目 次

1　線形代数ってなに？

線形代数というのは一次方程式の科学です。そう聞くと簡単そうですよね。
そこで先ず方程式とは何でそれを解くってどういうことかお浚いしましょう。
方程式とは未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$（ホントは無限個かも知れない。また未知「数」とは言っても本当は関数だったりする）の間に成り立つべき式（これもホントは無限個かも知れない）であり、

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

方程式を解くとはこれらの等式を満たす数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を全て求めるという事でした。
方程式は条件式 F_i が全て多項式の場合は代数方程式と呼ばれ、F_i に微分が入っていると微分方程式と呼ばれます。自然科学のみならず経済学や惧らくそれ以外の科学分野において様々な現象が様々な微分方程式によって記述されます。解明したい現象を記述する方程式を見つけるのも一苦労ですが、現象を解明するためにはそれを解かなければなりません。方程式を解く、というのは非常に重要で基本的な科学者の営みなのです。方程式は何時でも解ける訳ではありません、それどころか大概は解けなません。それなので、与えられた方程式の解の性質を方程式から導出する研究も大事になってきます。
線形代数で扱うのは一次方程式でこれは原理的には何時でも解けます。幸せですね。一次式だから簡単なのです。この講義の一つの目標はこの簡単な場合に「方程式を解く」という事を理解し、実際に解かなければいけない複雑な方程式にアタックするための基礎的な理解を身に着ける事です。これは講義前半の目標です。
後半では線形写像（一次写像）と行列式というものも扱います。線形代数は簡単なのですが、別の言い方をすると「基本的」と言い換えられます。一次式というのは基本的なので、数学や諸科学、工学のあらゆるところに線形代数は顔を出します。

1.1　前期の目標の一つ：連立一次方程式と行列の関係

行列とその積を導入する動機の一つを紹介します。
n 個の変数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ に関する m 本の一次方程式を連立させた連立一次方程式を考えましょう（簡単だけれど複雑ですね）：

$$(\spadesuit)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n & = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3j}x_j + \cdots + a_{3n}x_n & = u_3 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n & = u_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n & = u_m \end{cases}$$

この連立一次方程式に対して $m \times n$ 行列 A を $A := (a_{ij})$、n 次列ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} := (x_j)$、m 次列ベクトル $\mathbf{u}$ を $\mathbf{u} := (u_i)$ で定めましょう。
行列の積は次が成り立つように定義されます：なんと上のややこしい連立一次方程式 $(\spadesuit)$ がこの様に簡単に表現でき出来ちゃいます。

$$(\heartsuit)\qquad A\mathbf{x} = \mathbf{u}.$$

これのご利益については順々に解説していきます。

第 I 部
行列

2　行列

いよいよ行列です。

定義 2.1 (行列)**.** m, n を 1 以上の自然数とします。mn 個の実数を縦に n 個、横に m 個並べたものを $n \times m$ 行列（エムエヌギョウレツ）とよびます。

$m \times n$ 行列 A を表示するには添え字を二つ付けて成分 a_{ij} とあらわしてやります。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

一度、自分自身でも書いてみてください。けれど、毎回こんなのを書いてるとしんどいので、簡略化して $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ とか $A = (a_{ij})$ とか表します。

用語

- 左上隅から数えて上から i 個め左から j 個めにある数 a_{ij} を行列の第 (i, j) 成分と呼びます。
  $m \times n$ 行列 A を与えることは各 (i, j) に対して第 i, j 成分を指定することと同値です。
- 上から i 個めの行を第 i 行、左から j 個めの列を第 j 列と呼びます。

4x5 行列 の場合

2020年5月3日 19:41

$$
\begin{array}{cc}
 & \\
 & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\text{第3行} & \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

第(4,2)成分　　第4列

$$
\begin{cases} \text{行ベクトル} = \text{横ベクトル。} \\ \text{列ベクトル} = \text{縦ベクトル。} \end{cases}
$$

覚え方

行 $\xrightarrow{\text{ヨコ}}$

列 $\downarrow$ タテ

2.0.1　ベクトルも行列の仲間

$n \times 1$ 行列を n 次列ベクトル、$1 \times m$ 行列を m 次行ベクトルと呼びます。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_m)$$

つまり、ベクトルは行列の一種です。

この様に考える利点は、行列とベクトルの積を行列と行列の積の特別な場合として定義できることです。

2.0.2　正方行列

$n \times n$ 行列を n 次正方行列と呼びます。

2.1　行列の基本演算

ベクトルと同じように行列も足し算、引き算、スカラー倍ができます。

2.1.1　行列の等号 $A = B$

念のために等号を定義しておきましょう。二つの行列 A, B が等しいとはどういうことか、それを決めておくわけです。

といっても、それは、ごく当たり前に、A と B が同じサイズで、成分がすべて一致している、ということです。

定義 2.2 (行列の等号)**.** $n \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $l \times k$ 行列 $B = (b_{ij})$ が<u>等しい</u>とは次が成り立つことと定める：

(1) $n = l, m = k.$

(2) $a_{ij} = b_{ij}$ for all $i = 1, \cdots, n, \ j = 1, \cdots, m$

二つの行列 A, B が等しいことを $A = B$ とあらわす。

2.1.2　行列の足し算 $A+B$, 引き算 $A-B$

等しいサイズを持つ行列 A, B の足し算 $A \pm B$ を成分ごとの足し算、引き算で定義します。
サイズの異なる行列同志の足し算、引き算は定義されません。

定義 2.3 (行列の足し算、引き算)**.** (1) $n \times m$ 行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ にたいして記号 $A+B$ によって $n \times m$ 行列で任意の $i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$ にたいして第 (i, j) 成分が $a_{ij} + b_{ij}$ であるものをあらわす。

(2) $n \times m$ 行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ にたいして記号 $A-B$ によって $n \times m$ 行列で任意の $i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$ にたいして第 (i, j) 成分が $a_{ij} - b_{ij}$ であるものをあらわす。

2.1.3　行列のスカラー倍 cA

スカラー倍も成分ごとのスカラー倍として定義されます。

定義 2.4 (行列のスカラー倍)**.** $n \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ にたいして、記号 cA によって $n \times m$ 行列で任意の $i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$ にたいして第 (i, j) 成分が ca_{ij} であるものを表す。

2.1.4　ゼロ行列

成分がすべてゼロであるベクトルをゼロベクトルとよびました。同じように、成分がすべてゼロである行列を<u>ゼロ行列</u>と呼びます。
サイズ $n \times m$ のゼロ行列を $\mathbf{O_{n,m}}$ とあらわします。ただし、文脈上サイズが分かる場合がほとんどなので、単に $\mathbf{O}$ と書いたり、さらには普通のゼロ 0 で書いたりします。

2.2　行列の掛け算 AB

ベクトル同士の掛け算といえば内積を思い出すひともいるかもしれませんね。
行列の積はベクトルの内積と関係していますが、その説明は後まわしにします。

定義 2.5 (行列の掛け算)**.** • $n \times m$ 行列 A と $l \times k$ 行列 B の掛け算 AB は $m = l$ の時、その時に限り定義される。

（つぶやき：積が定義されるための大前提です。ただ、この前提は覚えようとしなくても、いったん行列の積の定義が飲み込めれば、おのずと納得できるでしょう。）

• $n \times m$ 行列 $A = (a_{ih})$ と $m \times k$ 行列 $B = (b_{hj})$ の掛け算 AB は

(a) $n \times k$ 行列であり、

(b) その第 (i, j) 成分は次で与えられる

$$\sum_{h=1}^{m} a_{ih} b_{hj}.$$

2.2.1 正方行列の掛け算

二つの n 次正方行列 A, B の掛け算 AB, BA はどちらとも定義されますね。特に A と A との掛け算 AA が定義されます。こいつは A の 2 乗なので、実数の場合と同じように、$A^2 := AA$ と書くことにします。

同様に $A^3 = AAA,\ A^4 = AAAA$ とあらわすことにします。

2.3 単位行列 E_n：数字の 1 の代わりをする行列。

実数 1 の大事な性質は実数 1 を実数 $x \in \mathbb{R}$ 掛けるという操作は x を x のままにするのでした。つまり $1 \times x = x,\ x \times 1 = 1$ が成り立ちました。

同様の性質をもつ行列が存在して、単位行列と呼ばれます。

定義 2.6 (単位行列)**.** n を 1 以上の自然数とする。n 次単位行列 $E_n = (\delta_{ij})$ を n 次正方行列で第 (i, j) 成分 δ_{ij} が以下の式で与えらる行列とする：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

サイズが小さい場合を書いてみましょう。

$$E_1 = (1),\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

一般の場合は

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

対角線のところに 1 が並んでいて、それ以外の成分は 0 です。

こうして定義された単位行列は数字の 1 と同じ性質を持っています。

命題 2.7. $n \times m$ 行列 A にたいして次がなりたつ：

$$E_n A = A,\ AE_m = A.$$

2.4 行列の和差積とスカラー倍

行列には足し算引き算掛け算スカラー倍が定まって、ゼロ行列 0 と単位行列 E_n（数字の 1 の役割を果たすもの）があることを見てきました。

行列にたいするこれらの演算は通常の実数とたいていは同じようにできます。（教科書 p25,26 の計算法則、p29 定理 2.1 をご覧下さい。）

しかし、普通の実数の演算との大きな違いは次の二点です。

(I) $AB = 0$ であっても $A \neq 0,\ B \neq 0$ かもしれない。（ゼロ因子の存在）

(II) AB と BA が一致するとは限らない。（積の非可換性）

例えば（適切なサイズのもとで）

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

が成り立ちます。

しかし、一般には AB と BA とは異なるかもしれないので上の式は $A^2 - B^2$ とは一致しないかも知れないのです。

(III) けれども、もし AB と BA が一致するのであれば、掛け算も通常の実数の掛け算と同様です。

例えば（適切なサイズのもとで）

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

が成り立ちます。

ちょっとした問題を考えてみましょう。

例題 2.8. 次の等式を満たす 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をすべてもとめよ：

$$A^2 - 2A - 3E_2 = 0.$$

(1) A と A との掛け算は可換 $AA = AA$ であり、また A と E_2 の積も可換ですね。

$$AE_2 = E_2A$$

(2) なので、問題の式の左辺はおなじみの因数分解ができます。

$$A^2 - 2A - 3E_2 = (A - 3E_2)(A + E_2).$$

(3) なので、問題は次を満たす 2 次正方行列 A をすべて求めよということになりますね：

$$(A - 3E_2)(A + E_2) = 0. \tag{2-1}$$

(4) 普通の実数の中で考えてるのであれば、等式 (2-1) から $A - 3E_2 = 0$ もしくは $A + E_2 = 0$ でなくてはいけないと、結論できます。

