) \in \mathbb{C}$ を対応させるものです。なので、 G の位数 $N = |G|$ とおくと、たんに N 個の複素数を選んでくるだけのことなのです。

もうすこし見やすくするために、 G の要素に番号をつけてやりましょう： $G = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$.

そうすると $\phi \in \mathcal{H}$ というのは数ベクトル $\begin{pmatrix} \phi(g_1) \\ \phi(g_2) \\ \vdots \\ \phi(g_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ で完全に決定されます。

逆に、 N 次数ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ が与えられれば、こいつから $\phi \in \mathcal{H}$ を

$$\phi(g_i) := x_i \text{ for all } i = 1, 2, \dots, N$$

で定めることができますね。

二つの対応をまとめると、全単射 $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^N$ がえられました。

指標の計算のところで述べたの同様に値ごとの計算で、関数空間の要素 $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ の和と積が定まり、さらにスカラー倍も定義できます。この和とスカラー倍により \mathcal{H} はベクトル空間です。上の全単射 $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^N$ がベクトル空間としての同型であることは容易にわかります。

関数空間というと偉そうで難しそうですが、ベクトル空間としては所詮考察の対象の群 G の位数分の次元をもった数ベクトル空間 \mathbb{C}^N なのです。

14.3.1 \mathcal{H} の基底

要素 $g \in G$ にたいして要素 $\delta_g \in \mathcal{H}$ を次で定める：

$$\delta_g(h) := \delta_{gh} = \begin{cases} 1 & h = g, \\ 0 & h \neq g. \end{cases}$$

練習問題 14.11. 部分集合 $\{\delta_g \mid g \in G\} \subset \mathcal{H}$ は \mathcal{H} の基底であることをしめせ。

14.4 \mathcal{H} のエルミート内積と積分

14.4.1 \mathcal{H} のエルミート内積

エルミート内積を定義しましょう。

定義 14.12. 関数空間 \mathcal{H} のエルミート内積 $(-|+)$ を次で定義する：

$$(14-36) \quad (\phi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum \phi(g)\overline{\psi(g)}. \text{ for all } \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

必修問題 14.13. 定義式 (14-36) が \mathcal{H} のエルミート内積を与えることを示せ。

ヒント：基底 $\{\delta_g \mid g \in G\}$ を使ってみると、
(ともかく $(\delta_g|\delta_h)$ を計算してみよう。)

14.4.2 積分

偉そうな記号だけれど、、、、

定義 14.14. 要素 $\phi \in \tilde{\mathcal{H}}$ にたいして

$$\int \phi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g).$$

と定義する。

そうすると $\phi, \psi \in \tilde{\mathcal{H}}$ の内積はフーリエ解析とかでおなじみの形に書けますね：

$$(14-37) \quad (\phi|\psi) = \int \phi\bar{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum \phi(g)\overline{\psi(g)}.$$

14.5 指標の積分公式、内積公式

代数なのになんで積分やねんって気持ちは抑えて次の補題を見ましょう。

G 表現 V の指標 ρ^V というのは関数空間 \mathcal{H} の要素なので積分が考えられます。その計算公式です。

補題 14.15 (指標の積分公式). G 表現 V の指標 ρ^V の積分は次で計算できる：

$$\int \chi^V = \text{Tr}(\pi^V) = \dim V^G.$$

定義を紐解けばそのまま証明できます。

Proof.

$$\int \chi^V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\rho_g) = \text{Tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g \right) = \text{Tr}(\pi^V) = \dim V^G.$$

□

いちいち練習問題とか言わなくても、これを読んで分からなければ、講義ノートを見返してください。

指標の内積の公式を与えましょう。

定理 14.16 (指標の内積公式). U, V を G の表現とする。指標 χ^U, χ^V の内積は次で計算できる。

$$(\chi^V | \chi^U) = \dim \text{Hom}_G(U, V).$$

Proof. H で Hom 表現 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ を表すことにします。あとは、既存の結果をつないで等式が証明できます。

$$(\chi^V | \chi^U) = \int \chi^V \overline{\chi^U} = \int \chi^H = \text{Tr}(\pi^H) = \dim \text{Hom}_G(U, V).$$

一つ目の等号は内積を積分で表示する公式 (14-37) です。命題 14.9(4) より、 $\chi^V \overline{\chi^U} = \chi^H$ が従うので、二つ目の等号が成り立ちます。三つ目の等号は指標の積分公式 (補題 14.15)、最後の等号は補題 12.8(3) です。 □

14.6 既約指標の正規直交性

既約表現の指標のことを既約指標と呼びます。

定理 14.16 とシューアの補題 (定理 11.14) から既約指標の内積は簡単に計算出来ます。下に示すように、既約指標は正規直交系をなします。導出は簡単⁹ですが、とても重要です。

定理 14.17 (既約指標の正規直交性). U, V を既約 G 表現とする。指標 χ^U, χ^V の内積は次で計算できる：

$$(\chi^V | \chi^U) = \begin{cases} 1 & V \cong U, \\ 0 & V \not\cong U. \end{cases}$$

この定理からは数多くの理論的な帰結が得られますが、その解説は次回にして、例を見ましょう。

14.7 例：巡回群の指標

節 10.2.2 の記号を引き継ぎます。

n 次巡回群 C_n の表現 $\rho^{(m)}$ の指標を $\chi^{(m)}$ とおきます。すると 1 次元表現の指標なので、比例定数がそのまま指標を与えます。つまり、

$$\chi^{(m)}(g^i) = \zeta^{mi} \text{ for all } i = 0, 1, \dots, n-1$$

⁹ここまでさんざんに理論を組み立ててその結果として「簡単」なのですが、、、

ですね。内積を計算しましょう：

$$\begin{aligned}
 (\chi^{(m)}|\chi^{(k)}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi^{(m)}(g^i) \overline{\chi^{(k)}(g^i)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{mi} \overline{\zeta^{ki}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{(m-k)i} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \begin{cases} 1 & (m-k \in n\mathbb{Z}), \\ 0 & (m-k \notin n\mathbb{Z}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\rho^{(m)}$ は 1 次表現なので既約であることに注意すると、定理 14.17 から次が得られますね。

命題 14.18. m, k を整数とする。表現 $\rho^{(m)}$ と表現 $\rho^{(k)}$ が同型であるための必要十分条件は $m-k \in n\mathbb{Z}$ である。

練習問題 14.19. 上の等号 $\stackrel{(*)}{=}$ が分からない人は考えよう。

ヒント： ζ は 1 の n 乗根なので ζ^{m-k} もそうですね。これらは方程式 $X^n - 1 = 0$ の根です。 $X^n - 1$ の因数分解を考えてみましょう。

2次元表現 r の指標を η とおきましょう。

$$\eta(g^i) = 2 \cos \frac{2i\pi}{n} = \zeta^i + \zeta^{-i} \text{ for all } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

こいつは実数ですが、二つ目の様を書いておくと次の計算が楽になります。

1次元表現の指標 $\chi^{(m)}$ との内積を計算してみましょう。

$$\begin{aligned}
 (\chi^{(m)}|\eta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi^{(m)}(g^i) \overline{\eta(g^i)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{mi} (\zeta^i + \zeta^{-i}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\zeta^{(m+1)i} + \zeta^{(m-1)i})
 \end{aligned}$$

ここまでは上とほぼ同じですが、最終的には n に関する場合分けが必要になりますね。ついでに η の自分自身との内積も書いておきます。

$n = 2$ の場合：

$$(\chi^{(m)}|\eta) = \begin{cases} 2 & (m \text{ 奇数}), \\ 0 & (m \text{ 偶数}). \end{cases} \quad (\eta|\eta) = 4.$$

$n \geq 3$ の場合：

$$(\chi^{(m)}|\eta) = \begin{cases} 1 & (m+1 \in n\mathbb{Z} \text{ or } m-1 \in n\mathbb{Z}), \\ 0 & (\text{other cases}). \end{cases} \quad (\eta|\eta) = 2.$$

前回の結果を用いて有限群の表現を調べていきます。

14.8 既約表現の同型類の個数は有限個

「有限群 G の既約表現は何個あるか？」という問題提起を上でしました。しかし、答えは簡単で、無限個です。というのも、例えば、1次元ベクトル空間だって無限個あるからです。例を挙げると2次元数ベクトル空間 \mathbb{C}^2 の1次元部分空間を考えてみてください。無限個ありますよね。1次元ベクトル空間が無限個あるのだから、そこに自明表現を考えてやると、 G の既約表現が無限個得られますよね。

これは、個数の勘定の仕方がそもそも問題であって、等しくない表現を別々として勘定すると自明表現でさえ無限に出てきてしまうのです。表現論的に意味のある表現の勘定の方法は、同型なものを一つに数える、というものです。

同型なものをひとまとめにした集合を同型類と呼びます。

なので、意味のある問いは何かというと「有限群の既約表現の同型類は何個あるか？」というものです。

14.8.1 既約表現の同型類

以下、この講義では有限群 G の同型類の完全代表系を固定します。

定義 14.20. 有限群 G の既約表現の同型類の完全代表系を一つ決めて、それを $\text{Irr } G$ とあらわします。

つまり、 $\text{Irr } G$ は次の条件を満たす集合です：

(1) 要素 $W \in \text{Irr } G$ は G の既約表現。

(2) $\text{Irr } G$ の相異なる要素は非同型。

つまり、 $W_1, W_2 \in \text{Irr } G$ が $W_1 \neq W_2$ ならば、 $W_1 \not\cong W_2$ である。

(3) 任意の G の既約表現 V はある $\text{Irr } G$ の要素 $W \in \text{Irr } G$ と同型である。

補題 14.21. 集合 $\text{Irr } G$ の要素 W に指標 χ^W を対応させる写像

$$X : \text{Irr } G \rightarrow \mathcal{H}, W \mapsto \chi^W$$

は単射である。

Proof. 要素 $W_1, W_2 \in \text{Irr } G$ が $\chi^{W_1} = \chi^{W_2}$ を満たしたと仮定する。すると $(\chi^{W_1} | \chi^{W_2}) = (\chi^{W_1} | \chi^{W_1}) = 1$ である。よって、 $W_1 \cong W_2$ である。 $\text{Irr } G$ の性質 (2) より $W_1 = W_2$ である。□

14.8.2

命題 14.22. 既約表現の同型類の個数は G の位数以下である。つまり、次の不等式がなりたつ。

$$|\text{Irr } G| \leq |G|.$$

直交系を構成するベクトルの個数は計量ベクトル空間の次元以下であったことを思い出しておきます。

Proof. 定理 14.17 より既約表現の既約表現の指標は計量ベクトル空間 \mathcal{H} の直交系をなす。よって、補題 14.21 より、望みの不等式が導出される。□

14.9 重複度

14.9.1

目出度く既約表現の同型類が有限個しかないことを証明できました。
そこでさらに記号を設定しておきます。

定義 14.23. $\text{Irr } G$ の要素の個数を h とおき、要素を W_1, W_2, \dots, W_h と書くことにします。さらに、次元を $d_i := \dim W_i$ とおき、対応する指標を $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_h$ と書くことにします。

$$\begin{aligned}\text{Irr } G &= \{W_1, W_2, \dots, W_h\}, \\ d_i &:= \dim W_i, \\ \chi_i &:= \chi^{W_i} \text{ for } i = 1, 2, \dots, h.\end{aligned}$$

後で要素の個数 h は G の共役類の個数と等しいことを示します。

14.9.2 重複度

定理 14.24. V を G 表現、 χ をその指標とする。 $m_i := (\chi | \chi_i)$ とおけば、次の同型が存在する。

$$V \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \dots \oplus W_h^{m_h}.$$

Proof. G 表現は既約表現の直和であることを定理 12.6 で示しました。

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

ところが、各直和成分 V_j は $\text{Irr } G$ の要素のどれかと同型なので、 V は $\text{Irr } G$ の要素の直和と同型であることが分かります。

$$V \cong W_1^{m'_1} \oplus W_2^{m'_2} \oplus \dots \oplus W_h^{m'_h} = \bigoplus_{i=1}^h W_i^{m'_i}.$$

ここで m'_i は W_i と同型な V_j の個数を表します：

$$m'_i = |\{j = 1, 2, \dots, k \mid V_j \cong W_i\}|.$$

シューアの補題（定理 11.14）と指標の内積公式から以下のようにして $m'_i = m_i$ が示されます：

$$\begin{aligned}m_i &= (\chi | \chi_i) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, V) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}\left(W_i, \bigoplus_{j=1}^h W_j^{m'_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^h m'_j \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_j) \\ &= m'_i\end{aligned}$$

□

定義 14.25 (重複度). 定理 14.24 の m_i を表現 V における既約表現 W_i の重複度と呼びます。

14.10 同型の判定

ベクトル空間が同型か否かは次元で判定されました。同様に、指標をもちいれば同型か否かが判定できます。

定理 14.26. 二つの表現 V, U が同型であるための必要十分条件は等しい指標を持つことである。

$$V \cong U \iff \chi^V = \chi^U.$$

Proof. 必要条件であることは明らかなので、十分条件であることを示しましょう。

二つの表現 V, U の指標が一致しているとします。すると、もちろん既約指標との内積である重複度も一致しますね： $m_i = (\chi^V | \chi_i) = (\chi^U | \chi_i)$ 。

なので、定理 14.24 の直和分解を介して、二つの表現 V, U は同型とわかるのです：

$$V \cong W_1^{m_1} \oplus W_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus W_h^{m_h} \cong U.$$

□

14.11 既約性の判定

命題 14.27. 表現 V に対して次の等式がなりたつ：

$$(\chi^V | \chi^V) = \sum_{i=1}^h m_i^2$$

Proof. 直和分解 $V \cong \bigoplus_i^h W_i^{\oplus m_i}$ を考えると、指標と直和の関係から、以下の等式が導出できますね：

$$\chi = \sum_{i=1}^h m_i \chi_i.$$

あとは $(\chi_i | \chi_j) = \delta_{ij}$ を用いて内積を展開すれば望みの等式が得られます。

□

定理 14.28. 表現 V が既約である為の必要十分条件は $(\chi^V | \chi^V) = 1$ である。

必修問題 14.29. 定理 14.28 を証明しよう。

十分性は命題 14.27 から従いますね。必要性はまた別の定理ですね。

14.12 正則表現の既約分解

定理 14.30. 正則表現 CG に対する既約表現 W_i の重複度 $(\chi^r | \chi_i)$ は W_i の次元 d_i と一致する：

$$(\chi^r | \chi_i) = d_i$$

よって、 CG は次の既約分解をもつ：

$$(14-38) \quad CG \cong \bigoplus_{i=1}^h W_i^{\dim W_i}.$$

Proof. 正則表現 CG の指標 χ^r は次でした :

$$\chi^r(g) = \begin{cases} |G| & g = e, \\ 0 & g \neq e. \end{cases}$$

よって内積を計算して結果を得ます :

$$(\chi^r | \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum \chi^r(g) \overline{\chi_i(g)} = \chi_i(e) = \dim W_i.$$

□

次の系は既約表現を探すのに役立ちます。

系 14.31. (1) $\sum_{i=1}^h d_i^2 = |G|$.