しかし、行列の掛け算の場合は上の注意事項 (I) があるので、そうは出来ないのです。

(5) じゃあ、どうすればいいのか。それはもう少し考えてみてください。

2.5　逆行列 A^{-1}：割り算は？

ここまで足し算引き算掛け算と行列にたいする演算を見てきました。すると、割り算が気になりますよね。行列の割り算ってどうやるのでしょうか？

割り算というものを思い返しましょう。分数 $\frac{b}{a}$ というのは a の逆数 $\frac{1}{a}$ を b にかけたものでした。なので、行列で割り算を考えるのでも逆数のような行列がみつかればいいだろう、という発想をします。

実数 a の逆数 $x = \frac{1}{a}$ というのは

$$x \cdot a = 1$$

を満たす実数として唯一に定まるのでした。

そこで逆数の行列バージョンである逆行列を次のように定義します。

定義 2.9 (逆行列)**.** n を 1 以上の自然数とする。

n 次正方行列 A の逆行列X を次をみたす n 次正方行列として定義する：

$$AX = E_n,\ XA = E_n. \tag{2-2}$$

定義についていくつか注意しておきます。

注意 2.10. (1) 上の定義 2.9 はあくまでも与えられた A にたいする性質により逆行列 X というものを定義しています。

なので、とくに次の二点に注意しましょう。

(i) どんな A にたいしても必ず逆行列 X が存在する、とは主張していない。

(ii) また、A にたいして逆行列 X が存在したとしても、
それが一つしかない、とは主張していない。

(2) 行列の掛け算では右から掛けるのと左から掛けるのは一般には異なる結果を産んだので定義式 (2-2) では右から X を掛けたのと左からかけたのとにたいして、二つ条件式を課しています。

(3) 定義は n 次正方行列 A にたいして逆行列 X を定義しています。もっと、一般に $n \times m$ 行列 A ではどうなのか？というのは素直な疑問です。

$n \times m$ 行列 A にたいして定義式 (2-2) を下の式に変更することで逆行列 X を $m \times n$ 行列として定義することはできますね。

$$AX = E_n,\ XA = E_m.$$

ところが、実はこの様に定義してやってもいいのですが、すると $n \times m$ 行列 A が逆行列 X をもてば $n = m$ である、ということが証明できます。つまり、こうやって定義した逆行列をもつ A は正方行列に限られる、ということです。なので、定義の最初から正方行列だけを扱っているのです。

注意しといてなんですが、上の注意 2.10(1)(ii) で言及した一意性は保証されます。

定理 2.11 (逆行列の一意性)**.** n を 1 以上の自然数とする。

n 次正方行列 A の逆行列は存在すれば一意的である。

学生 A :「なにが言いたい定理なの？よーわからん」
教員 M :「そうですね。慣れないとパッと見なにを言ってるのか不明ですね。」

定理 2.11 が主張するのは、X と Y が A の逆行列ならば $X = Y$ が成り立つ、ということです。
さらに、逆行列の定義を思いだすと、定理の主張は次のようになります。
X と Y とが等式

$$AX = E_n,\ XA = E_n,\ AY = E_n,\ YA = E_n \tag{2-3}$$

を満たすとすれば $X = Y$ が成り立つ。
さあ、証明しましょう。

Proof. 次の等式から $X = Y$ が従う。

$$X \overset{(1)}{=} XE_n \overset{(2)}{=} X(AY) \overset{(3)}{=} (XA)Y \overset{(4)}{=} E_nY \overset{(5)}{=} Y$$

ただし、各等号では次のことを用いた：

(1) 単位行列の性質。

(2) Y が逆行列であること。より正確には等式 (2-3) の 3 番目の式

(3) 行列の積の結合法則（教科書 p29 定理 2.1）

(4) X が逆行列であること。より正確には等式 (2-3) の 2 番目の式

(5) 単位行列の性質

□

学生 A :「なんか変な証明。だまされたみたいな気がする。」
学生 B :「もっと、普通に証明すればいいんじゃないの？」
学生 C :「普通にって？」
学生 B :「成分を文字でおけば、等式 (2-2) から方程式ができるやん。で、それを解けばいいねん。」
学生 A :「方程式の解が存在すれば一つしかないってことを示せばいいのか」
学生 B :「試しに 2 次正方行列の場合をやってみよう。」
学生 A :「じゃあ、まず、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおいて、等式 (2-2) に代入すると、」
学生 B :「第 $(1,1)$ 成分を比較して $ax + bz = 1$ が出てきて、、、、、、、、」
学生 A :「、、、、、、、、、、、、、、」
学生 B :「、、、、、、、、、、、、、、、、、、、」
学生 C :「、、、、、、、、、、、。難しすぎて解けん !!! 」

注意 2.12 (発想を習得しよう。). 普通だったらこの定理は上のように成分計算から解きたくなりますが、2 次正方行列の場合ですら恐ろしく複雑です。
行列の等号の証明は成分ごとの一致を示すのが基本です。ですが、この証明のように、全く成分に言及せずに計算法則（分配法則、単位行列の性質）のみで完了する証明もあります。

行列の掛け算から得られる成分の方程式というのは特殊なもののようで、例えば次のことが成り立ちます。腕に覚えのあるかたはぜひ挑戦してみてください。

挑戦問題 2.13. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が $A^2 = E_n$ をみたすとする。このとき、対角成分の総和

$$T := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

は $-n \leq T \leq n$ の範囲の整数であることを示せ。

2.5.1 正則行列、逆行列の記号 A^{-1}

定理 2.11 によって、正方行列 A の逆行列は存在すれば一意的であるということがわかりました。なので、逆行列を A だけに依存する記号であらわしても混乱は生じないでしょう。

定義 2.14 (正則行列)**.** 逆行列をもつ正方行列 A を正則行列と呼ぶ。
正則行列 A の逆行列を A^{-1} であらわす。

2.5.2 1 次正則行列

1 次正方行列 $A = (a)$ は実数 a と同一視できますね。1 次正方行列 $A = (a),\ B = (b)$ の掛け算 $AB = (ab)$ もそのまま実数の掛け算 ab に対応していますね。さらに 1 次単位行列 $E_1 = (1)$ は実数 1 に対応しています。
なので、次が分かります。

定理 2.15. 1 次正方行列 $A = (a)$ が正則であるための必要十分条件は $a \neq 0$ である。
さらにこの条件が満たされるとき A の逆行列 A^{-1} は次であたえられる：

$$A^{-1} = (a^{-1}).$$

2.5.3 2 次正則行列

2 次正方行列の場合は次のようになります。

定理 2.16. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ である。
さらにこの条件が満たされるとき A の逆行列 A^{-1} は次であたえられる：

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.5.4 3 次以上の場合は、、、

3 次以上の正方行列の正則性も同様に判定が可能で、逆行列 A^{-1} を書き下すこともできます。
じつは、このことを理解するのが線形数学 I の後半の目標なのです。（興味のある方は教科書 p.103 定理 4.16 をご覧ください。）

3　正則行列についてもうすこし、

正則行列についてもう少しだけ知っておく必要があります。

復習 3.1. *(1)* n 次正方行列 A の逆行列 B とは $AB = E_n, BA = E_n$ を満たす行列である。（必然的に n 次正方行列になる事を注意しておく。）

A の正則行列は存在すれば一意的であり、それを A^{-1} であらわす。

(2) 逆行列を持つ行列を正則行列という。

いろいろな操作で正則性は保たれます。

命題 3.2 (教科書 p36, 定理 2.5)**.** *(1)* 正則行列 A の逆行列 A^{-1} も正則であり、その逆行列は $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 二つの n 次正則行列 A, B の積 AB も正則であり、その逆行列は $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) 正則行列 A の転置行列 ${}^tA$ も正則であり、その逆行列は $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

実数のことを復習します。実数 p が 0 でなければ、二つの実数 a, b が $a = b$ であるための必要十分条件は $pa = pb$ でした。
その行列版である次の命題は連立一次方程式の解法を論じる際に鍵となります。

命題 3.3. P を n 次正則行列とする。二つの $n \times m$ 行列 A, B が $A = B$ であるための必要十分条件は $PA = PB$ である。

Proof. （必要条件）示すべきは「$A = B$ であれば $PA = PB$ が成り立つ。」ですね。
二つの $n \times m$ 行列 A, B が $A = B$ をみたすと仮定します。等式 $A = B$ に左から P を掛ければ $PA = PB$ がなりたつ。よって証明終了。

（十分条件）示すべきは「$PA = PB$ であれば $A = B$ が成り立つ。」ですね。
二つの $n \times m$ 行列 A, B が $PA = PB$ をみたすと仮定します。等式 $PA = PB$ に左から P^{-1} を掛ければ $P^{-1}PA = P^{-1}PB$ がなりたつ。
逆行列の性質より $P^{-1}PA = E_nA = A,\ P^{-1}PB = E_nB = B$ がなりたつ。これと上の等式をから $A = B$ が従う。よって証明終了。

□

第 II 部

掃き出し法による連立一次方程式の解法

4　連立一次方程式を解こう１：連立一次方程式と行列

行列（特に掛け算）を用いると、連立一次方程式を $A\vec{x} = \vec{u}$ と簡単に書き下すことができます。行列というのは連立一次方程式圧縮装置なのです。しかし、書き下すのが楽になるというのは表面的なことに過ぎず、本当に大事なのは、

行列を用いることで連立一次方程式の解法を与えることができる、

ということです。

学生 A :「えっ、でも連立一次方程式なんてフツーに解けるで。」
教員 M :「うん。でも、普段やってる解き方でどうして連立一次方程式の解が得られるのか、説明できる？」「適当にガチャガチャと式変形して、なんか答えっぽいのが出てきたらそれが解ってことにしてるだけじゃない？」「それ以前に、方程式を解く、というのが、どういうことか説明できる？」

4.1　方程式を解くというのはどういうことか

先ず方程式とは何でそれを解くってどういうことかお浚いしましょう。

方程式とは未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ の間に成り立つべき式

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0,$$

であり、方程式を解くとはこれらの等式を満たす数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ を全て求めるという事でした。

方程式は条件式 F_i が全て多項式の場合は代数方程式と呼ばれます。x_j が関数で、F_i に微分が入っていると微分方程式と呼ばれます。

自然科学のみならず経済学や惧らくそれ以外の科学分野において様々な現象が様々な微分方程式によって記述されます。解明したい現象を記述する方程式を見つけるのも一苦労ですが、現象を解明するためにはそれを解かなければなりません。方程式を解く、というのは非常に重要で基本的な科学者の営みなのです。方程式は何時でも解ける訳ではありません、それどころか大概は解けなません。それなので、与えられた方程式の解の性質を方程式から導出する研究も大事になってきます。

線形代数で扱うのは一次方程式でこれは原理的には何時でも解けます。幸せですね。一次式だから簡単なのです。先にも言った通りこの講義の前半の目標はこの簡単な場合に「方程式を解く」という事を理解し、実際に解かなければいけない複雑な方程式にアタックするための基礎的な理解を身に着ける事です。

連立一次方程式に焦点を合わせましょう。

4.2 連立一次方程式を解くというのはどういうことか

m 個の変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ に関する n 本の一次方程式を連立させた連立一次方程式を考えましょう（簡単だけれど複雑ですね）:

$$(\spadesuit)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1m}x_m & = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2m}x_m & = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3j}x_j + \cdots + a_{3m}x_m & = u_3 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{im}x_m & = u_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nm}x_m & = u_n \end{cases}$$

もう一度言っておくと、

この連立一次方程式 ($\spadesuit$) を解くというのは、

上の式をすべて満たすような実数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を全て求める、

ということです。

4.2.1 連立一次方程式を圧縮

連立一次方程式 ($\spadesuit$) に対して $n \times m$ 行列 A を $A := (a_{ij})$、m 次列ベクトル $\vec{x}$ を $\vec{x} := (x_j)$、n 次列ベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u} := (u_i)$ で定めましょう。

行列の積を用いると、なんと上のややこしい連立一次方程式 ($\spadesuit$) が次の様に簡単に表現でき出来ちゃいます。

$$(\heartsuit) \qquad A\vec{x} = \vec{u}.$$

しつこいですが、言っておくと、

この連立一次方程式 ($\heartsuit$) を解くというのは、

式 $A\vec{x} = \vec{u}$ を満たす m 次列ベクトル $\vec{x}$ を全て求める、

ということです。

方程式 ($\spadesuit$) を方程式 ($\heartsuit$) に書き換えただけだと、書くのは楽になったけれど、それ以上のありがたみをすぐに感じられないかもしれません。

ありがたみは追々に説明していきます。ここではとりあえず次の二つの用語を覚えてください。

4.2.2 係数行列、拡大係数行列

定義 4.1. (1) 連立一次方程式 ($\spadesuit$) が与えられているときに、上の様に定義した $n \times m$ 行列 A を係数行列と呼びます。

(2) また A の右に $\vec{u}$ を付け足して得られる $n \times (m+1)$ 行列 $(A|\vec{u})$ を拡大係数行列と呼びます。

注意 4.2 (縦線は). 拡大係数行列 $(A|\vec{u})$ の間にある縦線に数学的な意味はありません。書いても書かなくてもさして問題はありません。ただ、慣れるまでは引いておくといいでしょう。

例 4.3. 次の x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式を考えましょう：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = -4. \end{cases}$$

この方程式の係数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列 $(A|\vec{u})$ は

$$(A|\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

です。

（お手数ですが第 3 列と第 4 列の間に縦線を引いてください。）

5　連立一次方程式を解こう２：基本変形、基本行列

学生 A :「行列で連立一次方程式を表したら、確かに書くのは楽になりますね。（なんか騙されてる気はするけれど、、、、）」

学生 B :「でも、行列を使ってたら式変形ができひんやん。連立一次方程式を解くときって二つの式を足したり引いたりするやん。」

教員 M :「いや、実はそれも行列を使って出来るんですね。密に課題に出してるんですよ。第 2 回の (8) を見てください。」

連立一次方程式を解くときには皆さん式変形をしましたね。変数を消すためにある式を何倍かして別の式に足す、という操作をしましたね。（というか、それ以外の操作ってまずしないですよね。）

実は、この式変形も行列の掛け算として得られます。この式変形は基本変形と呼ばれていて、それを実現する行列は基本行列と呼ばれます。

基本変形には上で言った式変形以外にも 2 種類あり、基本行列も対応したものが他に 2 種類あります。

5.1　基本行列

キチンとした定義を与えるのは面倒ですが、実際に書いてみるとそうでもないのが基本行列です。

定義 5.1 (基本行列（教科書 p.55, 定義 3.2）)**.** $n \geq 1$ を自然数とする。

(1) 自然数 $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ と実数 c に対して n 次正方行列 $P_n(i, j; c) = (p_{st})$ を次で定める：

$$p_{st} = \begin{cases} 1 & s = t \\ c & s = i, t = j \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

（対角成分に 1 があり、指定された位置（第 (i, j) 成分）に c があり、それ以外の成分は 0 の行列です。）

(2) 自然数 $1 \leq i \leq n$ と 0 でない実数 $c \neq 0$ に対して n 次正方行列 $Q_n(i;c) = (q_{st})$ を次で定める：

$$q_{st} = \begin{cases} 1 & s = t, s \neq i \\ c & s = t = i \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

（第 i 番目の対角成分が c であり、それ以外の対角成分は 1 であり、対角成分以外は 0 の行列です。）

(3) 自然数 $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ に対して n 次正方行列 $R_n(i,j) = (r_{st})$ を次で定める：

$$r_{st} = \begin{cases} 1 & s = t, s \neq i, j, \text{ or } s = j, t = i \text{ or } s = i, t = j, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

（第 i 番目、第 j 番目の対角成分は 0、それ以外の対角成分は 1 であり、第 (i,j) 成分と第 (j,i) 成分も 1 であり、それ以外の成分は 0 の行列です。）

具体的な形が見たい人は例 5.4, 5.5, 5.6 をご覧ください。
実は、皆さんが今まで方程式を解くために行ってきた操作は正則行列をかけることで得られるのです。

定理 5.2. A を $n \times m$ 行列とする。

(1) $P_n(i,j;c)A$ は A の第 j 行を c 倍して第 i 行に加えて出来る行列である。

(2) $Q_n(i;c)A$ は A の第 i 行を c 倍して得られる行列である。

(3) $R_n(i,j)A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列である。

証明は例 5.6 を見ればわかると思います。
これらの操作を行基本変形と呼ぶ。

定理 5.3. 基本行列は正則行列である。

$$P(i,j;c)^{-1} = P(i,j;-c),\ Q(i,c)^{-1} = Q(i;c^{-1}),\ R(i,j) = R(i,j)$$

証明は教科書 p57, 命題 3.2 をご覧ください。

例 5.4. (1) 行列 $P_2(1,2;c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。

(2) 行列 $Q_2(2;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ は $c \neq 0$ のとき正則であり逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ で与えられる。

(3) 行列 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は正則であり逆行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる。

例 5.5. (1) 行列 $P_3(1,2;c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり逆行列は $P_3(1,2;-c) = \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。

(2) 行列 $Q_3(2;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $c \neq 0$ のとき正則であり逆行列は $Q_3(2;c^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。

(3) 行列 $R_3(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり逆行列は $R_3(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（自分自身）で与えられる。

5.2 拡大係数行列と基本行列の積には次の関係があります。

拡大係数行列に左から行列を掛けるのは方程式の変形に対応します。
つまり、$C(A|\vec{u}) = (CA|C\vec{u})$ が成り立ちます。

例を見ると何を言っているのかわかるでしょう。皆さん、自分で計算してください。

例 5.6. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ の場合に確認しましょう。
つまり、考えている方程式は次です。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = u_2 \end{cases}$$

この方程式も行列を使うと次の様に簡単になりますね。

$$A\vec{x} = \vec{u}.$$

ただし $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は未知数ベクトルです。

(1) 行列 $P_2(1,2;c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を拡大係数行列 $(A|\vec{u})$ に掛けることは方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の第 2 行を c 倍して第 1 行に加えることに対応します。

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \end{pmatrix} =$$

(2) 行列 $Q_2(2,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ を拡大係数行列 $(A|\vec{u})$ に掛けることは方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の第 2 行を c 倍することに対応します。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \end{pmatrix} =$$

(3) 行列 $R_2(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を拡大係数行列 $(A|\vec{u})$ に掛けることは方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の第 1 行と第 2 行を入れ替えることに対応します。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \end{pmatrix} =$$

5.3 方程式を解いてみよう。

基本行列を使って方程式を解いてみましょう。

例 5.7. 次の連立一次方程式を考えましょう[1]：

$$(\spadesuit) \qquad \begin{cases} -3x - 10y &= 4 \\ \quad x + \ \ 4y &= 2 \end{cases}$$

拡大係数行列は $(A|\vec{u}) = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ですね。行基本変形して方程式を簡単にしていきましょう。

$$\begin{pmatrix} -3 & -10 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -10 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\times}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[1] こんな方程式は皆さんは簡単に解けるでしょうが、

2020年5月23日　16:54

$$\begin{cases} -3x-10y=4 & \cdots ① \\ x+4y=2 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\downarrow \quad ① \longleftrightarrow ②$$

$$\begin{cases} x+4y=2 & \cdots ① \\ -3x-10y=4 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\downarrow \quad ② \rightsquigarrow 3\times① + ②$$

$$\begin{cases} x+4y=2 & \cdots ① \\ 2y=10 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\downarrow \quad ① \rightsquigarrow ① - 2\times②$$

$$\begin{cases} x=-18 & \cdots ① \\ 2y=10 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\downarrow \quad ② \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}②$$

$$\begin{cases} x=-18 & \cdots ① \\ y=5 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -10 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -10 & 4 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