(2) $\sum_{i=1}^h d_i \chi_i(g) = 0$ for $g \neq e$.

Proof. 直和分解 (14-38) から指標の等式 $\chi^r = \sum_{i=1}^h d_i \chi_i$ が得られます。

こいつの e での値を見ることで (1) が得られます。(2) は $g \neq e$ における値を求めることで得られます :

$$0 = \chi^r(g) = \sum_{i=1}^h (r | \chi_i) \chi_i(g) = \sum_i d_i \chi_i(g).$$

□

15 巡回群の既約表現を完全分類

命題 14.21 を使うことで巡回群の既約表現が完全に求まりますね。

節 10.2.2 の記号を引き継ぎます。

命題 14.18 から、 n 次巡回群の既約表現 $\rho^{(m)}$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$) は非同型です。よって、これで n 個の既約表現が見つかっているのですが、命題 14.21 から n 次巡回群の既約表現の同型類はこれで尽くされるとわかります。

16 既約表現の個数を決定する

既約表現の個数を勘定するには、既約指標の個数を勘定すればいいのでした。既約指標は直交系をなしていて、とくに一次独立なので、既約指標の生成するベクトル空間の次元を計算すれば、それが求める値です。

この節では類関数というものを導入します。類関数は関数空間 \mathcal{H} の部分空間 \mathcal{C} をなし、その次元は G の共役類の個数と一致することが定義から従います。一方で、実は指標の生成する部分空間が \mathcal{C} と等しいことが示されます。よって、上のことと合わせると、既約表現の個数が G の共役類の個数と一致することがわかります。

16.1 類関数

類関数という重要な概念を導入します。

定義 16.1 (類関数). (1) 写像 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ が類関数とは、以下の等式をみたされることをいう：

$$(16-39) \quad f(gh) = f(hg) \text{ for all } g, h \in G$$

(2) 関数空間 \mathcal{H} のなかで類関数のなす部分空間を \mathcal{C} であらわす：

$$\mathcal{C} := \{f \in \mathcal{H} \mid f(gh) = f(hg) \text{ for all } g, h \in G\}$$

必修問題 16.2. (1) 条件式 (16-39) は次と同値であることを示せ：

$$(16-40) \quad f(hgh^{-1}) = f(g) \text{ for all } g, h \in G$$

(2) 定義 16.1(2) で定義された部分集合 $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ は部分空間であることを示せ。

16.1.1 共役類

群 G の自分自身への随伴作用 $\text{ad} : G \curvearrowright G$, $\text{ad}_g(h) := ghg^{-1}$ による、 $h \in G$ の軌道を h の共役類とよびました。 h の共役類を $C(h)$ であらわすことにしましょう。

$$C(h) := \{ghg^{-1} \mid g \in G\}.$$

G の共役類の個数とは、商空間 $G/\text{ad}G$ の要素の個数のことです。

必修問題 16.2(1) より、関数 $f \in \mathcal{H}$ が類関数であるための必要十分条件は各共役類の上で一定の値をとること、とわかりますね。そのことから、次の命題がなりたちます。

命題 16.3. 類関数の空間 \mathcal{C} の次元は G の共役類の個数と等しい。

16.1.2 指標は類関数

もう一つ、大事な命題が次です。

補題 16.4. 指標は類関数である。

必修問題 16.5. 補題 16.4 はある命題から直ちに従います。その命題の番号を答えよう。

補題 16.4 から既約指標の集合 $\{\chi_i \mid i = 1, 2, \dots, h\}$ は類関数の空間 \mathcal{C} の部分集合です。これは一次独立な部分集合なので、特に次が分かります。

系 16.6.

$$h \leq \dim \mathcal{C}.$$

証明したいのは上の等号成立です。あるいは、既約指標が \mathcal{C} を生成している、ことと断言していいでしょう。そのためにはもう少し準備が必要です。

16.2 準備：関数 $f \in \mathcal{H}$ を表現に作用させる。

天下り的ですが、次のものを導入します。来歴はのちに紹介します。

定義 16.7. 表現 G と $f \in \mathcal{H}$ にたいして $\rho_f^V \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を次で定義する：

$$\rho_f := \rho_f^V := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}(g) \rho_g.$$

簡単にわかることですが、直和分解してる表現 $V = V_1 \oplus V_2$ にたいしては

$$\rho_f^V = \begin{pmatrix} \rho_f^{V_1} & 0 \\ 0 & \rho_f^{V_2} \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。よって、特に $\rho_f^V = 0 \Leftrightarrow \rho_f^{V_1} = 0, \rho_f^{V_2} = 0$ が成り立ちます。

補題 16.8. 要素 $f \in \mathcal{H}$ にたいして次の条件は同値である：

- (1) $f = 0$.
- (2) 任意の表現 V にたいして $\rho_f^V = 0$.
- (3) 任意の $W_i \in \text{Irr } G$ にたいして $\rho_f^{W_i} = 0$.
- (4) $\rho_f^{\mathbb{C}G} = 0$.

Proof. (1) \Rightarrow (2) は明らか。

(2) \Rightarrow (3) も条件を弱くしてるだけなので明らか。

(3) \Rightarrow (4) は正則表現 $\mathbb{C}G$ は既約表現 W_i の直和であることと、補題の前の観察から従う。(注意：同様に (3) \Rightarrow (2) も示せる。)

(4) \Rightarrow (1)。

(つぶやき：思い出しておく、要素 $g \in G$ に対応する $\mathbb{C}G$ の基底のメンバーを e_g と書いたのだった。なので、不本意ながら、単位元 $e \in G$ に対応する基底のメンバーは e_e と書かれる。こいつの $\rho_f^{\mathbb{C}G}$ による像を計算すればよい。)

$\rho_f^{\mathbb{C}G} = 0$ なので、以下の等式が得られる。

$$0 = \rho_f^{\mathbb{C}G}(e_e) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}(g) e_g$$

$\{e_g | g \in G\}$ は一次独立なので、 $f(g) = 0$ が任意の $g \in G$ にたいして成り立つことが分かる。 \square

16.2.1 類関数の特徴づけ

類関数というののも表現に落とした時の性質で特徴づけられます。

補題 16.9. 要素 $f \in \mathcal{H}$ にたいしてつぎは同値である：

- (1) f は類関数である。
- (2) 任意の表現 V にたいして ρ_f^V は G 準同型である。

(3) 任意の $W_i \in \text{Irr } G$ にたいして $\rho_f^{W_i}$ は G 準同型である。

(4) ρ_f^{CG} は G 準同型である。

Proof. 証明のアイデアは定理 16.8 と同じです。

まず、要素 $g \in G$ に対する次の等式を確認しましょう：

$$\begin{aligned}\rho_f \rho_g &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \bar{f}(h) \rho_h \rho_g = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \bar{f}(hg^{-1}) \rho_h \\ \rho_g \rho_f &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \bar{f}(h) \rho_g \rho_h = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \bar{f}(g^{-1}h) \rho_h.\end{aligned}$$

この等式から、 f が類関数であれば $\rho_g^V \rho_f^V = \rho_f^V \rho_g^V$ が任意の $g \in G$ と V にたいして成り立つことがわかります。これにて (1) \Rightarrow (2) が示されました。

(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) は定理 16.8 のときと同様です。

(4) \Rightarrow (1). 要素 $g \in G$ に対して、等式 $\rho_g^V \rho_f^V(e_e) = \rho_f^V \rho_g^V(e_e)$ を基底 $\{e_g \mid g \in G\}$ で展開して係数を比較することで、 $f(hg^{-1}) = f(g^{-1}h)$ for all $h \in G$ を得る。よって、 f は類関数である。 \square

16.2.2

補題 16.10. 要素 $f \in \mathcal{H}$ と表現 V にたいして次がなりたつ：

$$\text{Tr}(\rho_f^V) = (\chi^V | f).$$

Proof. 直接計算で示せます：

$$\text{Tr}(\rho_f^V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}(g) \text{Tr}(\rho_g^V) = \sum_{g \in G} \chi_i(g) \bar{f}(g) = (f | \bar{\chi}_i)$$

\square

補題 16.11. 類関数 $f \in \mathcal{C}$ と既約表現 W_i にたいして次がなりたつ：

$$\rho_f^{W_i} = \frac{(\chi_i | f)}{d_i} \text{id}_{W_i}.$$

Proof. シューアの補題と定理 16.9 より $\rho_f^{W_i}$ は定数倍写像である。つまり、ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\rho_f^{W_i} = \lambda \text{id}_{W_i}$ を満たす。

この式の右辺のトレースをとる：

$$\text{Tr}(\lambda \text{id}_{W_i}) = d_i \lambda.$$

よって、

$$\lambda = \frac{\text{Tr}(\lambda \text{id}_{W_i})}{d_i} = \frac{\text{Tr}(\rho_f^{W_i})}{d_i} = \frac{(\chi_i | f)}{d_i}.$$

である。ただし、最後の等号では補題 16.10 を用いた。 \square

16.3 個数勘定

定理 16.12. 既約指標 $\{\chi_1, \dots, \chi_h\}$ は類関数の空間 \mathcal{C} の正規直交基底である。

Proof. 既約指標 $\{\chi_1, \dots, \chi_h\}$ が \mathcal{C} の正規直交系であることを示しているので、生成系であることを示せばよい。そのためには、次の命題がなりたつこと示せばよい：

「 $f \in \mathcal{C}$ が任意の $i = 1, 2, \dots, h$ にたいして $(\chi_i | f) = 0$ をみたせば $f = 0$ がなりたつ。」(*)

$f \in \mathcal{C}$ が任意の $i = 1, 2, \dots, h$ にたいして $(\chi_i | f) = 0$ をみたすと仮定する。補題 16.11 より $\rho_f^{W_i} = 0$ が任意の $i = 1, 2, \dots, h$ にたいしてなりたつ。よって、補題 16.8 より $f = 0$ が結論される。□

今までのことをまとめると、目標としていた定理が得られます。

定理 16.13 (既約表現の個数 = 共役類の個数). 有限群 G の既約表現の同型類の個数 h は G の共役類の個数と一致する。さらに、それは類関数の空間の次元とも一致する。

$$h = \dim \mathcal{C} = G \text{ の共役類の個数}$$

17 表現 V の既約分解 1/2

有限群 G の表現 V が既約表現の直和に分解されることが分かっています。それはあくまでも存在することが判っているだけでした。

この節と節 19 で見っていくのは、表現 V が具体的に与えられている場合に、実際に直和分解を構成する方法です。

17.1 状況設定と問題提起

V を G 表現とします。これは既約な部分表現の直和なのでした。その直和分解を

$$(17-41) \quad V = \bigoplus_{j=1}^t U_j$$

としましょう。

上に現れている U_j は既約としているので、それぞれある $W_i \in \text{Irr } G$ と同型です。

各 $W_i \in \text{Irr } G$, $i = 1, 2, \dots, h$ と同型なものをまとめたものを V_i とおきます。

$$(17-42) \quad \begin{aligned} M_i &:= \{j = 1, 2, \dots, t \mid U_j \cong W_i\} \\ V_i &:= \bigoplus_{j \in M_i} U_j. \end{aligned}$$

すると、直和分解 (17-41) は次のようになります：

$$(17-43) \quad V = \bigoplus_{i=1}^h V_i.$$

直和因子 V_i は W_i の直和であり、直和の個数が V における W_i の重複度 m_i なのでした：

$$(17-44) \quad V_i = \bigoplus_{j \in M_i} U_j \cong W_i^{m_i}$$

重複度 m_i というのは、つまり、 U_j 中にある W_i と同型なものの個数です：

$$m_i = |M_i|.$$

こういう風に言うと、その値が直和分解 (17-41) に依らないのかも疑問おもうところです。しかし、我々は既に等式 $m_i = \dim \text{Hom}_G(W_i, V)$ を知っています。この表示から、重複度 m_i は直和分解の仕方 (17-41) に依らないとわかります。

この節では、先ず、部分表現 $V_i \subset V$ の一意性と構成方法を与えます。

一方、部分表現 U_j の選び方には任意性があります。つまり、直和分解 (17-44) には一意性はないのです。けれども、構成をあたえることはできて、それが節 19 の話題です。

17.2 V_i の一意性と構成

節 17.1 の設定の下で話しをすすめます。

記号の設定 $d_i = \dim W_i$ を思い出しておきます。

定理 17.1. V の自己線形写像 $e_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を以下で定める：

$$e_i := d_i \rho_{\chi_i}^V \text{ for } i = 1, 2, \dots, h.$$

このとき次が成り立つ：

1. $\text{id}_V = e_1 + \dots + e_h$
2. $e_i e_i = e_i$
3. $e_i e_j = 0$ for $i \neq j$
4. e_i の像は V_i である。

この定理から、直和分解 (17-43) は自己線形写像の集合 $\{e_i \mid i = 1, 2, \dots, h\}$ に命題 7.1 を適用して得られるものである、とわかります。線形写像 e_i は直和分解 (17-41)(17-43) とは無関係に構成されたものなので、これにて、直和分解 (17-43) は表現 V のみから一意的に定まることが分かりました。

自己線形写像 e_i が計算可能であることは後に具体例で確かめます。

さあ、証明していきましょう。といっても、実は、次の補題さえ示せばあとは簡単です。

補題 17.2. 次が成り立つ：

$$d_i \rho_{\chi_i}^{W_j} = \delta_{ij} \text{id}_{W_j}.$$

Proof. 定理 14.17 より $(\chi_i | \chi_j) = \delta_{ij}$ である。これと補題 16.11 を用いれば望みの式が得られる。□

定理 17.1 の証明. 補題 17.2 より、次がなりたつ、

$$d_i \rho_{\chi_i}^{V_j} = \delta_{ij} \text{id}_{V_i}.$$

よって、直和分解 (17-43) にそって $e_i = d_i \rho_{\chi_i}^V$ の行列表示をすると、第 (i, i) 成分にだけ id_{V_i} があり、それ以外は 0 の入った行列が得られる：

$$d_1 \rho_{\chi_1}^V = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 \rho_{\chi_2}^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{id}_{V_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad d_n \rho_{\chi_n}^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{id}_{V_n} \end{pmatrix}.$$

この表示から定理の主張は明らかに成り立つ。 □

18 例：有限巡回群（伏線回収）

初回に二次巡回群の表現にたいして施した構成というのは、実は、前節 17 の構成です。

この節では二次巡回群よりもさらに一般に有限巡回群の場合に具体的に見ていきましょう。

18.1 既約表現と既約指標

$N \geq 1$ を自然数とする。 C_N を g を生成元とする N 次巡回群とする。

$$C_N = \{e, g, g^2, \dots, g^{N-1}\}.$$

1 次元表現 $\rho^{(i)}$ は次のように構成されました：

$\zeta := \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}$ とおく。

整数 $k \in \mathbb{Z}$ にたいして C_N の 1 次元表現 $\rho^{(i)}$ を次で定める：

$$\rho^{(i)}(g^k)(a) := \zeta^{ik} a \text{ for } i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ and all } a \in \mathbb{C}.$$

既約表現はすべて一次元で、上のもので尽くされ、同型類の完全代表系 $\text{Irr } G$ としては次が取れました：

$$\text{Irr } G = \{\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(N-1)}\}.$$

表現 $\rho^{(i)}$ は 1 次元表現なので指標 $\chi^{(i)}$ は次であたえられました：

$$\chi^{(i)}(g^k) := \zeta^{ik} \text{ for } i = 0, 1, \dots, N-1.$$

万全を期して、既約表現の次元 $d_i = \dim W_i$ も与えておきます：

$$d_i = \dim \rho^{(i)} = 1 \text{ for all } i = 0, 1, \dots, N-1.$$

18.2 表現の既約分解

C_N の n 次元表現をあたえることは n 次正方行列 A で $A^N = E_n$ を満たすものを与えることと同値です。この様な行列にたいしてさだまる C_N の表現を ρ^A とあらわすことにします。詳しくは、

$$\rho^A(g^k) := A^k \text{ for } k = 0, 1, \dots, N-1$$

ですね。

この表現にたいして $\rho_{\chi^{(i)}}^A$ を計算してみましょう。

$$(18-45) \quad \rho_{\chi^{(i)}}^A = \frac{d_i}{|C_N|} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\chi^{(i)}(g^k)} \rho^A(g^k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{-ik} A^k$$

18.2.1 $N = 2$ の場合

$N = 2$ の場合だと、既約表現は $\rho^{(0)}, \rho^{(1)}$ の二個だけです。それぞれにたいして (18-45) を書いてみます：

$$\rho_{\chi^0}^A = \frac{1}{2}(E + A), \quad \rho_{\chi^{(1)}}^A = \frac{1}{2}(E - A).$$

これは初回の等式 (2-6) の B, C と同じですね。そして補題 2.8 で示された B, C の等式というのは、定理 17.1 で得られた $e_i, i = 1, 2, \dots, h$ の等式そのものです。(伏線回収完了)

18.2.2 $N = 3$ の場合をやってみよう。

必修問題 18.1. 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。

- (1) $A^3 = E_3$ を満たすことを確かめよう。
- (2) $\rho_{\chi^{(0)}}^A, \rho_{\chi^{(1)}}^A, \rho_{\chi^{(2)}}^A$ を計算しよう。
- (3) $\rho_{\chi^{(0)}}^A, \rho_{\chi^{(1)}}^A, \rho_{\chi^{(2)}}^A$ を \mathbb{C}^3 の自己線形写像とみたときの像の基底を求めよう。
- (4) A を対角化しよう。

19 表現 V の既約分解 2/2

この節は節 17 の続きです。

19.1 準備

この節では節 17.1 の状況設定をいったん離れて、線形代数の準備をします。

V を n 次元ベクトル空間、 W を d 次元ベクトル空間とします。

W の基底 $\{w_1, w_2, \dots, w_d\}$ を選んでおきます。これはつまり同型 $W \cong \mathbb{C}^d$ を選ぶということですね。

命題 8.9 より、次の同型写像が得られます：

$$(19-46) \quad \phi : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^d, V) \cong V^d, \quad f \mapsto (f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_d)).$$

同じ命題から右辺の自己線形写像の集合の記述も得られますね：

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(V^d) \cong \bigoplus_{a,b} \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong M_d(\text{End } V),$$

ここで M_d は d 次正方行列のベクトル空間をあらわします。つまり、最右辺は $\text{End}_{\mathbb{C}} V$ の要素を成分とする d 次正方行列です (節 8.4.2 を参考にしてください)。

一方、このベクトル空間は (19-46) の左辺のベクトル空間の自己線形写像の集合とももちろん同型です。つまり、次のような同型ができますね：

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(V^d) \cong \bigoplus_{a,b} \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong M_d(\text{End } V).$$

これの左から右に行くやつを Φ とおきます：

$$(19-47) \quad \Phi : \text{End}(\text{Hom}(W, V)) \xrightarrow{\cong} M_d(\text{End } V)$$

具体的な表示が必要になります。

$\{w_a\}$ の双対基底 $\{f_a\} \subset W^*$ を使います。また、同型 $V \otimes W^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ でもってこの二者を同一視します。

次が成り立ちます：

補題 19.1. α を $\text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V))$ の要素とする。任意の $a, b = 1, 2, \dots, d$ にたいして次がなりたつ：

$$\Phi(\alpha)_{ab}(v) = \alpha(v \otimes f_b)(w_a).$$

主張を説明します。

- α は $\text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V))$ の要素、つまり線形写像

$$(19-48) \quad \alpha : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$$

です。

- こいつの Φ による像 $\Phi(\alpha)$ の記述をあたえるのが上の補題 19.1 です。

より正確には、像 $\Phi(\alpha) \in M_d(\text{End}_{\mathbb{C}}(V))$ の第 (a, b) 成分 $\Phi(\alpha)_{ab}$ の記述が与えられています。

- 第 (a, b) 成分 $\Phi(\alpha)_{ab}$ は $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の要素、つまり、線形写像

$$\Phi(\alpha)_{ab} : V \rightarrow V$$

です。なので、こいつを決定するには、 V の要素 $v \in V$ の像 $\Phi(\alpha)_{ab}(v)$ を指定してやればいいですね。

補題 19.1 が与えているのは、各 $v \in V$ にたいする像 $\Phi(\alpha)_{ab}(v)$ の決め方です。

- $v \otimes f_b \in V \otimes W^*$ をここでは $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ の要素とみなしています。

なので $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ の自己線形写像 α を $v \otimes f_b$ に施すことが出来て、その像 $\alpha(v \otimes f_b)$ もまた $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ の要素です。

- $\alpha(v \otimes f_b)$ が $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ の要素ということは、線形写像

$$\alpha(v \otimes f_b) : W \rightarrow V$$

ということなので、こいつを $w_a \in W$ に施すことが出来ますね。その像 $\alpha(v \otimes f_b)(w_a)$ が補題 19.1 の右辺に現れているやつです。

- まとめると、補題 19.1 の主張するところは、

$\alpha \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V))$ の Φ による像 $\Phi(\alpha) \in M_d(\text{End}_{\mathbb{C}} V)$ というのは、その第 (a, b) 成分 $\Phi(\alpha)_{ab}(v)$ がで与えられるものであるということです。

補題 19.1 の証明. 番号 (19-46) の同型写像 ϕ をつかうと $\Phi(\alpha)$ はつぎで与えられます：

$$\Phi(\alpha) = \phi \alpha \phi^{-1} : V^d \xrightarrow{\phi^{-1}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V) \xrightarrow{\phi} V^d.$$

第 (a, b) 成分を表示するには、 $a = 1, 2, \dots, d$ にたいして定まる標準的な全射と単射 $P_a : V^d \rightarrow V$, $I_a : V \rightarrow V^d$ を用いるのでした。(つまり、 P_a は第 a 成分を取り出す写像であり、 I_a は第 a 成分に V の要素を入れる写像です。)

$$(19-49) \quad \Phi(\alpha)_{ab} = P_a \Phi(\alpha) I_b = P_a \phi \alpha \phi^{-1} I_b.$$

右辺の両端の組は計算できます。

定義から $v \in V$ にたいして $(\phi^{-1} I_b)(v) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ というのは

$$[\phi^{-1} I_b(v)](w_c) = \delta_{cb} v \text{ for } c = 1, 2, \dots, d$$

で定まる線形写像とわかります。双対基底をつかって表すと

$$\phi^{-1} I_b(v) = v \otimes f_b$$

ということです。

一方、 $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ にたいして

$$P_a \phi(f) = f(v_a)$$

です。

この二つの計算と (19-49) とを合わせると望みの等式が得られます。

$$(19-50) \quad \Phi(\alpha)_{ab}(v) = (P_a \phi) \alpha (\phi^{-1} I_b(v)) = P_a \phi(\alpha(v \otimes f_b)) = \alpha(v \otimes f_b)(w_a)$$

□

19.1.1 $V = W$ の場合

$V = W$ の場合を考えます。

要素 $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\text{End}_{\mathbb{C}}(W))$ を

$$T : \text{End}_{\mathbb{C}}(W) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W), \quad T(f) := \text{Tr}(f) \text{id}_W$$

で定義します。こいつを Φ で送ったときに像を後で用います。

E_{ab} によって $\text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ の行列単位を表す。同型 $W \cong \mathbb{C}^d$ のもとで通常の行列単位に対応する線形写像のことです。なので、基底の取り方に依存しています。数ベクトルを持ち出さずに定義する方法は次です：

$$E_{ab}(w_c) := \delta_{bc} w_a$$

(線形写像 $W \rightarrow W$ を決めるのだから基底の行き先だけ指定すればいいのです。上の定義がいつているのは、今、状況設定として a, b が指定されていますが、それは基底のメンバー w_b をメンバー w_a に送る、という指示のためにあって、それ以外の基底のメンバー w_c , $c \neq b$ はゼロに送るという線形写像である、ということです。)

すると、次がなりたちます：

補題 19.2.

$$\Phi(T)_{ab} = E_{ab}$$

Proof. 証明は直接計算すればできます：

$$\Phi(T)_{ab}(w_c) = T(e_c \otimes f_b)w_a = \delta_{bc}w_a$$

□

19.2 $V_i \cong W_i^{m_i}$ について

節 17.1 の状況設定に戻ります。

直和分解 $V_i \cong W_i^{m_i}$ を構成するのが目標です。これには一意性は望めません。というのは、一番簡単な場合、自明な群 $\{e\}$ の線形表現、つまり、普通のベクトル空間の場合で考えてみるとよくわかります。考えるべき直和分解はベクトル空間 V の数ベクトル空間への同型 $V \cong \mathbb{C}^m$ なのですが、これの選び方っていくらでもありますよね。

一意性がないということは、裏を返せば、直和分解 $V_i \cong W_i^{m_i}$ の構成には表現 V 以外にもデータが必要ということです。

19.2.1 やることとその舞台裏

- まず、これ以降この節 19.2 では $i = 1, 2, \dots, h$ を一つ固定します。
すぐ後で導入する p_{ab}^V はこの固定した i にも依存しますが、記号が複雑になるので書きません。
- 既約表現 W_i の基底 $\{w_1, w_2, \dots, w_{d_i}\}$ を選んでおきます。
- 直和分解 $V_i \cong W_i^{m_i}$ を構成するというのは、 V_i の部分表現 X_1, X_2, \dots, X_{m_i} で和空間 $X_1 + X_2 + \dots + X_{m_i}$ が (内) 直和であり、各 X_p , $p = 1, 2, \dots, m_i$ が W_i に同型なものを見つけることです。
同型 $X_p \cong W_i$ による基底 $\{w_1, \dots, w_{d_i}\}$ の像 $\{x_{p1}, \dots, x_{pd_i}\}$ は X_p の基底ですね。
- X_p そのものを作用 ρ^V をぐちゃぐちゃ弄って取り出せばいいのですが、それはできません。(僕にはできません。)(できたら教えてください。)
- 作用 ρ^V から取り出せるのは、 a を止めて p を動かして得られる集合 $\{x_{pa} \mid p = 1, 2, \dots, m_i\}$ の張る部分空間なのです。それを Y_a とおきましょう。

$$Y_a := \langle x_{pa} \mid p = 1, 2, \dots, m_i \rangle$$

こいつは G 安定ではありません。

気分でいうと直和分解 $V_i \cong W_i^{m_i}$ を直和してるのとは垂直な方向でぶった切ったものです。

- ポイントは、この Y_a ならば作用 ρ^V を弄って取り出すことが出来る、ということです。
あとできちんと述べますが、作用 ρ^V と基底 $\{w_1, \dots, w_{d_i}\}$ から、自己線形写像

$$p_{ab}^V : V \rightarrow V$$

が $a, b = 1, 2, \dots, d_i$ にたいして定義されて、 p_{aa}^V が V から Y_a への射影子になります。

- ここまでは説明のために先に X_1, X_2, \dots, X_{m_i} を出して、次に Y_1, Y_2, \dots, Y_{d_i} を導入しました。しかし、上で言ったように、自己線形写像 p_{ab}^V は直和分解 $V_i \cong W^{m_i}$ に依存せずに定義され、従って、 Y_1, \dots, Y_{d_i} もそうです。