上で掛けていった行列の積 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考えましょう。計算すると $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ がわかります。さらに次がわかります。

$$P(A|\vec{u}) = (PA|P\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

こいつを拡大係数行列とする連立一次方程式は次ですね：

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} x & = -18 \\ \quad y & = 5 \end{cases}$$

皆さん、これは方程式です。解はわかりますよね。

ここで物凄く大切なことがあります。それは

<u>もともと解きたかった方程式 (♠) と上の解けてる方程式 (♣) は同じ解をもつ</u>

ということです。

解が同じなのだから、方程式 (♠) を解くという当初の目的達成のためには、方程式 (♣) が解ければいいのです。ところが後者はあからさまに解けてるのです。なので、目標としていた方程式 (♠) が解けるのです。

これが連立一次方程式の解法のアイデアなので、まとめておきましょう。

- **目標：** 方程式 (♠) が解きたい。
- **基本変形：** 解きたい方程式 (♠) と同じ解をもっているように方程式を変形する。
- **解けている方程式：** 解きたい方程式 (♠) と同じ解をもっている方程式 (♣) で、
  簡単に解けるものを見つける。方程式 (♣) は式がそのまま解の表示を与えている方程式である。
- **解けた：** 方程式 (♣) の解は、方程式 (♠) の解であることが保証されているので、
  方程式 (♠) は解けた。

まとめたことで説明していないのは以下の二点ですね：

1. 「同じ解をもっているように方程式を変形する」
2. 「解けている方程式」

これについては次回で詳しく解説します。

5.4 寄り道：右から掛けると変数変換

上では拡大係数行列に左から正方行列を掛けることが、方程式の変換であることを確かめました。すると気になるのは、左から掛けるとどうなるか？ということですね。

係数行列に右から行列を掛けるのは変数変換に対応します、例を見るとわかるでしょう。

例 5.8. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ の場合に確認しましょう。

つまり、考えている方程式は次です。

$$A\vec{x} = \vec{u}.$$

ただし $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は未知数ベクトルです。

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおきます。関係式 $\vec{x} = B\vec{y}$ が成り立つとします。

この変数変換の下では方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ は方程式 $AB\vec{y} = \vec{u}$ に変わります。

5.5 密かなポイント：方程式系をまとめて扱ってる

講義では面倒なので連立一次方程式のことを一次方程式と呼ぶようになっている筈です。連立させていることを強調したい場合にだけ連立一次方程式と呼んでいる筈です。

それはともかく、連立一次方程式を解くというのは幾つかの一次方程式をすべて満たす実数の組を全て求めるということですね。皆さんには小学生以来お馴染みのことですが、これまで連立一次方程式を解く際には一次方程式をバラバラにして扱っていましたね。（話しを簡単にするために連立してる一次式は三つとしましょう。）一次方程式に番号を a,b,c と付けて未知数を消去するために「a-2× b」とか式を組んでましたね。そんな風にドンドンと式変形して解を導こうと頑張りました。こうやって方程式を解いていると忘れがち（あるいは元々念頭にない）なのは、三つの方程式「a,b,c」をまとめて扱わなければいけない、ということです。（実際、ある一次式を使い忘れて方程式が解けなかったりもします。）

行列をつかって $A\vec{x}A = \vec{u}$ という形に連立一次方程式をあらわすことの利点は幾つもあり、連立一次方程式が簡単に書き下せる、というのは皆さん既に実感されているとおもいます。

基本行列 $P_n(i, j; c)$ を描ける行基本変形というのは連立一次方程式の観点からは皆さんが今までやってきた未知数の消去を行う変形と何も変わらないのですが、行列の形で扱っていることで常に連立させている一次方程式をまとめて扱うことになっているのです。行列というのは連立させている一次方程式を全部まとめることが出来る便利グッズなのです。このことが行列を用いると連立一次方程式を同値な連立一次方程式に置き換えらえる理由となっています。

6　連立一次方程式を解こう３：解けている方程式、被約階段行列

学生 A :「解けてる方程式ってなんなの？そんなん聞いたことない」
教員 M :「あ、はい。解けてる方程式というのは僕が勝手に呼んでる名称です。見た目から解が分かってしまうような方程式のことをそう呼んでいます。」

“解けている連立一次方程式” とは大雑把に言えば “移項するだけで解が得らる連立一次方程式” です。
変数の消去をしなくても移項するだけで解が得られる形の連立一次方程式です。
“解けている連立一次方程式” というのはフザケタ名称ですが、係数行列が被約階段行列である連立一次方程式のことを指します。
被約階段行列は大切なもので、名称も正式なものです。

6.1　移項すらしなくても解けている連立一次方程式の例

この節では移項すらしなくても解けてる連立一次方程式を見ていきます。
“解けてる連立一次方程式” が “解けている” という意味が分かると思います。

6.1.1

教員 M :「未知数 x, y に関する次の連立一次方程式の解を求めましょう。」

(6-4)
$$\begin{cases} x & = -18 \\ \quad y & = 5 \end{cases}$$

学生 A :「これって方程式なんですか？解じゃないんですか？」
教員 M :「方程式かどうかは、思い方の問題なんです。上の式 (6-4) を満たすような x, y をすべて見つけたい、って思えば方程式なんですね。」
学生 A :「、、、。そうなんですか。でも、式 6-4 を満たす x, y なんて一組しかないし、当たり前にわかりますよね。」
教員 M :「はい。なので、解けている方程式と呼んでも差し支えないでしょう。」
解はもちろん下のやつですね：

$$\begin{cases} x & = -18 \\ y & = 5 \end{cases}$$

ベクトルで解を表示する方法にも慣れておきましょう：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6.1.2

教員 M：「未知数 x, y, z に関する次の連立一次方程式の解を求めましょう。」

$$\begin{cases} x & = -18 \\ \quad y & = 5 \end{cases} \tag{6-5}$$

学生 A：「、、、、、、、、、、（さっきと一緒じゃないの？コピーアンドペーストして、直し忘れてる??）」
学生 B：「さっきとどう違うんですか？」
教員 M：「式自体は一緒だけれど、問題にしてる未知数が違いますね。x, y, z に関する方程式なんです。z の係数は全部 0 の場合を考えています。」
学生 A：「（騙された。）」
学生 B：「式 6-5 を満たす x, y, z を求めるんですよね。zって決めようがなくないですか？」
教員 M：「はい。なので、“z は好き勝手な実数である” というのが解です。」
解は次の様に書きます：

$$\begin{cases} x & = -18 \\ y & = 5 \\ z & = s \end{cases} \qquad (s \text{ は任意の実数である})$$

ベクトルで表すと次です

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}). \tag{6-6}$$

注意 6.1 (解の表記). 上のベクトルでの表記は下の様に書いた方が簡単です。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \\ s \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

しかし、方程式が複雑になると解は 6-6 の様な表し方をするようになります。

6.1.3

上の例を変数の個数を一般にすると次になります。

例 6.2. n, m を $m \le n$ を満たす自然数とする。m 個の定数 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ を用いて n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に定まる方程式 $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \ldots, x_m = u_m$ を解きましょう。

6.1.4

教員 M：「未知数 x, y に関する次の連立一次方程式の解を求めましょう。」

$$\begin{cases} x & = -18 \\ y & = 5 \\ 0 & = 4 \end{cases} \tag{6-7}$$

学生 A :「また、なんかようわからんもんですね。最後の式ってなんなんですか？」
教員 M :「これは方程式なんだから、これを解くというのは、、、、」
学生 B :「式 (6-7) を満たすような x, y の組を全部見つける、ってことだけれど、、、、、」
学生 A :「x, y をどうとってきても最後の式は成り立たないんじゃないですか ??? 」
教員 M :「はい。ご明察。そうなんですね。どんな x, y をとってきても式 (6-7) を成立させることはできないのです。なので、答えは "解なし" なのです。」

もういちどキチンと答えを書いておきます :

解なし

学生 A :「これも解けている方程式なんですか？解がないけど、、、」
教員 M :「はい。"解が存在しない" と結論を下せる、という意味で解けてますよね。しかも、その判断が当たり前にできますよね。」
学生 A :「当たり前って？」
学生 B :「成り立たない式 $0 = 4$ が出てきてる、ってことじゃないの？」
教員 M :「はい、その通りです。未知数をどう頑張って選ぼうが $0 = 4$ を成り立たせるのは無理ですよね。」「うえの連立一次方程式の解というのは三つの式をすべて満たすような x, y の組のことでしたが、そういうものが存在しないことが当たり前に判断できるのです。」

注意 6.3 (**"解なし" の原理**). 凄い特殊な例を扱ってると思うかもしれませんが、そうではありません。
連立一次方程式が "解なし" になるのは、上の様に成り立たない式が基本変形の結果として現れる場合だけなのです。

6.2 解けている方程式の例

この節では解けてる連立一次方程式を見ていきます。上の節とは違って移項する必要があります。

6.2.1

少しづつ複雑なものを扱っていきます。次はどうでしょう。

例 6.4. 変数 x, y に対して方程式 $x + 3y = 4$ を解け。

この方程式はこれよりも簡単な形に変形できません。このまま解とするしかないような代物です。

解としての表示式を得るには片一方の変数を移項してやります。

$$x + 3y = 4 \quad \Longrightarrow x = 4 - 3y.$$

悪い言い方をすれば、これ以上はどうしようもないので、これで満足するしかないのです。

方程式を解くというのは解を<u>全て</u>求めるということでした。「全ての解」を表示する方式に慣れていきましょう。

解. 上の方程式の解は次です：

$$\begin{cases} x &= 4-3s \\ y &= s \end{cases} \quad (s\text{ は任意の実数である})$$

□

解. ベクトルで表記すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

□

6.2.2

上の例を少し複雑にしたものを次に考えましょう。

例 6.5. 変数 x_1, x_2, x_3 に対して下の方程式を解きましょう。

$$\begin{cases} x_1 \quad + 3x_3 &= 5 \\ \quad x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