X_1, \dots, X_{m_i} を経由することなく Y_1, \dots, Y_{d_i} は得られるのです。

- (しきりなおして、 X_1, \dots, X_{m_i} は知らないことにして、) 部分空間 Y_1, \dots, Y_{d_i} から部分表現 X_1, \dots, X_{m_i} を取り出すにはどうすればいいのでしょうか？
- それにはどれか $a = 1, 2, \dots, d_i$ を一つ決めて、 Y_a の基底 $\{y_{1a}, y_{2a}, \dots, y_{m_i a}\}$ を選ばばいいのです。ここでは、 $a = 1$ を選ぶことにしましょう。基底の構成要素 y_{p1} の G 軌道 $\{gy_{p1} \mid g \in G\}$ の張るベクトル空間を X_p と置いてやりましょう：

$$X_p := \langle gy_{p1} \mid g \in G \rangle.$$

そうすると、じつはこいつが V_i の直和分解 $V_i \cong W_i^{m_i}$ を与えるものであるとわかります。

19.2.2 射影子 p_{ab}^U

既約表現 W_i の基底 $\{w_1, w_2, \dots, w_{d_i}\}$ を選びます。作用 $\rho_g^{W_i}$ のこの基底に関する表現行列を $(r_{ab}(g))_{a,b}$ とおきます。つまり、 $r_{ab}(g)$ は次を満たすスカラーですね。

$$\rho_g^{W_i}(w_b) = \sum_{a=1}^{d_i} r_{ab}(g)w_a.$$

表現というのは群準同型 $\rho^{W_i} : G \rightarrow \text{GL}(W_i)$ のことでした。上で選んだ基底により同型 $\text{GL}(W_i) \cong \text{GL}_{d_i}(\mathbb{C})$ ができます、 $\rho^{W_i}(g)$ からこの同型で得られる行列が $(r_{ab}(g))$ なのです。

群の要素の積は行列の積に移りますが、それを成分で表示するとつぎの様になります。

補題 19.3. 任意の $g, h \in G$ にたいして次がなりたつ：

$$r_{ab}(gh) = \sum_{c=1}^{d_i} r_{ac}(g)r_{cb}(h)$$

天下りの的ですが、次の作用素を定義します：

定義 19.4. 表現¹⁰ U にたいして

$$p_{ab}^U := \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} r_{ba}(g^{-1})\rho_g^U \in \text{End}(V)$$

と定義します。

次が成り立ちます。

¹⁰この U は任意の表現を表します。普段なら V と書いていますが、今は状況設定により V という記号は固定されているので、 U を用いて表しています。

補題 19.5.

$$\rho_g^U p_{ab} = \sum_{c=1}^{d_i} r_{ca}(g) p_{cb}$$

Proof. 補題 19.3 をつかって計算します :

$$\begin{aligned} \rho_g^U p_{ab} &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{h \in G} r_{ba}(h^{-1}) \rho_g^U \rho_h^U \\ &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} r_{ba}(k^{-1}g) \rho_k^U \\ &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} \left(\sum_{c=1}^{d_i} r_{bc}(k^{-1}) r_{ca}(g) \right) \rho_k^U \\ &= \sum_{c=1}^{d_i} r_{ca}(g) \left(\frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} r_{bc}(k^{-1}) \rho_k^U \right) \\ &= \sum_{c=1}^{d_i} r_{ca}(g) p_{cb}^U \end{aligned}$$

□

この p_{ab}^U を成分とする行列を P^U とおきます。

$$P^U := (p_{ab}^U) \in M_{d_i}(\text{End}_{\mathbb{C}}(U))$$

こいつの出どころは次の補題から知ることができます :

Hom 表現 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, U)$ のレイノルズ作用素 π^{Hom} は $\text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, U))$ の要素です。こいつの (19-47) の同型 Φ による像 $\Phi(\pi^{\text{Hom}})$ の d_i 倍が P^U なのです。

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}(W_i, U)) \ni d_i \pi^{\text{Hom}} \xrightarrow{\Phi} P^U = (p_{ab}^U)_{a,b} \in M_{d_i}(\text{End } U)$$

補題 19.6.

$$\Phi(d_i \pi^{\text{Hom}}) = P^U$$

Proof. 計算すればできます。

$$\begin{aligned} \Phi(d_i \pi^{\text{Hom}})_{ab}(v) &= d_i \pi^{\text{Hom}}(v \otimes f_b)(w_a) \\ &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g^U(v) (f_b \circ \rho_{g^{-1}}^W(w_a)) \\ &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g^U(v) r_{ba}(g^{-1}) \\ &= p_{ab}^U(v) \end{aligned}$$

□

19.2.3 $U = V_j$ の場合

この考察を $U = V_j$ の場合に適用します。 $j \neq i$ にたいして $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, V_j)$ のレイノルズ作用素 π^{Hom} は 0 でした。なので、

系 19.7. $j \neq i$ にたいして $p_{ab}^{V_j} = 0$ が任意の $a, b = 1, 2, \dots, d_i$ にたいして成り立つ。

19.2.4 $U = W_i$ の場合

例によって直和分解によって $U = W_i$ の場合に還元されるので、 $p_{ab}^{W_i}$ がどんなものなのかを調べましょう。補題 19.6 によって、それは Hom 表現 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i)$ のレイノルズ作用素 π^{Hom} を調べることに帰着されます。

節 19.1.1 の要素 $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\text{End}_{\mathbb{C}}(W))$ を思い出しておきます：

$$T : \text{End}_{\mathbb{C}}(W) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W), \quad T(f) := \text{Tr}(f) \text{id}_W$$

補題 19.8. (1) Hom 表現 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i)$ のレイノルズ作用素 π^{Hom} は $\frac{1}{d_i}T$ に等しい。

(2) $p_{ab}^{W_i}$ は行列単位 E_{ab} である。

Proof. (1) $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i)$ にたいして $\pi^{\text{Hom}}(f)$ は G 準同型であった。よってシューアの補題より、ある複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\pi^{\text{Hom}}(f) = \lambda \text{id}_{W_i}$ を満たす。右辺のトレースは λd_i であることは初等的である。左辺のトレースを展開して計算することで $\lambda d_i = \text{Tr}(f)$ をえる：

$$\begin{aligned} \lambda d_i &= \text{Tr}(\lambda \text{id}_{W_i}) = \text{Tr}(\pi^{\text{Hom}}(f)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\rho_g f \rho_{g^{-1}}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(f) \\ &= \text{Tr}(f) \end{aligned}$$

ゆえに $\pi^{\text{Hom}}(f) = \frac{\text{Tr}(f)}{d_i}$ がわかった。

(2) は補題 19.2 と補題 19.6 と (1) から従う。 □

19.2.5 ゴール

定理 19.9. 節 17.1 の状況設定でさらに $i = 1, 2, \dots, h$ を固定する。さらに、 $p_{ab} = p_{ab}^V$ と略記する。次がなりたつ。

(1) $p_{ab} p_{a'b'} = \delta_{ba'} p_{ab'}$

(2) $p_{aa} p_{aa} = p_{aa}$.

(3) $\sum_{a=1}^{d_i} p_{aa} = e_i$.

(4) $Y_a := \text{Im } p_{aa}$ とおく。 $\dim Y_a = m_i$ であり、 $V_i = \bigoplus_{a=1}^{d_i} Y_a$ が成り立つ。

(5) p_{ab} は Y_b から Y_a への線形同型写像である。

(6) Y_1 の基底 $\{y_{11}, y_{21}, \dots, y_{m_1 1}\}$ を選ぶ。

すると、 $\{p_{a1}(y_{11}), p_{a1}(y_{21}), \dots, p_{a1}(y_{m_1 1})\}$ は Y_a の基底である。

(7) 部分空間 X_p を以下で定めると、これは W_i と同型な V の部分表現であり $V_i = \bigoplus_{p=1}^{m_i} X_p$ がなりたつ。

$$X_p := \langle p_{a1}(y_{p1}) \mid a = 1, 2, \dots, d_i \rangle$$

Proof. (1) は行列単位の性質 $E_{ab}E_{a'b'} = \delta_{ba'}E_{ab'}$ から従う。

(2) は (1) の特別な場合。

(3) は行列単位の性質 $\sum_{a=1}^{d_i} E_{aa} = \text{id}_{W_i}$ と系 19.7 から従う。

(4) 直和分解は (3) から従う。

次元の計算は節 19.2.1 の議論を用いるとわかる。(もしくは (5) をもちいてもいいかも。)

(5) これも行列単位の性質 $E_{ab} : \mathbb{C}w_b \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}w_a$ からわかる。

(6) は (5) より明らか。

(7) は補題 19.5 から、 X_p は G 安定であり、線形写像

$$X_p \rightarrow W_i, p_{a1}(y_{p1}) \mapsto w_a$$

は G 同型写像とわかる。

直和分解は作り方から明らか。 □

ここまでは一つの有限群 G の表現論を扱ってきました。これからは複数の群の間に関係がある場合に、表現がどのように関係するかを調べます。

20 例：3次対称群 S_3

3次対称群 $G = S_3$ を考えます。次のように要素の名前をつけます：

$$e, \sigma_1 = (2, 3), \sigma_2 = (1, 3), \sigma_3 = (1, 2), \tau_1 = (1, 2, 3), \tau_2 = (1, 3, 2)$$

乗法表も、いらないかもしれないけれど、載せておきます。

	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ_1	τ_2
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ_1	τ_2
σ_1	σ_1	e	τ_1	τ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	τ_2	e	τ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	τ_1	τ_2	e	σ_1	σ_2
τ_1	τ_1	σ_3	σ_1	σ_2	τ_2	e
τ_2	τ_2	σ_2	σ_3	σ_1	e	τ_1

共役類は以下の三つです：

$$C(e) = \{e\}, C(\sigma_1) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, C(\tau_1) = \{\tau_1, \tau_2\}.$$

なので、定理 16.13 より既約表現も三つあることになります。

20.0.1 既約表現を探そう

自明表現はどんな群にも付随する 1次元 (従って既約) 表現です。

対称群特有の 1次元表現として符号表現があります。つまり、符号数を対応させる準同型 $\text{sgn} : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を使って

$$\rho_\sigma^{\text{sgn}}(a) = \text{sgn}(\sigma)a \text{ for all } a \in \mathbb{C}$$

と定義される表現です。

これで既約表現が二つ見つかりました。3 - 2 = 1 なので、あと一つだけ既約表現があるはずですね。実は節 14.1.3 の 2次元表現 H は既約です (下の必修問題 20.1)。

これで既約表現がすべて見つかりました：

$$\text{Irr } S_3 = \{\rho^{\text{triv}}, \rho^{\text{sgn}}, \rho^H\}.$$

指標表を与えておきましょう。類関数 (共役類の上で同じ値をとる) なので、共役類とそれ上の値の対応を書いておけばいいですね。

	$C(e)$	$C(\sigma_1)$	$C(\tau_1)$
χ^{triv}	1	1	1
χ^{sgn}	1	-1	1
χ^H	2	0	-1

必修問題 20.1. 定理 14.28 を用いて H の既約性を確かめよう。

コメント：指標の内積 ($\chi^H | \chi^H$) を計算するだけで既約性がわかる、というのは素晴らしいことですね。例 10.24 で苦労したのとは大違いですね。

20.0.2 e_i

適当に表現 V を考えて、そのうえで定理 17.1 の e_i を具体的に書いてみましょう。 H だけは 2次元表現なことに注意しましょう。

$$(20-51) \quad \begin{aligned} e_{\text{triv}} &= \frac{1}{6} \sum_{g \in G} g \\ e_{\text{sgn}} &= \frac{1}{6} (1 + \tau_1 + \tau_2 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \\ e_H &= \frac{1}{3} (2 - \tau_1 - \tau_2) \end{aligned}$$

(面倒なので ρ_σ^V を σ と書いています。すべて $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ のなかの要素です。)

例 20.2 (自然表現 \mathbb{C}^3). 節 14.1.3 の自然表現を考えます。上の計算 (20-51) を適用すると次のようになります：

$$\begin{aligned} e_{\text{triv}}^{\mathbb{C}^3} &= \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ e_H^{\mathbb{C}^3} &= \frac{1}{3} \left(2E_3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この計算結果から定理 17.1 を検証することはできますね。また、 $\text{Im } e_H^{\mathbb{C}^3} = H$, $\text{Im } e_{\text{triv}}^{\mathbb{C}^3} = \ell$ も明らかですね。

必修問題 20.3. $e_{\text{sgn}}^{\mathbb{C}^3}$ を求めよう。

20.0.3 p_{ab} for H

さて、いよいよ定義 19.4 の p_{ab} の計算です。どこかで注意したように p_{ab} は既約表現をなにか指定したうえで意味を持つものでした。ここでは既約表現 H に対するものを計算します。

(これ以外の S_3 の既約表現の次元は 1 なので、計算してもしょうがないのです。)

p_{ab} を計算するためには、まず、 H の基底を決めて、そして作用 ρ_σ^H を行列表示する必要がありました。

振り返ると、

$$H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

だったので、基底としては、

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

をとります。すると表現行列は

$$R(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R(\sigma_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(\tau_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

適当に表現 V を考えてそのうえでの p_{ab} を求めましょう：

p_{12} の計算だけはキチンと書いてみます：

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{\dim H}{|S_3|} \sum_{\sigma \in S_3} r_{21}(\sigma^{-1})\sigma \\ &= \frac{2}{6} (r_{21}(e)e + r_{21}(\sigma_1)\sigma_1 + r_{21}(\sigma_2)\sigma_2 + r_{21}(\sigma_3)\sigma_3 + r_{21}(\tau_2)\tau_1 + r_{21}(\tau_1)\tau_2) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_1 + \tau_2) \end{aligned}$$

残りも同様に計算して、結果は以下です：

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{3}(1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \tau_2) = \frac{1}{3}(1 - \sigma_3)(1 + \sigma_2), \\ p_{12} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{3}(1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)(1 + \sigma_3) \\ p_{21} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_3 + \tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{3}(1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_3)(1 + \sigma_2) \\ p_{22} &= \frac{1}{3}(1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \tau_1) = \frac{1}{3}(1 - \sigma_2)(1 + \sigma_3) \end{aligned} \tag{20-52}$$

これを用いて定理 19.9 を検証することはできますね。つまり、下のような等式を具体的な計算で確認することができます。

$$\begin{aligned} e_H &= p_{11} + p_{22}, \quad p_{11}p_{11} = p_{11}, \quad p_{22}p_{22} = p_{22}, \\ p_{11}p_{22} &= 0, \quad p_{22}p_{11} = 0, \quad p_{12}p_{12} = 0, \quad p_{21}p_{21} = 0, \\ p_{21}p_{11} &= p_{21}, \quad \text{etc} \end{aligned} \tag{20-53}$$

また補題 19.5 の検証も出来ますね :

$$\begin{aligned}\sigma_1 p_{11} &= p_{21}, \sigma_1 p_{21} = p_{11} \\ \sigma_2 p_{11} &= p_{11} - p_{21}, \sigma_2 p_{21} = -p_{21} \\ \sigma_3 p_{11} &= -p_{11}, \sigma_3 p_{21} = -p_{11} + p_{21}, \text{ etc}\end{aligned}$$