こいつも移項するだけで解けますね：

$$\begin{cases} x_1 \quad + 3x_3 &= 5 \\ \quad x_2 + x_3 &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= 5-3x_3 \\ x_2 &= 1-x_3 \end{cases}$$

<u>未知数 x_3 には何の制限もつかないので、任意の実数を選べるのです。</u>

解. 上の方程式の解は次です：

$$\begin{cases} x_1 &= 5-3s \\ x_2 &= 1-s \\ x_3 &= s \end{cases} \quad (s\text{ は任意の実数である})$$

□

解. ベクトルで表記すると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

□

6.2.3 移項するだけでは解けない例（解けていない方程式の例）

"移項するだけで解けてる" ためにはどういうことが必要なのかを明らかにするために、移項するだけでは解けない例を見ましょう。

例 6.6. 変数 x_1, x_2, x_3 に対して下の方程式を解きましょう。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

試しに、うえと同じように、先頭の変数だけを残して、あとの項を右辺に移しましょう：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = 5 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 & = 1 - x_3 \end{cases}$$

学生 A：「さっきと同じように右辺の未知数 x_2, x_3 を任意の実数にすればいいんじゃないの？」
学生 B：「うん。あれっ？でも、二つ目の式には左辺にも x_2 があるやん。」
学生 A：「ホンマや。第二式は $x_2 = 1 - x_3$ だから、x_3 から x_2 が決まってしまう。」
学生 B：「だから x_2, x_3 の二つともを任意の実数ってできひんやん。」
学生 C：「じゃあ、x_3 だけを任意の実数ってしたらいいんじゃないの？」
学生 A：「でもそれだったら、第一式 $x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3$ から x_1 が決まらへん。」

移項するだけで左辺の未知数を右辺の未知数であらわす式を導くことが出来るというのが "解けている連立一次方程式" の要点です。
今の場合だと、移項したあとでも左辺と右辺に同じ未知数 x_2 が残ってしまって上手くいかなかったのです。

6.2.4 解けている連立一次方程式

"解けている連立一次方程式" というのは、

先頭の項以外を右辺に移項したときに、

左辺と現れる未知数と右辺に現れる未知数に共通のものがなくて、

それゆえに、移項後の式がそのまま解の表示式になっている、

そういうものです。
これを係数行列の言葉に直すと被約階段行列の概念が得られます。

6.3　被約階段行列、解けている連立一次方程式

6.3.1　被約階段行列

被約階段行列[2]というものを導入します。係数行列が被約階段行列である連立一次方程式は移項するだけで解けるのです。

定義 6.7. $n \times m$ 行列 A が**階段行列**であるとは、

$$A = 0 \text{ であるか}$$

若しくは

$$A \neq 0 \text{ であり次の (1),(2) を満たすことと定める：}$$

(1) ある r $(1 \leq r \leq n)$ が存在して、第 1 行から第 r 行までの列ベクトルは 0 ベクトルではない。更に、　$r < n$ の場合は第 $r+1$ 行から第 n 行までは全て 0 ベクトルである。

(2) $1 \leq i \leq r$ に対して $j(i) := \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$ と定める[3]と

$$j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$$

が成り立つ。

i にたいして定まる $j(i)$ というのは第 i 行で最初に 0 でない成分が現れる列番号です。

$$a_{i,1} = 0,\ a_{i,2} = 0,\ a_{i,3} = 0, \cdots, a_{i,j(i)-1} = 0,\ a_{i,j(i)} \neq 0$$

更に不等式 $j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$ があるから行ベクトルの個数を勘定する事で $r \leq m$ が従います。

定義 6.8. この自然数 r を A の**階数**とよび rank A と表す。不等式 rank $A \leq \min\{m, n\}$ が成り立つ。

定義 6.9. $n \times m$ 行列 A が**被約階段行列**であるとは、これが階段行列であり更に $A = 0$ であるか若しくは $A \neq 0$ の場合は次を満たすことと定める：

$$a_{k\ j(i)} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

（見にくいですが $a_{k\ j(i)}$ は第 $(k, j(i))$ 成分です。つまり第 $j(i)$ 列ベクトルの第 k 成分です。）

こうやって定義を書き下すとややこしいですが、実際に書いてみるとどんなものかはすぐ分かるでしょう。被約階段行列の重要性は次の事実によります。

---

[2]“被約”（ひやく）というのは耳慣れない言葉ですね。“約” は約分とか簡約とかの “約” で「簡単にする」とかいう意味で、“被” は、そのまま、「こうむる」です。合わせると “被約” は「すでに簡単にされている」ということです。

[3]$j(i)$ は第 i 列を右から見ていったときに最初に 0 でない成分が現れる列番号

6.3.2 解けている連立一次方程式

A が被約階段行列であれば、連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ は解けています。それを観察していきましょう。（あくまでこの講義だけの用語です。他所で言うと恥をかくかも知れないので注意してください。）

観察 6.10. 連立一次方程式 (♠) を考えましょう：

$$(\spadesuit)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1m}x_m & = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2m}x_m & = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3j}x_j + \cdots + a_{3m}x_m & = u_3 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{im}x_m & = u_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nm}x_m & = u_n \end{cases}$$

連立一次方程式 (♠) の係数行列 $A = (a_{ij})$ が $A \neq 0$ である被約階段行列であるとき次が成り立ちます：

1. （係数 a_{ij} が 0 となっている項は見ないで）各行の先頭に並んでいる変数の係数は 1.
2. 第 i 行目の方程式の先頭に並んでいる変数が $x_{j(i)}$ であれば、
$$j(1) < j(2) < j(3) < \cdots$$
が成り立つ。
3. 各行における二番目以降の項には他の行の先頭の変数 $x_{j(i)}$ は現れない。

この連立一次方程式は、

先頭の変数 $x_{j(i)}$ 以外を右辺に移項すればそのまま解の表示を与える式になっています。

というのは、移項したあとの式では、左辺と右辺に現れる未知数に共通のものが無いからです。

移項した式は、左辺の未知数 $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \cdots, x_{j(r)}$ を右辺の未知数（$x_{j(i)}$ の形以外の未知数）で表示する式になっています。

右辺に現れてる未知数は任意の実数値をとることができます。
（「右辺に現れている未知数」というのはつまり $x_{j(i)}$ の形以外の変数のことです。）

右辺の未知数の値が決まれば、残りの未知数、つまり $x_{j(i)}$ の形をした未知数の値は、
移項した式から一意的に決まってしまいます。
方程式による拘束条件はここにだけ効いているのです。

7　連立一次方程式を解こう４：同値な方程式

（注意：この節は第３回に講義した内容です。）

学生Ａ:「“同じ解をもっているように方程式を変形する”ってどういうことですか？」

教員Ｍ:「実は、良く知ってる当たり前にやってることですよ。例えば、次の二つの２次方程式を見てみましょう：」

$$x^2-2x+3=0, \quad (x-3)(x+1)=0.$$

教員Ｍ:「この二つの２次方程式の解は同じだってわかりますよね。」

学生Ａ:「そりゃそうですよ。左辺が等しいんだから（と言って下の式を板書する）、それが０になるような x だって同じですよね。」

$$x^2-2x+3=(x-3)(x+1).$$

教員Ｍ:「そのとおりです。別の方程式だけれど同じ解をもっている、というのはこういうことです。」

学生Ａ:「でも、連立１次方程式だったらどうなるの？」

学生Ｂ:「いままで連立１次方程式を解いてきた方法とどう関係してるの？」

教員Ｍ:「皆さんが連立１次方程式を解くときって、式を一本一本バラバラにしてますよね、
それで見えにくくなってるんですが、
大切なのは連立１次方程式をひとまとめにして取り扱うことなんです。」

例 5.7 の式変形の途中のやつを見てみましょう：

$$\begin{cases} x + 4y &= 2 \\ -3x - 10y &= 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{第一式の３倍を第二式加える}} \begin{cases} x + 4y &= 2 \\ \quad -10y &= 10 \end{cases}$$

書き方は違いますが、皆さんが今まで連立一次方程式を解くときに行ってきた操作ですよね。

教員Ｍ:「ポイントは、<u>この操作は逆戻りできる</u>、ということです。」

学生Ａ:「どういうこと？」

教員Ｍ:「変形した後の方程式から変形前の方程式に戻せる、ということです。」

さっきの変形を戻すには、

$$\begin{cases} x + 4y &= 2 \\ -3x - 10y &= 4 \end{cases} \xleftarrow{\text{第一式の }-3\text{ 倍を第二式加える}} \begin{cases} x + 4y &= 2 \\ \quad -10y &= 10 \end{cases}$$

とすればいいですよね。

学生Ａ:「でも、逆向きに変形できるってのが方程式の解法とどう関係してるの？」

教員Ｍ:「それはいい質問ですね。逆向きに変形できるというのは、本質的には何も変わってないということで、変形の前後の方程式が全く同じ解を持ってる、ということを保証しているんですね。」

学生 A :「まだよくわかんない。」
教員 M :「逆戻りできない例をみると感じがつかめるかも。」

$$\begin{cases} x + 4y &= 2 \\ -3x - 10y &= 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{第二式を 0 倍する}} \begin{cases} x + 4y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

教員 M :「これだったら変形後の方程式から、変形前の方程式を復元できないですよね。」
学生 A :「そうですね。第二式の情報が完全に消え去ってる。」
教員 M :「そう。そして、変形前後の方程式は別々の解を持っていますよね。」

7.0.1 きっちりした定理

ふんわりしたことばかり言ってると話が進まないので、きっちりした定理を述べます。

定理 7.1. ある連立一次方程式は、それを行基本変形して得られる連立一次方程式と同じ解をもっている。

これを拡大係数行列をメインにして書くと次の様になります。

定理 7.2. $n \times m$ 行列 A と n 次列ベクトル $\vec{u}$ を考える。
P を n 次基本行列とする。(つまり $P_n(i,j;c),\ Q_n(i;c),\ R_n(i,j)$ のどれか。)
この状況で $B = PA,\ \vec{v} = P\vec{u}$ とおく。
すると、次の二つ連立一次方程式は同じ解をもっている:

$$A\vec{x} = \vec{u}, \quad B\vec{x} = \vec{v}$$

証明は後で定理 7.4 として与えます。キーポイントは基本行列 P は正則行列であるということです。正則だから逆行列 P^{-1} がそんざいするので、こいつを $B, \vec{v}$ にかければ、元の $A, \vec{u}$ が回復できるのです。

7.1 同値な連立一次方程式

「同じ解をもっている」と上で何回か言いましたが、曖昧なところがあります。一つでも同じ解があればいいのか、全部の解が同じでないといけないのか、字面からは伝わらないですよね。今回の話しは、もちろん、「全部の解が同じ」ということを言っているのですが、毎回そう言ってるのも何なので用語を導入しましょう。

定義 7.3 (連立一次方程式の同値性)**.** $n \times m$ 行列 A, B と n 次列ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ を考える。
二つの連立一次方程式

$$A\vec{x} = \vec{u}, \quad B\vec{x} = \vec{v}$$

が同値とは次が成り立つことをいう:
m 次数ベクトル $\vec{x}$ にたいして等式 $A\vec{x} = \vec{u}$ を満たすことと等式 $B\vec{x} = \vec{v}$ を満たすことは同値である。

平たく言えば全部の解が同じということです。

7.1.1 基本変形が同値性を保つこと

定理 7.2 は基本変形で得られる方程式が同値であると主張しています。この定理は、もう少し一般化して、拡大係数行列に正則行列を掛けるという操作が同値性を保つ、という形で成り立ちます。

正則行列を掛けるという操作は情報を何も失わないのです。これを我々の当面の目標である連立一次方程式を解くという問題に当てはめると次の様に成ります。

定理 7.4. $n \times m$ 行列 A と n 次列ベクトル $\vec{u}$ を考える。
P を n 次正則行列とする。
この状況で $B = PA,\ \vec{v} = P\vec{u}$ とおく。
すると、次の二つ連立一次方程式は同値である：

$$A\vec{x} = \vec{u}, \quad B\vec{x} = \vec{v}.$$

Proof. 証明すべきことは二つあります。

(1) m 次数ベクトル $\vec{x}$ が等式 $A\vec{x} = \vec{u}$ を満たすと仮定すれば、$\vec{x}$ は等式 $B\vec{x} = \vec{v}$ も満たす。

(2) m 次数ベクトル $\vec{x}$ が等式 $B\vec{x} = \vec{v}$ を満たすと仮定すれば、$\vec{x}$ は等式 $A\vec{x} = \vec{u}$ も満たす。

(1) を示しましょう。
m 次数ベクトル $\vec{x}$ が等式 $A\vec{x} = \vec{u}$ を満たすと仮定します。この等式に左から P を掛けてやると等式 $B\vec{x} = \vec{v}$ がなりたつことが分かる。（(1) の証明終わり）

(2) を示しましょう。
m 次数ベクトル $\vec{x}$ が等式 $B\vec{x} = \vec{v}$ を満たすと仮定します。
（ポイントは P が正則なので逆行列 P^{-1} が存在することです。）
逆行列の性質より $P^{-1}B = P^{-1}PA = E_nA = A,\ P^{-1}\vec{v} = P^{-1}P\vec{u} = E_n\vec{u} = \vec{u}$ なので、上の等式に左から P^{-1} を掛けて $A\vec{x} = \vec{u}$ を得る。（(2) の証明終わり） □

7.2 例 5.7 で見ると、

方程式を解くときに式変形が逆戻し可能であると意識しないし、ただ単に解を求めるというだけなら必要のないことなんですが、しかし、基本変形が可逆な変形であるというのは、解を求めることが出来るという理論的裏付けなのです。

例 5.7 の場合に逆向きの操作も書いておきましょう。

解きたい方程式

$$\begin{cases} -3x - 10y = 4 & \cdots ① \\ x + 4y = 2 & \cdots ② \end{cases}$$

① ⟷ ② ↑ ↓ ① ⟷ ②

$$\begin{cases} x + 4y = 2 & \cdots ① \\ -3x - 10y = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

② ⇝ −3①+2 ↑ ↓ ② ⇝ 3① + ②

$$\begin{cases} x + 4y = 2 & \cdots ① \\ 2y = 10 & \cdots ② \end{cases}$$

① ⇝ ①+2② ↑ ↓ ① ⇝ ① − 2②

$$\begin{cases} x = -18 & \cdots ① \\ 2y = 10 & \cdots ② \end{cases}$$

② ⇝ 2② ↑ ↓ ② ⇝ $\frac{1}{2}$②

$$\begin{cases} x = -18 & \cdots ① \\ y = 5 & \cdots ② \end{cases}$$

解けてる方程式

解きたい方程式と同値な解けている方程式が見つかる。

拡大係数行列で見ると

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -10 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times \ \Big\uparrow \qquad \Big\downarrow \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -10 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\times \ \Big\uparrow \qquad \Big\downarrow \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times \ \Big\uparrow \qquad \Big\downarrow \ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \Big\uparrow \qquad \Big\downarrow \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}\times$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

⑥ 右と左にある基本行列は
互いにもう一方の逆行列になっている。

8　連立一次方程式を解こうゴール：掃き出し法

ようやく掃き出し法です。いままでのことをまとめれば、連立一次方程式を解くことができますね。

8.1　掃き出し法に拠る連立一次方程式の解法

教科書の定理 3.6 には第 3 ステップで解の有無を判断する方法や解の公式が説明されています。読むと面倒ですが実際に自分で書き下してみると直ぐに分かる筈です。

Step 0　m 個の変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ に関する n 本の一次方程式を連立させた連立一次方程式をときたい：

$$(\spadesuit)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1m}x_m & = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2m}x_m & = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3j}x_j + \cdots + a_{3m}x_m & = u_3 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{im}x_m & = u_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nm}x_m & = u_n \end{cases}$$

Step 1　（行基本変形）拡大係数行列 $(A \mid \vec{u})$ を行基本変形で $(B \mid \vec{v})$（B は被約階段行列）の形に変形する。

Step 2　（行列をつかわない形に方程式なおす）

方程式 $B\vec{x} = \vec{v}$ を $b_{11}x_1 + \cdots = v_1, \cdots$ というようなお馴染みの形になおす。

いま B は被約階段行列なので、方程式の第 i 行目は

$$x_{j(i)} + b_{i,j(i)+1}x_{j(i)+1} + \cdots + b_{i,m}x_m = v_i$$

という形をしている。

(i) 右側のベクトル $\vec{v}$ の第 $r+1$ 成分以降に 0 でないものがあれば「解なし」

(ii) 右側のベクトル $\vec{v}$ の第 $r+1$ 成分以降が全て 0 ならば、方程式の左辺から先頭の項 $x_{j(i)}$ を残して、それ以外を右辺に移項すれば解が得られる。

$$x_{j(i)} + b_{i,j(i)+1}x_{j(i)+1} + \cdots + b_{i,m}x_m = v_i \quad \to \quad x_{j(i)} = v_i - b_{i,j(i)+1}x_{j(i)+1} \cdots - b_{i,m}x_m$$

右辺に現れる未知数は x_j, (j は $j(1), j(2), \ldots, j(r)$ ではない) である。こいつらを任意の実数 $s, t, r, \ldots$ とおいて解の表示式を書く。

8.1.1　例題

つぎの連立一次方程式が解を持つための実数 a の必要十分条件を求めよ。そして、その条件を満たす a にたいして連立一次方程式を解け：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_3 & = a \end{cases}$$

8.1.2 解の自由度

連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ を考えます。A のサイズを $n\times m$ とし、$r=\mathrm{rank}\,A$ と置きましょう。変数の個数は係数行列の列の個数 m に一致しますね。

定理 3.6 をみると、もしもこの方程式が解を持てば、解の公式の中で自由に選べる変数（つまり、「〜は任意の実数」と書く変数）は x_j （ただし j は $j(1),\cdots,j(r)$ ではない。）であることがわかります。これらの変数の個数は $m-r$ 個ですね。一方、残りの変数、つまり、$x_{j(1)},\cdots,x_{j(r)}$ の値は上の変数から公式によって完全に決定されます。これらの変数は r 個ですね。

連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ をもとに戻って、n 本の一次方程式の集まりとおもうと、係数行列 A の階数 $\mathrm{rank}\,A$ というのは本質的に異なる方程式の本数と考えることができます。すると、上で示した解に現れる自由変数の個数 $m-r$ というのは、

$$\text{解の自由度} = \text{変数の個数} - \text{方程式の本数}$$

という式に読むことができます。

方程式というのは元々は自由に動いている変数に制限を与えるものです。なので、連立させる方程式の本数が増えると、つまり制約が増えることになり、それを満たしながら動く変数の自由度は減っていきます。感覚的には方程式を一つ増やすと変数の自由度が一つ減っていきそうです。そうおもうと上の式は納得しやすいですね。

いまの観察をまとめると次のようになります。

観察 8.1. m 個の未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ に関する連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ を考える。係数行列 A の階数を r とおく：$r:=\mathrm{rank}\,A.$ （注意：$m\geq r$ だった。）

このとき、連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ が解を一つでももてば解には $m-r$ 個のパラメーター（任意の実数にとれるやつ）が存在する。場合分けすると

(1) $m=r$ の場合。連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ が解を一つでももてばそれは唯一の解である。

(2) $m>r$ の場合。連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ が解を一つでももてば解は無限個ある。

8.2 掃き出し法で連立一次方程式が解ける理由

掃き出し法で連立一次方程式 $A\vec{x}=\vec{u}$ が解ける理由をおさらいしておきます。

Step 1 （<u>行基本変形</u>）拡大係数行列 $(A\mid\vec{u})$ を行基本変形で $(B\mid\vec{v})$（B は被約階段行列）の形に変形する。

Step 2 （<u>方程式の同値性</u>）連立一次方程式 $B\vec{x}=\vec{v}$ は元の方程式と同じ解を持っているのでこれを解けばいい。

Step 3 （<u>実は、方程式は解けている！</u>）しかし、行列 B が被約階段行列である事から連立一次方程式 $B\vec{x}=\vec{v}$ の解は、解の有無の判断も含めて自明に求まる。

8.3　おまけ：温故知新（二次方程式の解法）

掃き出し法に拠る連立一次方程式の解法を上で解説しましたが、実は、この様な（連立一次とは限らない）方程式の解法は一般的な原理です。振り返ってみると二次方程式の解の導出もこれと同じ方法で行われているのが分かるでしょう。