これによって要素 $v \in V$ が $p_{11}(v) \neq 0$ を満たすのであれば、部分空間 $\langle p_{11}(v), p_{21}(v) \rangle$ は G 安定であり以下の線形写像が H との G 同型をあたえることが判ります :

$$\langle p_{11}(v), p_{21}(v) \rangle \rightarrow H, p_{11}(v) \mapsto \vec{w}_1, p_{21}(v) \mapsto \vec{w}_2.$$

20.1 正則表現 $\mathbb{C}S_3$ の既約分解

正則表現 $\mathbb{C}S_3$ の既約分解を調べましょう。定理 14.30 から重複度はわかっていて、抽象的には、既約分解は

$$\mathbb{C}S_3 \cong \mathbb{C}_{\text{triv}} \oplus \mathbb{C}_{\text{sgn}} \oplus H^2$$

であたえられます。

いまから見ていくのは、 $\mathbb{C}S_3$ の部分空間として、これらの既約表現を構成する方法です。

20.1.1 正則表現の要素の表記法を変更

そういえば、群 G の要素 $g \in G$ に対応して正則表現の下部空間 $\mathbb{C}G$ の要素を e_g とあらわしていましたが、これは混乱を招くので止めます。

ここでは、 $g \in G$ に対応する $\mathbb{C}G$ の要素を $[g]$ であらわすことにします。正則表現というのは

$$(20-54) \quad h[g] = [hg]$$

という風に書き表すことができますね。

20.1.2 記号法をもう少し。

3 次対称群の正則表現 $\mathbb{C}S_3$ に戻ります。

作用の線形和、例えば (20-52) の p_{11} を単位元 $e \in S_3$ に対応する要素 $[e] \in \mathbb{C}S_3$ に作用させたものを $[p_{11}]$ であらわすことにします :

$$[p_{11}] := p_{11}[e] = \frac{1}{3}([e] + [\sigma_2] - [\sigma_3] - [\tau_2])$$

これが結局、最右辺の要素を表すことはいの正則表現に関する注意 (20-54) から判ります。

例えば作用の等式 $p_{11}e_{\text{triv}} = 0$ から $p_{11}[e_{\text{triv}}] = 0$ が導かれます :

$$(20-55) \quad p_{11}[e_{\text{triv}}] = p_{11}e_{\text{triv}}[e] = 0[e] = 0.$$

20.1.3 既約分解

さて既約分解を考えましょう。

命題 20.4. (1) $\text{Im } e_{\text{triv}} = \langle [e_{\text{triv}}] \rangle \cong \mathbb{C}_{\text{triv}}$.

(2) $\text{Im } e_{\text{sgn}} = \langle [e_{\text{sgn}}] \rangle \cong \mathbb{C}_{\text{sgn}}$.

(3) $\text{Im } e_H = \langle [p_{11}], [p_{12}], [p_{21}], [p_{22}] \rangle$

(4) $\text{Im } p_{11} = \langle [p_{11}], [p_{12}] \rangle$, $\text{Im } p_{22} = \langle [p_{21}], [p_{22}] \rangle$.

(節 19 の記号だと、上のはそれぞれ Y_1, Y_2 です。)

(5) $\langle [p_{11}], [p_{21}] \rangle \cong H$, $\langle [p_{12}], [p_{22}] \rangle \cong H$.

(節 19 の記号だと、上のはそれぞれ X_1, X_2 です。)

(正則表現だと $m_i = d_i$ となるので X_p と Y_a は同じ個数出てきています。)

うへの命題から具体的に既約分解が構成され、これが目的のものでした：

$$\begin{aligned} \mathbb{C}S_3 &= \langle [e_{\text{triv}}] \rangle \oplus \langle [e_{\text{sgn}}] \rangle \oplus \langle [p_{11}], [p_{21}] \rangle \oplus \langle [p_{12}], [p_{22}] \rangle \\ &\cong \mathbb{C}_{\text{triv}} \oplus \mathbb{C}_{\text{sgn}} \oplus H \oplus H. \end{aligned}$$

つぎの補題から始めましょう。

補題 20.5. 要素 $[e_{\text{triv}}], [e_{\text{sgn}}], [p_{11}], [p_{12}], [p_{21}], [p_{22}]$ は $\mathbb{C}S_3$ の基底である。

Proof. $\dim \mathbb{C}S_3 = 6$ なので、一次独立性を示せばよい。

スカラー a, b, c_{ab} にたいして等式

$$a[e_{\text{triv}}] + b[e_{\text{sgn}}] + c_{11}[p_{11}] + c_{12}[p_{12}] + c_{21}[p_{21}] + c_{22}[p_{22}] = 0.$$

が成立したとする。

この等式に p_{11} を作用させると、等式 (20-55) やそれと類似の等式から

$$(20-56) \quad c_{11}[p_{11}] + c_{12}[p_{12}] = 0$$

を得る。あとは、例えば、具体的に要素を展開して $c_{11} = 0, c_{12} = 0$ を得る。

(注意：ベクトル空間 $\mathbb{C}S_3$ への S_3 の右作用を考えると、同様にして例えば $c_{12}[p_{12}] = 0$ が取り出せます。)(さらに注意：もっと言えば、群環というものを考えれば、この辺の議論はもっと見通しが良くなります。)

同様にして、その他のスカラーも 0 と示せる。 □

命題 20.4 の証明. (1) $[e_{\text{triv}}] = e_{\text{triv}}[e]$ という定義から、こいつは像 $\text{Im } e_{\text{triv}}$ に属していることが判る。さらに $\text{Im } e_{\text{triv}} \cong \mathbb{C}_{\text{triv}}$ なので、特に 1 次元なので、 $\text{Im } e_{\text{triv}}$ は $[e_{\text{triv}}]$ で生成されることが判る。

(2), (3) も同様。

(4) の最初の等式は $[p_{11}] = p_{11}[p_{11}]$, $[p_{12}] = p_{11}[p_{12}]$ と次元の勘定から従う。二つ目も同様。

(5) は定理 19.2.1 を適用すればよい。(あるいは前節 20.0.3 の最後の方の考察をみれば、直接検証できる。) □

21 直積群の表現

手始めに二つの群 G_1, G_2 から群を構成する最もお手軽な方法である直積群 $G = G_1 \times G_2$ を扱います。

もともになる群 G_1, G_2 の表現から $G = G_1 \times G_2$ の表現論が決定できることをみます。

以降この節では群 G_1, G_2 の直積群を $G = G_1 \times G_2$ とおきます。

定義 21.1 (表現のテンソル積). G_1 の表現 (V_1, ρ^{V_1}) と G_2 の表現 (V_2, ρ^{V_2}) から直積群 $G = G_1 \times G_2$ の表現 $(V_1 \otimes V_2, \rho^{V_1 \otimes V_2})$ を以下で定義する:

$$(\rho^{V_1 \otimes V_2})(g_1, g_2) = \rho^{V_1}(g_1) \otimes \rho^{V_2}(g_2) \text{ for all } (g_1, g_2) \in G.$$

注意 21.2. 一つの群 G の二つの表現のテンソル積と同じ記号を用いますが、文脈上混乱は起こらないでしょう。

指標は簡単に計算できます。

補題 21.3 (テンソル積表現の指標). テンソル積表現 $\rho^{V_1 \otimes V_2}$ の指標 $\chi^{V_1 \otimes V_2}$ は以下で計算できる:

$$\chi^{V_1 \otimes V_2}(g_1, g_2) = \chi^{V_1}(g_1)\chi^{V_2}(g_2) \text{ for all } (g_1, g_2) \in G.$$

ここで χ^{V_1}, χ^{V_2} は V_1, V_2 の指標です。

21.1 関数空間 $\mathcal{H}_{G_1 \times G_2}$ 、類関数の空間 $\mathcal{C}_{G_1 \times G_2}$

関数空間 $\mathcal{H}_G = \text{Map}(G, \mathbb{C})$ は関数空間 \mathcal{H}_{G_1} と \mathcal{H}_{G_2} のテンソル積空間と自然に同型です:

対応関係は $\phi_1 \in \mathcal{H}_{G_1}, \phi_2 \in \mathcal{H}_{G_2}$ にたいして \mathcal{H}_G の要素 $\phi_1 \otimes \phi_2$ を以下で定義することで得られます:

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(g_1, g_2) := \phi_1(g_1)\phi_2(g_2) \text{ for all } (g_1, g_2) \in G.$$

ϕ_1, ϕ_2 がそれぞれ G_1, G_2 の類関数であるとき $\phi_1 \otimes \phi_2$ が G の類関数であることは簡単にわかります。

よって、同型 $T: \mathcal{H}_{G_1} \otimes \mathcal{H}_{G_2} \cong \mathcal{H}_G$ は類関数の空間に制限することができて、単射な線形写像 $T|_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}_{G_1} \otimes \mathcal{C}_{G_2} \rightarrow \mathcal{C}_G$ を得ます。

補題 21.4. 線形写像 $T|_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}_{G_1} \otimes \mathcal{C}_{G_2} \rightarrow \mathcal{C}_G$ は同型写像である。

Proof. 定義域と値域の次元が一致することを言えばよい。

共役類の等式

$$C(g_1, g_2) = C(g_1) \times C(g_2) \subset G_1 \times G_2 = G$$

に注意すると、 $G = G_1 \times G_2$ の共役類の集合と G_1, G_2 のそれぞれの直積との間に自然な全単射が存在する

$$\{C(g_1, g_2) \mid (g_1, g_2) \in G\} \cong \{C(g_1) \mid g_1 \in G_1\} \times \{C(g_2) \mid g_2 \in G_2\}.$$

よって、特に両辺の要素の個数は等しい。

左辺の要素の個数は $T|_{\mathcal{C}}$ の値域の次元であり、右辺の要素の個数は $T|_{\mathcal{C}}$ の定義域の次元であるので、証明が完了する。 \square

補題 21.3 は指標の関係式

$$\chi^{V_1 \otimes V_2} = \chi^{V_1} \otimes \chi^{V_2}$$

と言い換えられます。

内積の計算も元の群のものに帰着されます：

補題 21.5 (内積公式). 要素 $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{H}_{G_1}$, $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{H}_{G_2}$ にたいして次がなりたつ：

$$(\phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2)_{G_1 \times G_2} = (\phi_1 | \psi_1)_{G_1} (\phi_2 | \psi_2)_{G_2}.$$

21.2 直積群の既約表現

直積群 $G = G_1 \times G_2$ の既約表現はすべて G_1 と G_2 の既約表現のテンソル積として得られます。

定理 21.6. 次が成り立つ：

- (1) G_1 の既約表現 V_1 と G_2 の既約表現 V_2 のテンソル積表現 $V_1 \otimes V_2$ は既約な G 表現である。
- (2) 既約な G 表現 V はある G_1 の既約表現 V_1 とある G_2 の既約表現 V_2 のテンソル積表現 $V_1 \otimes V_2$ と同型である。

Proof. (1) 内積公式 (補題 21.5) を用いて指標を計算すればよい：

$$(\chi^{V_1 \otimes V_2} | \chi^{V_1 \otimes V_2})_G = (\chi^{V_1} | \chi^{V_1})_{G_1} (\chi^{V_2} | \chi^{V_2})_{G_2} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(2) 内積公式より、テンソル積表現として (1) の形で得られる既約表現は互いに非同型であることが判る。補題 21.4 (あるいはその証明) から G の既約表現の同型類の個数の分だけの既約表現が得られたことになるので、主張が従う。 \square

22 有限アーベル群の表現論

有限アーベル群の構造定理というのは、有限アーベル群 G は有限巡回群の直積であることを主張します：

$$G \cong C_{N_1} \times C_{N_2} \times \cdots \times C_{N_r}$$

直積の個数が3つ以上でも、二つの直積と考えて帰納的に前節の結果を適用することができます。なので、有限アーベル群の表現論は有限巡回群の表現論に帰着されます。

有限巡回群の既約表現はすべて1次元でした。また、複数の1次元ベクトル空間のテンソル積は1次元であることに注意すると、定理 21.6 から、有限アーベル群の既約表現はすべて1次元とわかります。

実は、逆も成り立つのですね：

定理 22.1. 有限群 G にたいして次の命題は同値である：

- (1) G はアーベル群である。
- (2) G の任意の既約表現は1次元。

Proof. (1) \Rightarrow (2) は既に示しています。

(2) \Rightarrow (1) を示しましょう。仮定は $d_i = \dim W_i = 1$ が任意の $i = 1, 2, \dots, h$ にたいして成り立つというものでした。なので $|G| = \sum_i^h d_i = h$ が成り立ちます。しかし、 h というのは共役類の個数だったので、このことから任意の $g \in G$ にたいして $|C(g)| = 1$ とわかります。

ここから G がアーベル群であることを結論するのは群論の初歩です。

要素 $g \in G$ にたいして $|C(g)| = 1$ という条件は $C(g) = \{g\}$ つまり、

$$hgh^{-1} = g \text{ for all } h \in G$$

を意味します。この条件は

$$hg = gh \text{ for all } h \in G$$

と読み替えらるので、つまりは g は G の中心に属するという事です。

なので $|C(g)| = 1$ が任意の $g \in G$ にたいして成り立つということは G がアーベル群であることを意味します。 \square

22.1 有限アーベル群の既約表現と指標

有限アーベル群 G の既約表現と指標を与えましょう。

有限アーベル群の構造定理から G はつぎの形としていいです：

$$G = C_{N_1} \times C_{N_2} \times \dots \times C_{N_r}.$$

各 $s = 1, 2, \dots, r$ にたいして C_{N_s} の生成元を g_i とおきます。また、 ζ_s を 1 の原始 N_s 乗根とします。整数の組 (i_1, i_2, \dots, i_r) にたいして G の表現が以下で定義されます：

$$\rho^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} = \rho_{C_1}^{(i_1)} \otimes \rho_{C_2}^{(i_2)} \otimes \dots \otimes \rho_{C_r}^{(i_r)}$$

具体的に作用を書くと以下です：

$$\rho_{(g_1^{k_1}, g_2^{k_2}, \dots, g_r^{k_r})}^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}(a) = \zeta_1^{i_1 k_1} \zeta_2^{i_2 k_2} \dots \zeta_r^{i_r k_r} a$$

このとき、既約表現の同型類の完全代表系として例えば

$$\text{Irr } G = \{ \rho^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} \mid i_s = 0, 1, \dots, N_s - 1, s = 1, 2, \dots, r \}$$

がとれます。

指標も一次元表現なので当たりまえに求まります：

$$\chi^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}(g_1^{k_1}, g_2^{k_2}, \dots, g_r^{k_r}) = \zeta_1^{i_1 k_1} \zeta_2^{i_2 k_2} \dots \zeta_r^{i_r k_r}$$

23 対角表現の既約分解と第二直交関係式

この節の目標は既約指標の第二直交関係式です。直接計算で示すこともできる様ですが、表現を用いた証明を与えることを目指します。

23.1 準備

23.1.1 共役類、中心化群

群 G と要素 $g \in G$ にたいして共役類 $C(g)$ と中心化群 $Z_G(g)$ は次の様に定義されるのでした :

$$C(g) := \{xgx^{-1} \mid x \in G\}, \quad Z_G(g) := \{x \in G \mid gx = xg\}.$$

これらは随伴作用 $\text{ad} : G \curvearrowright G, x \cdot_{\text{ad}} g := xgx^{-1}$ に関する軌道と安定化部分群ですね。なので、次が成り立ちます :

$$(23-57) \quad |G| = |C(g)||Z_G(g)|$$

23.1.2 反対群 G^{op} の表現

群 $G = (G, \cdot)$ の反対群 $G^{\text{op}} = (G, \cdot^{\text{op}})$ とは、 G の下部集合はそのまま、積の順序を逆向きしたものでした :

$$g \cdot^{\text{op}} h := h \cdot g \quad \text{for all } g, h \in G.$$

練習問題 23.1. 写像 $G \rightarrow G^{\text{op}}, g \mapsto g^{-1}$ は群同型写像である。

群 G の表現 $V = (V, \rho)$ にたいして反対群 G^{op} の表現 $V^{\text{op}} = (V, \rho^{\text{op}})$ を次で定義することができます :

$$\rho_g^{\text{op}} := \rho_{g^{-1}}^V \quad \text{for all } g \in G.$$

単に g の逆元を掛けることを反対群の作用と定めるというだけです。なので、指標も簡単に計算できます :

$$(23-58) \quad \chi^{V^{\text{op}}}(g) = \chi^V(g^{-1}) = \bar{\chi}^V(g)$$

練習問題 23.2. 上の構成で反対群の表現が得られることと、等式 (23-58) を確認しよう。

また、練習問題 23.1 の群同型写像を使うと、次節の誘導表現 (定義 24.1) から理解できるので、考えてみよう

23.2 直積 $G \times G^{\text{op}}$ の表現

23.2.1 対角表現

群 G と反対群 G^{op} の直積 $G \times G^{\text{op}}$ を考える。対角作用 $\Delta : G \times G^{\text{op}} \curvearrowright G$ を次で定める :

$$(g, h) \cdot_{\Delta} x := gxh \quad \text{for all } g, h \in G.$$

この作用を $\mathbb{C}G$ に線形に延長したもの (第 10.2.1 節を参照) を対角表現と呼び、同じ記号 Δ であらわす。

指標を計算しましょう。

補題 23.3. 要素 $(g, h) \in G \times G^{\text{op}}$ にたいして次が成り立つ :

$$\chi^{\Delta}(g, h) = \begin{cases} |Z_G(g)| & (h^{-1} \in C(g)) \\ 0 & (h^{-1} \notin C(g)) \end{cases}$$

Proof. そこでまず $(g, h) \in G \times G^{\text{op}}$ を一つとってきましょう。

集合への作用を線形に拡張した表現なので、練習問題 10.5 の公式が使えます。指標の値 $\chi^\Delta(g, h)$ は固定点集合 $F := \{x \in G \mid gxh = x\}$ の要素の個数なのでした。なので、次を示せば証明はおわり
ます：

$$|F| = \begin{cases} |Z_G(g)| & (h^{-1} \in C(g)) \\ 0 & (h^{-1} \notin C(g)). \end{cases}$$

$F \neq \emptyset$ であるための必要十分条件はある $y \in G$ が存在して $gyh = y$ を満たすことです。後者の条件が $h^{-1} \in C(g)$ と同値であることは頑張って確認しましょう。

(残りの問題は $h^{-1} \in C(g)$ のときに $|F| = |Z_G(g)|$ を示すことです。そこで、) $h^{-1} \in C(g)$ と仮定
しましょう。すると、ある $y \in G$ が存在して $h^{-1} = ygy^{-1}$ を満たします。この等式は $h^{-1}y = yg$ と変
形できることに注意しておきます。要素 $x \in F$ にたいして xy は $Z_G(g)$ の要素であることが次の計算
で確認できます：

$$gxy = xh^{-1}y = xyg.$$

このことから、写像 $\phi : F \rightarrow Z_G(g)$, $\phi(x) := xy$ が得られます。

同じように考えると写像 $\psi : Z_G(g) \rightarrow F$, $\psi(z) \rightarrow zy^{-1}$ が得られます。そして、 ϕ, ψ が互いに他の
逆写像であることが簡単に分かるので、 $|F| = |Z_G(g)|$ が従います。 \square

23.2.2 Hom 表現

U, V を G の表現とします。線形写像の空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ に次で $G \times G^{\text{op}}$ の作用を定めます：

$$((g, h) \cdot f)(u) := gf(hu) \quad \text{for all } (g, h) \in G \times G^{\text{op}}, \quad f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V).$$

補題 23.4. 線形同型写像 $\Phi : V \otimes U^* \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ は $G \times G^{\text{op}}$ 表現の同型写像 $\Phi : V \otimes U^{*, \text{op}} \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ を与える。

練習問題 23.5. 上の補題を確かめよう。

23.3 指標公式と対角表現の直既約分解

23.3.1

命題 23.6. G の表現 U, V にたいして次が成り立つ：

$$(\chi^{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)} | \chi^\Delta)_{G \times G^{\text{op}}} = (\chi^V | \chi^U)_G.$$

注意 23.7. 指標の内積公式 (定理 14.16) から、うえの指標公式は次の次元の等式と同値な命題である：

$$\dim \text{Hom}_{G \times G^{\text{op}}}(KG, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)) = \dim \text{Hom}_G(U, V).$$

実は、次元をとる以前に Hom 空間の間に同型写像が存在する。その証明は節 23.5 に先送りして、取
り敢えずは指標の計算により命題 23.6 を証明する。

Proof.

$$\begin{aligned}
(\chi^{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)}|\chi^{\Delta})_{G \times G^{\text{op}}} &= \frac{1}{|G \times G^{\text{op}}|} \sum_{g,h \in G} \chi^{V \otimes U^{*\text{op}}}(g,h) \overline{\chi^{\Delta}}(g,h) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h^{-1} \in C(g)} |Z_G(g)| \chi^V(g) \chi^{U^*}(h^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h^{-1} \in C(g)} |Z_G(g)| \chi^V(g) \chi^{U^*}(g) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} |C(g)| |Z_G(g)| \chi^V(g) \chi^{U^*}(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^V(g) \overline{\chi^U}(g) \\
&= (\chi^V | \chi^U)_G.
\end{aligned}$$

二つ目の等号は補題 23.3 と等式 (23-58) による。三つ目は指標が類関数であることの帰結である。五つ目は等式 (23-57) を用いた。□

23.3.2 対角表現の既約分解

次の補題を使います。

補題 23.8. $\{W_i^{*\text{op}} \mid i = 1, 2, \dots, h\}$ は G^{op} の既約表現の完全代表系である。

注意 23.9. 一般的に、既約表現 W の反傾表現 W^* も既約であり、反対表現 W^{op} も (G^{op} の表現として) 既約です。なので、 $W^{*\text{op}}$ も既約です。

一方、 G^{op} と G は同型なので G^{op} と G の既約表現の個数は一致します。

これら二つのことから上の補題 23.8 は従います。しかし、ここではやっつけ気味の証明を与えます。うえで述べた方針での証明は各自でやってみてください。

Proof. (ポイント：線形空間 $\mathcal{H}_G = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G, \mathbb{C})$ とそのエルミート内積は G の下部集合にだけ依存し、群 G の積を使っていない。よって \mathcal{H}_G と $\mathcal{H}_{G^{\text{op}}}$ はエルミート内積付きのベクトル空間として一致するのである。)

等式 (23-58) より、 $\mathcal{H}_G = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G, \mathbb{C})$ の要素として $\chi^{W_i^{*\text{op}}} = \chi^{W_i}$ である。よって、 $\{\chi^{W_i^{*\text{op}}} \mid i = 1, 2, \dots, h\}$ は $C_{G^{\text{op}}}$ の正規直交系 (正規直交基底であることも以下の議論でわかる) である。定理 14.28 から、 $W_i^{*\text{op}}$ ($i = 1, 2, \dots, h$) は互いに非同型な単純表現である。

練習問題 23.1 より、 G^{op} の共役類の個数は G のそれ h と等しい。よって、 $\{W_i^{*\text{op}} \mid i = 1, 2, \dots, h\}$ は G^{op} により G^{op} の既約表現は尽くされるのである。□

定理 23.10. $G \times G^{\text{op}}$ 表現として次の同型が存在する：

$$KG \cong \bigoplus_{i=1}^h \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, W_i) \cong \bigoplus_{i=1}^h W_i \otimes W_i^{*\text{op}}$$

Proof. 定理 21.6, 補題 23.4, 補題 23.8 より、 $\{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_j, W_i) \mid i, j = 1, 2, \dots, h\}$ は $G \times G^{\text{op}}$ の既約表現の完全代表である。

命題 23.6 と既約指標の直交性より $(\chi^{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(W_j, W_i)}|\chi^{\Delta}) = \delta_{ij}$ である。

よって、重複度の公式 (定理 14.24) より主張を得る。□

23.4 第二直交関係式

命題 23.11. $g, h \in G$ にたいして次がなりたつ :

$$\sum_{i=1}^h \chi_i(g) \overline{\chi_i}(h) = \begin{cases} |Z_G(g)| & (h \in C(g)) \\ 0 & (h \notin C(g)) \end{cases}$$

Proof. 補題 23.3 より、右辺の値は $\chi^\Delta(g, h^{-1})$ である。

定理 23.10 を用いると左辺の値が $\chi^\Delta(g, h^{-1})$ になることが以下の計算で示せる :

$$\chi^\Delta(g, h^{-1}) = \sum_{i=1}^h \chi^{W_i}(g) \chi^{W_i^* \text{op}}(h^{-1}) = \sum_{i=1}^h \chi_i(g) \overline{\chi_i}(h).$$

□

23.5 命題 23.6 の別証明

注意 23.7 で述べたように次の補題を証明すればよい :

補題 23.12. 次のベクトル空間の同型が存在する :

$$\text{Hom}_{G \times G^{\text{op}}}(KG, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)) \cong \text{Hom}_G(U, V).$$

注意 23.13. この公式は \mathbb{C} 代数 A とその上の加群 M, N にたいしてなりたつ次の同型を群代数 $\mathbb{C}G$ に適用したものである :

$$\text{Hom}_{A \otimes_{\mathbb{C}} A^{\text{op}}}(A, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)) \cong \text{Hom}_A(M, N).$$

証明もその一般的な場合に適用できる。

Proof. Hom 空間の間の線形写像

$$\alpha : \text{Hom}_{G \times G^{\text{op}}}(KG, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)) \rightleftarrows \text{Hom}_G(U, V) : \beta$$

を構成し、互いに逆写像であることを示す。

(α の構成) $f \in \text{Hom}_{G \times G^{\text{op}}}(KG, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V))$ をとってきます。つまり f は線形写像 $f : KG \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ で $G \times G^{\text{op}}$ の作用を保つものです。後者の条件は $f((g, h) \cdot_{\Delta} x) = (g, h) \cdot_{\text{Hom}} f$ ですが、こいつを書き下すとつぎですね :

$$(23-59) \quad f(gxh)(u) = g \cdot_V f(x)(h \cdot_U u) \quad \text{for all } (g, h) \in G \times G^{\text{op}}, x \in KG, u \in U.$$

(うへの等式では作用を明らかにするために \cdot_{Δ} とか書いたが以下では省略。)

$\alpha(f) := f(e)$ と定めます。 f による $e \in KG$ の像です。いまのところ、 $\alpha(f)$ は $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ の要素でしかありません。いまから、こいつが $\text{Hom}_G(U, V)$ に属することを確認していきます。記号の複雑さを緩和するために $\phi = \alpha(f)$ とおきましょう。確かめるべきは線形写像 $\phi : U \rightarrow V$ が G の作用を保つこと、つまり、

$$\phi(gu) = g\phi(u) \quad \text{for all } g \in G, u \in U$$

ですね。この式は $\phi(u) = g^{-1}\phi(gu)$ と同値ですね。こいつは (23-59) を用いて以下の計算で示すことができます：

$$\phi(u) = f(e)(u) = f(g^{-1}eg)(u) = g^{-1}f(e)(ge) = g^{-1}\phi(gu).$$

これにて $\alpha(f)$ が $\text{Hom}_G(U, V)$ の要素であることが判りました。目標の写像の片方が完成しました。こいつが線形写像であることの確認はお任せします。

(β の構成) $\phi \in \text{Hom}_G(U, V)$ をとってきます。線形写像 $\beta(\phi) : KG \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ を以下で定義します：

$$\beta(\phi)(x)(u) = \phi(x \cdot_U u) \quad \text{for all } x \in KG, u \in U.$$

$\beta(f)$ が $G \times G^{\text{op}}$ の作用を保つこと、つまり等式 (23-59) が成立することは容易に確認できます。なので、 $\beta(f)$ は $\text{Hom}_{G \times G^{\text{op}}}(KG, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V))$ の要素です。これで目標の写像が両方完成しました。

これらが互いに逆写像を与えることは各自で確かめてください。 □

24 制限表現

群準同型 $\varphi : H \rightarrow G$ があれば、それを通して群 G の表現 V から群 H の表現 V_H を作ることができます。

正確な定義を与えるために、群準同型の合成は群準同型であったことを思い出しておきましょう。

定義 24.1 (制限表現). 群準同型 $\varphi : H \rightarrow G$ が与えられているとする。 G の表現 $V = (V, \rho^V)$ の群準同型 φ による制限 $\text{Res}_H^G V$ とは H の表現 $\text{Res}_H^G V = (V, \rho^V \varphi)$ のことをいう。

(注 : $\rho^V : G \rightarrow \text{GL}(V)$ は群準同型を表していた。 $\rho^V \varphi : H \rightarrow \text{GL}(V)$ は合成写像である。)