二次方程式の一般的な形は次です：

$$\text{(A)}:\quad ax^2+bx+c=0,\quad (a\neq 0, b, c\text{ は定数})$$

さて、解の公式の導出方法をおさらいしましょう。先ず、やる事は何だったかと言うと、平方完成等の式変形で元の方程式 (A) を変形して次の方程式 (B) を得ます。

$$\text{(B)}:\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

今、強調したいの次の事です：方程式 (A) と方程式 (B) は同じ解を持っている。なので、元の方程式 (A) を解くためには方程式 (B) を解けばよいと分かります。しかし、この方程式 (B) の解は殆んど自明に求まります。

何故なのかは、平方根（ルート）の定義を思い出すと直ぐに理解できます。実数 α の平方根 $\pm\sqrt{\alpha}$ とは二乗すると α になる数として定義されていましたよね。それはどういうことなのか考えると、平方根 $\pm\sqrt{\alpha}$ とは二次方程式 $X^2=\alpha$ の解として定義される、という事に他なりません。

方程式 (B) を解くことに戻りましょう。左辺の二乗の中身を X、右辺を α とおいてやると、方程式 (B) は次の様にあらわせます：

$$\text{(B}'\text{)}:\quad X=x+\frac{b}{2a},\quad X^2=\alpha,\quad \left(\alpha:=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

二つ目の X に関する方程式は上に説明した事から、自明に解けています。というのは、この方程式の解を $\pm\sqrt{\alpha}$ と定めているからです。つまり、この方程式の解はトートロジカルに $X=\pm\sqrt{\alpha}$ と求められます。あとは X から x に変換すれば元の方程式の解が求まります：

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\alpha}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

この解の公式の導出過程を見直してみると、冒頭で説明した連立一次方程式の掃き出し法による解法と同じ原理に従っている事が見て取れます。

1（変形）に当たるのが方程式 (A) を方程式 (B) に変形するところです。2 の（方程式の同値性）も成り立っています。方程式 (B) そして 3 と同様に方程式 (B) は殆んど自明に解けているのでした。

勿論、一次方程式や二次方程式が解けるだけならば大したことがないとも言えなくもないですが、これは実は方程式を解くための基本原理です。つまり、頑張って方程式を（同値なままで）変形して何とか既知の方程式に帰着する。帰着できない場合は解を作る様に数学の枠組みを広げる。そして新しく追加した解の間の関係を調べる。

これから数学を理解していくには単に計算するだけでなく問題がどの様な原理や思想によって解かれているかを学んでいく事も大事です。温故知新。

9　斉次連立一次方程式

斉次連立一次方程式とは $A\vec{x} = 0$ の形をした一次方程式のことをいいます。
これは $\vec{x} = 0$ という解を必ず持ちます。これを斉次連立一次方程式の<u>**自明な解**</u>といいます。

つまり、$\vec{u} = 0$ の場合を考えています。なので、拡大係数行列は $(A|0)$ という形をしていますが、この形は行基本変形しても変わりません。
上の記号の下で B が被約階段行列になるまで変形しても行列全体は $(B|0)$ という形をしています。定理 3.6 をこの場合に当てはめれば次の結果を得ます。

系 9.1 (教科書の系 3.7 の拡大版)**.** A を $n \times m$ 行列とする。**斉次連立一次方程式** $A\vec{x} = 0$ が非自明な解を持つための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\, A < m$$

である。
特に $n < m$ であれば上の斉次連立一次方程式は非自明な解を持つ。

連立一次方程式に即して言うと、

- m は変数の個数でした、

- n は方程式の本数、

- 階数 $r = \mathrm{rank}\, A$ は本質的にことなる方程式の本数でした。

なので系 9.1 は
本質的に異なる方程式の本数が変数の個数より少なければ、斉次連立一次方程式は非自明な解をもつ
ということを主張しています。

Proof. 観察 8.1 を用います。
斉次連立一次方程式 $A\vec{x} = 0$ は必ず解 $\vec{x} = 0$ をもつというのがポイントです。なので階数 $r = \mathrm{rank}\, A$ と変数の個数 m の関係によって解の存在の仕方が変わってくるのです。

(1) $m = r$ の時には、斉次連立一次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解は $\vec{x} = 0$ のみである。

(2) $m > r$ の時には、斉次連立一次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解は $\vec{x} = 0$ 以外にも無限個ある。

□

10　正則行列再び

次の定理は理論的にはとても大切です。

定理 10.1 (教科書の定理 3.9 の拡大版)**.** n 次正方行列 A に対して次は同値：

(1) A は正則行列

(2) $\mathrm{rank}\, A = n$

(3) A は基本行列の積である。別の言い方をすれば、A は行基本変形で単位行列に変形できる。

(4) n 次正方行列 X が存在して $XA = E_n$ を満たす。

(5) n 次正方行列 Y が存在して $AY = E_n$ を満たす。

(6) 斉次連立一次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解は自明なものしかない。

(7) 任意の n 次列ベクトル $\vec{u}$ に対して連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ は唯一の解を持つ。

証明には準備がいります。逆行列の基本的な性質を思い出しておきましょう。

命題 10.2 (教科書 p36, 定理 2.5)**.** *(1)* 正則行列 A の逆行列 A^{-1} も正則であり、その逆行列は $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 二つの n 次正則行列 A, B の積 AB も正則であり、その逆行列は $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) 正則行列 A の転置行列 ${}^tA$ も正則であり、その逆行列は $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

補題 10.3. 被約階段行列である n 次正方行列 B に対して次は同値：

(1) $B = E_n$.

(2) $\mathsf{rank}\, B = n$.

Proof. (1)⇒(2). $\mathsf{rank}\, E_n = n$ より明らか（ですよね）。

(2) ⇒ (1). 不等式 $1 \leq j(1) < j(2) < j(3) < \cdots < j(n)$ より、$j(1) = 1, j(2) = 2, \cdots, j(n) = n$ が従う。このことから $B = E_n$ がわかる。（分からない場合は $n = 3$ ぐらいの例を書いてみよう。） □

定理 *10.1* の証明. 証明の流れ：(2) ⇒ (3) ⇒ (1) ⇒ (4) ⇒ (6) ⇒ (2), (1) ⇒ (7) ⇒ (6), (5) ⇒ (1) ⇒ (5)

(2) ⇒ (3). X を基本行列の積、つまり、$X = P_sP_{s-1}\cdots P_1$ ($P_1, \cdots, P_s$は基本行列) であり、XA が被約階段行列であるものとします。階数に関する仮定から XA は n 次正方行列であり階数が n の被約階段行列です。よって、上の補題より $XA = E_n$ です。両辺に X^{-1} を掛けて $A = X^{-1}$ を得ます。基本行列の逆行列も基本行列だったのと、逆行列と積の関係 (命題 10.2(2)) をおもいだせば、これで A が基本行列の積であることがわかります。

$$A = X^{-1} = (P_sP_{s-1}\cdots P_1)^{-1} = P_1^{-1}\cdots P_{s-1}^{-1}P_s^{-1}$$

基本行列は正則であり、正則行列の積は正則だったので　(3) ⇒ (1)　成り立ちます。

(1) ⇒ (4) は $X = A^{-1}$ とすればいいですね。

(4) ⇒ (6) を示す。ベクトル $\vec{x}$ が方程式 $A\vec{x} = 0$ の解とする。両辺に X を左からかけることで $\vec{x} = E_n\vec{x} = XA\vec{x} = 0$ をえる。

(6) ⇒ (2) は対偶「$\mathsf{rank}\, A < n$ ならば方程式 $A\vec{x} = 0$ は自明でない解をもつ。」をすでに示しています。

(1) ⇒ (7) は $\vec{x} = A^{-1}\vec{u}$ が唯一の解であることを示す。示すべきことは二つあって (i) $A^{-1}\vec{u}$ が方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の解である、ことと (ii) $\vec{x}$ が方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の解であれば $\vec{x} = A^{-1}\vec{u}$ が成り立つ、ということです。

(i) を示しましょう。$A(A^{-1}\vec{u}) = (AA^{-1})\vec{u} = E_n\vec{u} = \vec{u}$.

(ii) を示しましょう。$\vec{x}$ は $A\vec{x} = \vec{u}$ を満たすベクトルです。この両変に A^{-1} を掛けて $\vec{x} = A^{-1}\vec{u}$ が得られます。

（補足：(7) を (4) から示せそうな気もするが、(i) を示す際に困る。）

(7) $\Rightarrow$ (6) の導出は (7) のベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u} = 0$ とおけばいいです。

(5) $\Rightarrow$ (1). $AY = E_n$ が成り立つとすると両辺の転置をとって、${}^tY{}^tA = E_n$ を得ます。このことから ${}^tA$ に対して (4) $\Rightarrow$ (1) を適用することができて、${}^tA$ が正則とわかります。よってその転置である A も正則です。

(1) $\Rightarrow$ (5) は $Y = A^{-1}$ と置けばいいですね。

□

特に注意しておきたいのは次のことです。正則行列というのは逆行列を持つ行列と定義されていました。正方行列 A の逆行列 X とは次を満たすものを言うのでした：

$$XA = E_n, AX = E_n$$

しかし、上の定理から次が従います。

系 10.4. A を n 次正方行列とする。このとき n 次正方行列 X に対して次は同値：

(1) X は A の逆行列である。つまり、$XA = E_n, AX = E_n$ を満たす。

(2) X は $XA = E_n$ を満たす。

(3) X は $AX = E_n$ を満たす。

11　逆行列の計算

定理 10.1 のおかげで n 次正方行列 A の逆行列 X が計算できます。逆行列 X の定義は

$$XA = E_n, AX = E_n$$

の両方を満たす行列だったわけですが、片側だけで確認すればいいと定理は教えてくれています。

逆行列の計算（とその有無の判定）方法をまとめておきます。といっても基本的には掃き出し法なんですね。

<u>逆行列の計算（とその有無の判定）方法：</u>

(Step I) 拡大係数行列 $(A|E_n)$ を行基本変形で $(B|X)$（B は被約階段行列）の形になおす。

(Step II) $B \neq E_n$ ならば A は逆行列を持たない。$B = E_n$ ならば X が A の逆行列である。

これで逆行列が求まる理由を説明しておきます：

- 行基本変形というのは基本行列 $P = P_n(i,j;c)$ or $Q_n(i;c)$ or $R_n(i,j)$ を左から掛けてやることでした：

$$(A|E_n) \xrightarrow{P_1\times} (P_1A, P_1) \xrightarrow{P_2\times} (P_2P_1A|P_2P_1) \xrightarrow{P_3\times} (P_3P_2P_1A|P_3P_2P_1) \xrightarrow{P_4\times} \cdots \xrightarrow{P_s\times} (B|X)$$