24.1 指標の制限

群準同型 $\varphi : H \rightarrow G$ が与えられたとします。関数 $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ との合成を考えると関数 $\phi\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$ が得られます。この合成を場合や気分によって次のようにあらわします：

$$\text{Res}_H^G(\phi) = \phi_H := \phi\varphi.$$

この対応が線形なのは明らかですね。なので、群準同型写像 $\varphi : H \rightarrow G$ は以下の様にして関数空間の間の線形写像を誘導します。

$$\text{Res}_H^G : \mathcal{H}_G \rightarrow \mathcal{H}_H, \phi \mapsto \phi\varphi$$

また、この写像が類関数を類関数に移すことも簡単に確認できるので、写像 Res_H^G は類関数の空間にも線形写像を誘導します：

$$\text{Res}_H^G : \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H, \phi \mapsto \phi\varphi$$

この対応で、制限表現の指標が指標の制限に移ることも簡単に確認できます：つまり、 G の表現 V にたいして次がなりたちます。

$$\chi^{\text{Res}_H^G V} = \text{Res}_H^G(\chi^V)$$

24.1.1 練習問題

練習問題 24.2. (1) 群準同型写像 $\varphi: H \rightarrow G$ が全射ならば、既約な G 表現 V の制限表現 $\text{Res}_H^G V$ は既約な H 表現である。

(2) (1) から、全射という条件を外すと命題は成り立たない。反例を挙げよ。

練習問題 24.3. 線形写像 $\text{Res}_H^G: \mathcal{H}_G \rightarrow \mathcal{H}_H$, $\phi \mapsto \phi\varphi$ の像と核を求めたい：次を示せ。

(1) $\text{Im Res}_H^G = \langle \delta_h \mid h \in \text{Im } \varphi \rangle$

(2) $\text{Ker Res}_H^G = \langle \delta_g \mid g \in G \setminus \text{Im } \varphi \rangle$

25 例：四元数単位のなす群

この節では四元数単位のなす群を考えます。

定義 25.1 (四元数の虚数単位 I, J, K). 以下の4次正方行列を導入します：

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

行列の掛け算を計算することで次がわかります。

命題 25.2 (四元数の虚数単位の計算). (1) $I^2 = -E, J^2 = -E, K^2 = -E$

(2) $IJK = -E.$

(3) $IJ = K, JI = -K,$

$JK = I, KJ = -I,$

$KI = J, IK = -J.$

注意 25.3. 実は (1), (2) から (3) は形式的に導出できます。例えば $IJ = K$ が (1), (2) から従うことは、次のように確認できます：

$$IJ = IJE = -IJ(-E) = -IJK^2 = -(IJK)K = EK = K.$$

$\pm E, \pm I, \pm J, \pm K$ は行列の積で閉じているので4次一般線形群の部分群を生成します。それがこの節での研究対象です。

定義 25.4 (四元数単位のなす群).

$$G := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\} \subset \text{GL}_4(\mathbb{C})$$

共役類は以下の五つです：

$$C(E) = \{E\}, C(-E) = \{-E\}, C(I) = \{\pm I\}, C(J) = \{\pm J\}, C(K) = \{\pm K\}.$$

なので既約表現も5つあります。

正規部分群 $H := \{\pm E\}$ による商群 G/H は2次巡回群の直積 $C_2 \times C_2$ と同型です。

それを見るには次の写像

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow C_2 \times C_2, \\ \pm E &\mapsto (e, e), \pm I \mapsto (g, e), \pm J \mapsto (e, g), \pm K \mapsto (g, g) \end{aligned}$$

が全射群準同型であり、核が H であることを確かめればよいです。

直積群 $C_2 \times C_2$ の4つの既約表現 $\rho^{(0,0)}, \rho^{(1,0)}, \rho^{(0,1)}, \rho^{(1,1)}$ (節22.1の記号を使っています) を φ で G に制限することで、 G の既約表現が4つ得られます。それも同じ記号で $\rho^{(0,0)}, \rho^{(1,0)}, \rho^{(0,1)}, \rho^{(1,1)}$ と書くことにします。(これらの制限表現が既約であることは次元が1ということから従います。あるいは練習問題24.2を使ってもいい。)

残りの1つはどこにあるのでしょうか？

探し方はいろいろあるのかも知れませんが、有名なものなので、パッと与えましょう。

定義 25.5.

$$M_I := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, M_J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_K := \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

必修問題 25.6. (1) 写像

$$\begin{aligned} \rho^P : G &\rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C}), \\ \pm E &\mapsto \pm E_2, \pm I \mapsto \pm M_I, \pm J \mapsto \pm M_J, \pm K \mapsto \pm M_K \end{aligned}$$

が群準同型であり、したがって、 G の2次元表現を与えるものであることを示せ。

(2) (1) の2次元表現 ρ^P の指標 χ^P をもとめよ。

(3) 表現 χ^P が既約であることを示せ。

(4) 定義からえられる単射準同型 $G \subset \text{GL}_4(\mathbb{C})$ から得られる G の4次元表現を自然表現と呼ぶことにする。

自然表現の指標 χ^ν を求めよ。

(5) 自然表現 \mathbb{C}_ν^4 における各既約表現の重複度を求めよ。

(6) 自然表現 \mathbb{C}_ν^4 の既約な部分表現による (内) 直和分解を求めよ。

	E	$-E$	$\pm I$	$\pm J$	$\pm K$
$\chi^{(0,0)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(1,0)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(0,1)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(1,1)}$	1	1	-1	-1	1
χ^P					
χ^ν					

26 誘導表現

節 24 では群準同型 $\varphi: H \rightarrow G$ に沿って G の表現を H の表現に制限することを考えました。この節では逆に H の表現を G の表現に持ち上げることを考えます。持ち上げた表現のことを誘導表現と呼びます。

表現の制限を構成するのはなにも難しくなかったのですが、持ち上げるのは大変です。一般の群準同型 $\varphi: H \rightarrow G$ に沿った H の表現の誘導表現というのもあるのですが、今回は φ が単射の場合に限って話をします。単射群準同型 $\varphi: H \rightarrow G$ があたえられれば、 H とその像を同一視することができるので、実際にこの節で考えるのは H が G の部分群である場合です。

26.1 部分群 $H < G$ による左剰余

誘導表現構成のために部分群 $H < G$ に関する左剰余類に関して復習をします。

定義 26.1. 部分群 $H < G$ を考える。

- (1) 要素 $g \in G$ にたいして部分集合 gH を g の H に関する左剰余類とよぶ。
- (2) 要素 $g \in G$ にたいして部分集合 Hg を g の H に関する右剰余類とよぶ。
- (3) 部分集合 $R \subset G$ が G の H による左剰余類の完全代表系であるとは、次がなりたつことをいう：
任意の $g \in G$ にたいしてある $r \in R$ が一意的に存在して $r \in gH$ をみたく。
- (4) 同様に右剰余類の完全代表系というのも定義する。

次は群論の初歩ですね。

練習問題 26.2. (1) 部分集合 $R \subset G$ が G の H による左剰余類の完全代表系の定義する条件は次と同値である：

任意の $g \in G$ にたいしてある $(r, h) \in R \times H$ が一意的に存在して $g = rh$ をみたく。

- (2) 部分集合 $R \subset G$ が H による左剰余にかんする完全代表系であるとする。次がなりたつ：
 - (i) $r, r' \in R$ が $rH \cap r'H \neq \emptyset$ をみたせば $r = r'$ がなりたつ。
 - (ii) 部分集合 $\{r^{-1} \mid r \in R\} \subset G$ は H の右剰余類に関する完全代表系である。
 - (iii) 非交和分解 $G = \bigsqcup_{r \in R} rH$ がなりたち指数 $(G : H)$ は R の要素の個数と一致する：

$$(G : H) := |G|/|H| = |R|.$$

次の補題を誘導表現の構成で使います。

補題 26.3. 要素 $g \in G$ と H による左剰余にかんする完全代表系 R とを考える。

このとき、全単射

$$s_g : R \rightarrow R$$

が存在して次の性質 (♠) を満たす：

(♠) 任意の $r \in R$ にたいして次がなりたつ：

$s \in R$ が $s^{-1}gr \in H$ を満たすための必要十分条件は $s = s_g(r)$ である。

性質 (♠) には特につぎのことが含まれていることに注意します：

(1) 任意の $r \in R$ にたいして $s_g(r)^{-1}gr \in H$ である。

(2) 任意の $r \in R$ にたいして

$$r^{-1}gr \in H \Leftrightarrow s_g(r) = r.$$

Proof. まず次の主張を証明しましょう。

主張 1. (a) 任意の $r \in R$ にたいしてある $(s_{r,g}, h_{r,g}) \in R \times H$ が一意的に存在して次を満たす $gr = s_{r,g}h_{r,g}$.

(b) もし $r \neq r'$ ならば $s_{r,g} \neq s_{r',g}$ である。

主張の証明. (a) 練習問題 26.2(1) の g を rg に適用すればいい。

(b) $s_{r,g} = s_{r',g}$ とする。すると $rh_{r,g}^{-1} = g^{-1}s_{r,g} = g^{-1}s_{r',g} = r'h_{r',g}^{-1}$ がなりたち、練習問題 26.2(2) より、 $s_{r,g} = s_{r',g}$ をえる。□

主張 (a) より $s_g(r) := s_{r,g}$ とおけば、性質 (♠) を満たします。

主張 (b) より s_g は単射であり、いま R は有限集合なので、全単射とわかります。□

定義 26.4. 全単射 $s_g : R \rightarrow R$ の逆写像を r_g とおきます。

$$r_g := s_g^{-1} : R \rightarrow R$$

26.1.1 全射性に関する注意

注意 26.5. うえの証明では s_g の全射性に R の有限性を用いましたが、それがなくても証明できます。というのは、逆写像も同じように構成できるからです。詳しくは下の主張を見てください。

主張 2. 部分集合 $R \subset G$ が H による左剰余にかんする完全代表系であるとする。

要素 $g \in G$ にたいして次が成り立つ：

任意の $s \in R$ にたいしてある $(r_{s,g}, h_{s,g}) \in R \times H$ が一意的に存在して次を満たす $gr_{s,g} = sh_{s,g}$.

Proof. 練習問題 26.2(2ii) を使うと、上の主張 1(a) と同様にしてでる。□

26.2 誘導表現

誘導表現を定義します。

定義 26.6 (誘導表現). 群 G とその部分群 $H < G$ をとする。 H の表現 $W = (W, \theta)$ から、以下で構成される G の表現 $V = (V, \rho)$ を W の誘導表現とよび、 $\text{Ind}_H^G W$ であらわす：

Step 1. H に関する左剰余類の完全代表系 R をえらぶ。

Step 2. V の下部ベクトル空間は W の $|R|$ 個の直和と定める：

$$V := W^{|R|}.$$

Step 3. $g \in G$ の作用 ρ_g を以下で定める。

$V = W^{|R|}$ の要素を $v = (v_r)_{r \in R}$ とあらわした場合に、 $\rho_g(v)$ の第 $s \in R$ 成分 $\rho_g(v)_s$ を以下で定める：

$$\rho_g(v)_s := \theta_{h_{s,g}}(v_{r_g(s)})$$

ここで r_g は定義 26.4 の全単射であり、 $h_{s,g} := s^{-1}gr_g(s)$ とおいた。

誘導表現 $V = \text{Ind}_H^G W$ への $G \in G$ の作用を直和分解 $V = W^{|R|}$ に沿った行列表示であらわすと、次ですね

$$(26-60) \quad (\rho_g^V)_{s,r} = \begin{cases} \theta_{h_{s,g}}^W & s = s_g(r) \\ 0 & s \neq s_g(r) \end{cases}$$

練習問題 26.7. (1) 上の定義で G の表現が構成されていることを確かめよう。

(2) 誘導表現の同型類は完全代表系 R の取り方に依らないことをしめそう。

26.2.1 誘導表現の構成に関する説明

どうして定義 26.6 の様な構成を思いついたのか不思議ですよ。

ある程度の環論を知っていると、誘導表現というのは群環上の加群のテンソル積であるというのが一番早い理解です。

なんにも説明しないけれど記号だけ書いておくと以下の通りです；

$$\text{Ind}_H^G W := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W.$$

ある程度抽象的だけれど、地に足のついた構成は次です。

完全代表系 R を選んでおきます。そして、 R による直和を考えます。

$$V := \bigoplus_{r \in R} W_r.$$

これは先の定義でも考えたのですが、もう少し色を付けて、形式的な記号として

$$V = \bigoplus_{r \in R} \mathbb{C}[r] \otimes W.$$

とあらわすことにします。

要素のレベルでいうと先の定義で $v = (v_r)_{r \in R}$ と書いていたのを $v = \sum_r [r] \otimes v_r$ と書きあらわすということです。

$$v = \sum_{r \in R} [r] \otimes v_r.$$

このカッコ書きの $[r]$ は節 20.1 で正則表現の要素を表していたのと同じ気持ちで用いています。

そうすると誘導表現というのは、次のように書くことができます：

$$\begin{aligned}
g \left(\sum_{r \in R} [r] \otimes w_r \right) &= \sum_{r \in R} g[r] \otimes w_r \\
&= \sum_{r \in R} [gr] \otimes w_r \\
&= \sum_{r \in R} [s_g(r)h^{r,g}] \otimes w_r \\
&= \sum_{r \in R} [s_g(r)] \otimes h^{r,g}w_r \\
&= \sum_{s \in R} [s] \otimes h_{s,g}w_{r_g(s)}.
\end{aligned}$$

三つ目の等号で $h^{r,g} := s_g(r)^{-1}gr$ とおいた。最後の等号は s_g の全単射性を用いて変数変換 $s = s_g(r)$ を行っている。この変数変換の下で $h^{r,g} = s^{-1}gr = h_{s,g}$ であることに注意しよう。

まあ、なんというか $g \in G$ が v_r に作用するのに、 $[r]$ を乗り越えなければならない、その際にゴタゴタとして、 $[gr] = [s_g(r)h^{r,g}]$ を通じて g の作用が v_r には $h^{r,g}$ の作用として伝わる、 $[r]$ という記号は v_r の直和の中での位置を表しているのだけれども、それも g の作用のごたごたのせいで入れ替わってしまう、といった感じです。

26.3 誘導表現の指標

H の表現 W の指標と誘導表現 $V = \text{Ind}_H^G W$ の指標の関係を与える定理が次です：

定理 26.8. $W = (W, \theta)$ を H の表現、 $V = \text{Ind}_H^G W = (V, \rho)$ を誘導表現とする。それぞれの指標を χ^W, χ^V と書くと次がなりたつ：

$$\chi^V(g) = \sum_{r \in R, r^{-1}gr \in H} \chi^W(r^{-1}gr) = \frac{1}{|H|} \sum_{k \in G, k^{-1}gk \in H} \chi^W(k^{-1}gk)$$

Proof. 指標というのはトレースでした。トレースというのは対角成分のみが関わるので、直和分解 $V = W^{|R|}$ に沿った行列表示を考えると、 ρ_g^V の V 上のトレースは、対角成分 $(\rho_g^V)_{rr}$ の W 上のトレースの和になります。

$$\chi^V(g) = \text{Tr}(\rho_g^V) = \sum_{r \in R} \text{Tr}((\rho_g^V)_{rr})$$

誘導表現への作用の行列表示 (26-60) から右辺はさらに、

$$\sum_{r \in R} \text{Tr}((\rho_g^V)_{rr}) = \sum_{r \in R, r^{-1}gr \in H} \text{Tr}(\theta_{h_{r,g}}) = \sum_{r \in R, r^{-1}gr \in H} \chi^W(r^{-1}gr)$$

と変形できます。これで一つ目の等式は証明できました。

二つ目の等式は $k \in G$ が rH に属しているときには $\chi_\theta(k^{-1}gk) = \chi_\theta(r^{-1}gr)$ が成り立つことから従います。

□

26.4 類関数の誘導

定理 26.8 にインスパイアされて類関数の誘導を次で定義します。

定義 26.9 (類関数の誘導). H 上の類関数 $\alpha \in \mathcal{C}_H$ にたいして G 上の類関数 α^G を次で定める :

$$\alpha^G(g) := \frac{1}{|H|} \sum_{k \in G, k^{-1}gk \in H} \alpha(k^{-1}gk).$$

もちろん、気分によっては

$$\text{Ind}_H^G(\alpha) := \alpha^G$$

という記号を使うこともあり得ます。

この定義の下では定理 26-60 は次のように述べる事が出来ます :

$$\text{Ind}_H^G(\chi^W) = \chi^{\text{Ind}_H^G W}.$$

練習問題 26.10. (1) α^G が類関数であることを示そう。(実は $\alpha \in \mathcal{H}_H$ にたいして上の定義で $\alpha^G \mathcal{H}_G$ を定めれば、これは類関数になる。)

(2) $h \in H$ のデルタ関数 δ_h の誘導は以下であることを示せ :

$$(\delta_h)^G(g) = \frac{|\{k \in G \mid k^{-1}gk = h\}|}{|H|}.$$

26.5 フロベニウス (Frobenius) の相互律

群 G と部分群 $H < G$ とが与えられたときに、それぞれの上の類関数の制限や誘導の内積に以下で示すような関係があり、フロベニウスの相互律¹¹と呼ばれます。

定理 26.11 (フロベニウスの相互律). H 上の類関数 $\alpha \in \mathcal{C}_H$ と G 上の類関数 $\phi \in \mathcal{C}_G$ にたいして次が成り立つ :

$$(\alpha^G | \phi)_G = (\alpha | \phi_H)_H$$

Proof. 頑張って計算して証明します

$$\begin{aligned} (\alpha^G | \phi)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha^G(g) \bar{\phi}(g) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{k \in G, k^{-1}gk \in H} \sum_{g \in G} \alpha(k^{-1}gk) \bar{\phi}(g) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{h \in H} \sum_{k \in G} \alpha(h) \bar{\phi}(khk^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{h \in H} \sum_{k \in G} \alpha(h) \bar{\phi}(h) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \alpha(h) \bar{\phi}(h) \\ &= (\alpha | \phi_H)_H \end{aligned}$$

¹¹相互律というのは聞きなれない言葉かもしれないけれど、登場人物がシーソーの様に相互に関係してる法則をそのように呼んだりします。英語では“Frobenius reciprocity”です。

ただし三つ目の等号では次の全単射をもちいています：

$$\{(k, g) \in G \times G \mid k^{-1}gk \in H\} \xrightarrow{\cong} G \times H, (k, g) \mapsto (k, k^{-1}gk), (k, khk^{-1}) \leftarrow (k, h).$$

四つ目の等号は ϕ が類関数であることを用いています。五つ目の等号では、 k がなくなって $|G|$ 倍が出てくるので \sum の前の $\frac{1}{|G|}$ と相殺しています。□

注意 26.12. U を H の表現、 V を G の表現とします。定理 26.11 の設定で類関数がそれぞれの指標である、つまり、 $\alpha = \chi^U$, $\phi = \chi^V$ と仮定してみます。主張は $((\chi^U)^G | \chi^V)_G = (\chi^U | (\chi^V)_H)_H$ ですね。節 26.2.1 で説明した誘導表現と表現のテンソル積の関係や指標の内積公式¹² (定理 14.16) を使うとこの主張は、以下の次元の等式のことだとわかります：

$$\dim \text{Hom}_G(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U, V) = \dim \text{Hom}_H(U, {}_H V)$$

ただし ${}_H V$ は G 表現 V の H への制限をあらわします。

実は、注意 23.7 と同様に、次元をとる以前に表現の Hom 空間の同型

$$(26-61) \quad \text{Hom}_G(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U, V) \cong \text{Hom}_H(U, {}_H V)$$

が存在します。

この表現の Hom 空間の同型は、より一般的な次の命題の特別な場合です：

A, B を環、 M を左 A 加群、 N を左 B 加群、 X を A - B 両側加群とすると次のアーベル群の同型がある：

$$\text{Hom}_A(X \otimes_B N, M) \cong \text{Hom}_B(N, \text{Hom}_A(X, M)).$$

この同型は \otimes -Hom 随伴同型と呼ばれます。

同型 (26-61) の証明はこの講義の範囲で出来ないことはないですが、省略します。興味のある方は環論加群論ホモロジー代数の教科書をお読みください。

指標の内積公式は、指標の内積という数値が Hom 空間の次元として得られることを主張しています。注意 23.7 やここで説明したことは、指標の内積に関する等式が Hom 空間の同型から次元をとることで得られることを言っています。この様に数値の等式にたいして次元によりその等式を与えるベクトル空間の同型をその等式の圏論化 (categorification) と呼んだりします。圏論化は様々な分野で研究方針として使われています。

27 例： S_3 と部分群 $C \cong C_3$

節 20 の記号を引き継ぎます。

3 次対称群 S_3 の部分群 $C := \langle \tau_1 \rangle = \{1, \tau_1, \tau_2\} \cong C_3$ を考え、この間の誘導表現、制限表現を調べましょう。

C は 3 次巡回群なので既約表現はすべて一次元で三つあります。以前まで $\rho^{(i)}$ とあらわしていたものを θ_i とあらわすことにします。

$$\text{Irr } C = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2\}.$$

制限表現は簡単なものなので、次はお任せします。

¹²の複素共役

補題 27.1. (1) $\text{Res}_C^{S_3} \rho^{\text{triv}} = \theta_0$.

(2) $\text{Res}_C^{S_3} \rho^{\text{sgn}} = \theta_0$.

(3) $\text{Res}_C^{S_3} \rho^H = \theta_1 \oplus \theta_2$.

フロベニウスの相互律を用いると次が計算できます：

$$(\chi_{\theta_k}^{S_3} | \chi_{\rho^{\text{triv}}})_{S_3} = (\chi_{\theta_k} | (\chi_{\rho^{\text{triv}}})_C)_C = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2 \end{cases}$$

$$(\chi_{\theta_k}^{S_3} | \chi_{\rho^{\text{sgn}}})_{S_3} = (\chi_{\theta_k} | (\chi_{\rho^{\text{sgn}}})_C)_C = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2 \end{cases}$$

$$(\chi_{\theta_k}^{S_3} | \chi_{\rho^H})_{S_3} = (\chi_{\theta_k} | (\chi_{\rho^H})_C)_C = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k = 1, 2 \end{cases}$$

定理 14.24 から次の既約表現による直和分解の存在が結論できます：

命題 27.2.

$$\text{Ind}_C^{S_3} \theta_0 \cong \rho^{\text{triv}} \oplus \rho^{\text{sgn}}, \quad \text{Ind}_C^{S_3} \theta_1 \cong \rho^H, \quad \text{Ind}_C^{S_3} \theta_2 \cong \rho^H.$$

27.0.1 直接計算で命題 27.2 を確認しよう。

コクセター生成系を用いるのが便利なので導入しましょう：

$$s_1 = \sigma_3 = (1, 2), s_2 = \sigma_1 = (2, 3).$$

この記号のもとで

$$e = s_1^2 = s_2^2, \quad \tau_1 = s_1 s_2, \quad \tau_2 = s_2 s_1, \quad \sigma_2 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2.$$

がなりたちます。

誘導表現構成に向けて C の左剰余類に関する完全代表系として $R := \{1, s_1\}$ を選びます。

補題 26.3 の写像 s を計算しましょう。例えば

$$\tau_1 s_1 = s_1 s_2 s_1 = s_1 \tau_2$$

なので

$$s_{\tau_1} : e \mapsto e, \quad s_1 \mapsto s_1$$

が判ります。同じく、

$$(27-62) \quad \sigma_2 e = s_1 s_2 s_1 = s_1 \tau_2, \quad \sigma_2 s_1 = s_1 s_2 s_1 s_1 = s_1 s_2 = e \tau_1$$

より、

$$s_{\sigma_2} : e \mapsto s_1, \quad s_1 \mapsto e$$

が判ります。

似たような考察で次に辿り着きます：

補題 27.3. (1) $\sigma \in C$ のとき

$$s_\sigma : e \mapsto e, s_1 \mapsto s_1$$

(2) $\sigma \in S_3 \setminus C$ のとき

$$s_\sigma : e \mapsto s_1, s_1 \mapsto e$$

これを用いて計算しましょう。

$$I_k = \text{Ind}_C^{S_3} \theta_k = [e]\mathbb{C} \oplus [s_1]\mathbb{C}.$$

誘導表現をこの様にベクトル空間としての直和分解しましょう。

慣例にしたがって 1 の原始 3 乗根を ω であらわすことにします。すると例えば (27-62) から

$$\sigma_2[e]1_{\theta_k} = [s_1]\tau_2 1_{\theta_k} = \omega^{2k}[s_1]1_{\theta_k}, \quad \sigma_2[s_1]1_{\theta_k} = [e]\tau_1 1_{\theta_k} = \omega^k[e]1_{\theta_k},$$

が判ります (ここで 1_{θ_k} とかいてるのは C の 1 次元表現 θ_k の基底です)。つまり、次がなりたちます:

$$(\sigma_2[e]1_{\theta_k}, \sigma_2[s_1]1_{\theta_k}) = ([e]1_{\theta_k}, [s_1]1_{\theta_k}) \begin{pmatrix} 0 & \omega^k \\ \omega^{2k} & 0 \end{pmatrix}.$$

これでもって作用が計算できました。つまり、 σ_2 の $I_k = \text{Ind}_C^{S_3} \theta_k$ への作用は次の行列で与えられるのです:

$$\rho_{\sigma_2}^{I_k} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^k \\ \omega^{2k} & 0 \end{pmatrix}.$$

同様に計算してやると、次が得られます:

$$\begin{aligned} \rho_e^{I_k} &= E_2, \quad \rho_{\tau_1}^{I_k} = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix}, \quad \rho_{\tau_2}^{I_k} = \begin{pmatrix} \omega^{2k} & 0 \\ 0 & \omega^k \end{pmatrix}, \\ \rho_{\sigma_1}^{I_k} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{2k} \\ \omega^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\sigma_2}^{I_k} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^k \\ \omega^{2k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\sigma_3}^{I_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

作用が判ってしまうと、射影子 $e_{\text{triv}}, e_{\text{sgn}}, e_H$ を計算することで、 I_k の既約分解もわかります。

例 27.4. $k = 0$ の場合、つまり、 $I_0 := \text{Ind}_C^{S_3} \theta_0$ を考えてみましょう。この場合だと作用を表す行列は、

$$\begin{aligned} 1, \tau_1, \tau_2 &\leftrightarrow E_2, \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となるので、射影子を式 (20-51) を使って計算してやると

$$\begin{aligned} e_{\text{triv}}^{I_0} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ e_{\text{sgn}}^{I_0} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ e_H^{I_0} &= 0 \end{aligned}$$

となります。なので、上で示した通りに、 I_0 という S_3 の表現は自明表現 \mathbb{C}_{triv} と符号表現 \mathbb{C}_{sgn} の直和とわかります。

例 27.5. 同様に $k = 1, 2$ の場合も考えてやりましょう。同じく射影子を計算するのです。すると、

$$e_{\text{triv}}^{I_k} = 0, \quad e_{\text{sgn}}^{I_k} = 0, \quad e_H^{I_k} = E_2.$$

が判るので、よって、上で示した通り、 $k = 1, 2$ にたいしては S_3 の表現 I_k は 2 次元既約表現 H と同型であるとわかりました。

28 二面体群の表現論

例 9.5 で導入した二面体群の表現論を調べましょう。答えは教科書に指定してるセールの本にあるので、難しい場合はそれを横目に見つつ、頑張って講義の集大成として既約表現を構成してください。

練習問題 28.1. N 次二面体群 D_N の既約表現をすべて構成しよう。

(1) D_N は関係式

$$r^N = e, s^2 = e, srs = r^{-1}$$

を満たす二つの要素 $r, s \in D_N$ から生成されていることを示そう。

(2) D_N の共役類の個数を求めよう。

(3) 正規部分群 $C := \langle r \rangle \triangleleft D$ は N 次巡回群 C_N と同型であり、商群 D_N/C は 2 次巡回群 C_2 と同型であることを示せ。

(4) 商準同型 $D_N \rightarrow D_N/C \cong C_2$ により、 C_2 の既約表現を制限することで D_N の既約表現を作ろう。
(これは問題というより記号を書こう的な指示ですね。)

(5) 部分群 $C < D_N$ の既約表現から誘導される D_N の表現を構成し、既約か否か、それらが同型か否かを判断せよ。

(6) N 次二面体群 D_N の既約表現の同型類の完全代表系 $\text{Irr } D_N$ を構成しよう。