- 最終的な形を見ていただくと

(11-8)
$$B = P_s \cdots P_2P_1A, \quad X = P_s \cdots P_2P_1.$$

となっていることが見て取れますね。よって、

(11-9)
$$B = XA$$

であることに注意しておきます。

- B はいま被約階段行列なので階数を見てやって

(i) $\mathsf{rank}\, B = n$ ならば補題 10.3 より $B = E_n$ であり、等式 (11-9) より $XA = E_n$ なので X は A の逆行列なのです。

(ii) $\mathsf{rank}\, B < n$ ならば定理 10.1 より A は正則ではないとわかります。

11.0.1　例題

例 11.1. 次の行列 A の正則性を判定し正則な場合は逆行列を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

教科書演習書等にある練習問題をいろいろ解いてみて下さい。

12　行列の方程式：$AX = U$.

　ついでと言ってはなんですが、次の方程式を考察しましょう。$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $m \times k$ 行列 $U = (u_{i\ell})$ に対する方程式

$$AX = U$$

ここで $X = (x_{jk})$ は未知数を成分とする $n \times k$ 行列です。

　行列の積はややこしかったんですが、行列の等号 $AX = U$ が成り立つというのは各列ベクトルが等しいということに他なりませんでした。AX の第 j 列ベクトルは $A\vec{x}_j$ なので、結局は

$$AX = U \iff A\vec{x}_j = \vec{u}_j \text{ for all } j = 1, 2, \ldots, k$$

という同値関係を得ます。右側の命題から、行列の方程式 $AX = U$ は単なる連立一次方程式ということが判ります。

解き方：掃き出し法と同様に次の様にすればいいです：

1．拡大係数行列 $(A|U)$ を行基本変形で $(B|V)$（B は被約階段行列）の形になおす。
2．方程式が解を持つための必要十分条件は B の階数と $(B|V)$ の階数が等しいことである。
3．解が存在する場合は掃き出し法と同様に解を表示する。

第 III 部
行列式

ここからは行列式について解説します。

13　順列

教員 M :「今日は順列について講義します。」
学生 A :「順列って、あの文字を並べる階乗がでてくるやつですか？」
教員 M :「はい。n 文字の並び替えるパターンの総数は $n!$ になる、って高校で習ったあれです。」
学生 B :「なんでそんなんするん？線形代数ネタ切れ？」
教員 M :「そんなことはなくて、行列式という大切なものの準備です。」
学生 C :「でも、いまさら順列についてなにを勉強するんですか？」
教員 M :「並び替える方法についてですね。次の素朴な問題を考えてみましょう。」

問題 13.1. 9 文字の列 $e = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ を列 $\sigma = (2, 8, 4, 3, 6, 1, 5, 9, 7)$ に並び替えるためには隣り合う二文字の入れ替えを何回繰り返せばいいか、その最小の回数を求めよ。

教員 M :「“隣り合う二文字の入れ替え” というのはたとえば、

$$(\cdots, 2, 3, \cdots) \to (\cdots, 3, 2, \cdots)$$

みたいな隣り合う二つの文字の入れ替えのことを言います。」

今日は行列もベクトルもほおっておいて、ボチボチこういう問題を考えていきましょう。

13.1　n 文字の順列の集合 S_n

順列をいちいち数字を並べて書いていたのでは身が持たないので、記号を設定しましょう。
以下 n を 1 以上の自然数として、何も言わなければ順列というのは n 文字 $1, 2, 3, \cdots, n$ の順列のことをいうことにします。
（偉そうにかいてるけれど、「順列というのは文字の並び替えです。」といってるのと大差ないですね。）

13.1.1　順列 σ の表し方

順列のことを σ であらわすことにします。つまり、「順列 σ」と書いたら「σ というのは $1, 2, \cdots, n$ の順列のどれか」という意味です。
順列の表記としては、順列 σ において i 番目にならんでる数を $\sigma(i)$ とあらわします。

例 13.2. $n = 9$ で上の問題 13.1 の順列 $\sigma = (2, 8, 4, 3, 6, 1, 5, 9, 7)$ であれば

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 8, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 3, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 1, \sigma(7) = 5, \sigma(8) = 9, \sigma(9) = 7$$

ということです。

13.1.2　自明な順列 e

何にも並び替えない順列を e と書き、これを自明な順列とよびます。つまり、

$$e := (1, 2, 3, \cdots, n).$$

別の言い方では $e(i) = i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ということですね。

13.1.3　順列の集合 S_n

定義 13.3. n 文字 $1, 2, 3, \cdots, n$ の順列の集合を S_n とあらわす。

久しぶりに集合が出てきたので復習しておくと、集合の運用で大切なのは、

文章「$\sigma \in S_n$」の意味は「σ は n 文字の順列である」

ということでした。n が小さい場合は要素（n 文字の順列）を全て書き下すのは容易ですね。

例 13.4.

$$S_1 = \{(1)\},\ S_2 = \{(1,2),\ (2,1)\},\ S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}.$$

13.1.4　集合の要素を表す記号

n 文字の並び替えのパターンの総数は $n!$ 個である、というのは皆さんご存知ですね。その事実を集合 S_n を用いてい言いなおすと、集合 S_n の要素の個数は $n!$ 個である、ということになります。

集合の要素を表す記号を導入しておきます：

定義 13.5. 有限集合 X の要素の個数を $\#X$ または $|X|$ であらわす：

$$\#X := |X| := X \text{ の要素の個数}.$$

この記号をつかうと、上で言った事実はさらにカッコよく書けますね：

$$\#S_n = n!.$$

13.2　転倒数、符号数

定義 13.6 (転倒数、符号数（教科書 p. 90）)**.** (1) 順列 $\sigma \in S_n$ に対して並び順 $i < j$ と並んでる数の大小関係 $\sigma(i) > \sigma(j)$ の入れ替わってる文字の組 (i, j) を転倒対と呼びます。

つまり、転倒対の集合は以下で与えられます：

$$\mathcal{N}_\sigma := \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

(2) 順列 $\sigma \in S_n$ に対してその転倒対の個数を<u>転倒数</u>と呼び N_σ と表す。

つまり、N_σ はつぎで定義されます。

$$N_\sigma := \#\mathcal{N}_\sigma = \#\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

(3) 順列 σ の<u>符号数</u>を $\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{N_\sigma}$ と定義する。

学生 A :「なに言ってんだかわからん。転倒数ってどうやって計算するの？」
教員 M :「順列 σ は数の並びで与えられるから、それを用いて計算すればいいのです。」

転倒対の定義は (i,j) の条件で与えられているけれど、順列 σ は数の並び $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ で与えられますね。この表記をつかって転倒対を勘定するには、

Step 1. 各 $i = 1, 2, \cdots, n-1$ にたいして $\sigma(i)$ よりも後に並んでる数 $\sigma(j)$ $\ j = i+1, \cdots, n$ で $\sigma(i)$ よりも小さいものの個数を数えて、

Step 2. その数を $i = 1, 2, \cdots, n-1$ に関して足しあげればいいのです。

Step 3. 数え漏れがないか確認しよう。

例 13.7. $n = 9$ で上の問題 13.1 の順列 $\sigma = (2,8,4,3,6,1,5,9,7)$ の転倒数を求めましょう。

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 8, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 3, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 1, \sigma(7) = 5, \sigma(8) = 9, \sigma(9) = 7$$

でした。

Step 1. $i = 1$ $\sigma(1) = 2$ でした。こいつよりも右に並んでいて、こいつよりも小さい数って $1 = \sigma(6)$ しかないですね. ここで見つかった転倒対は一つだけで、それは $(1,6)$ ですね。

$i = 2$ $\sigma(2) = 8$ でした。こいつよりも右に並んでいて、こいつよりも小さい数って沢山ありますね。$\sigma(3) = 4, \sigma(4) = 3, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 1, \sigma(7) = 5, \sigma(9) = 7$
なので転倒対は 6 つあって、$(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,9)$ です。

いかこんな感じで求めていきます。転倒対と個数だけ書いていきます。

$i = 3$ $(3,4), (3,6)$. 二個

$i = 4$ $(4,6)$ 一個

$i = 5$ $(5,6), (5,7)$ 二個

$i = 6$ 無し

$i = 7$ 無し

$i = 8$ $(8,9)$ 一個

転倒対の集合を書き下しておきましょう :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\sigma = \{&(1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ &(2,7), (2,9), (3,4), (3,6), (4,6), (5,6), (5,7), (8,9)\}\end{aligned}$$

Step 2. 上で求まった数を足せばいいので転倒数は

$$N_\sigma = 1 + 6 + 2 + 1 + 2 + 1 = 13$$

13.2.1 $d(\sigma; A)$

ついでに行列式の定義の補助記号も導入しておきます。（複雑だと思ったらぼちぼちでいいので慣れましょう。）

定義 13.8. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と順列 $\sigma \in S_n$ にたいして

$$d(\sigma; A) := \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

と定めます。

この式の読み方を解説します。

(I) $d(\sigma; A)$ は記号からわかる通り、順列 σ と n 次正方行列 A から定まります[4]。

(II) 順列 σ が与えられると $i = 1, 2, \cdots, n$ にたいして i 番目に並んでいる文字 $\sigma(i)$ が定まります。$d(\sigma; A)$ に現れる $a_{\sigma(1),1}$ は行列 A の第 $(\sigma(1), 1)$ 成分です。同様に $a_{\sigma(i),i}$ は行列 A の第 $(\sigma(i), i)$ 成分です。

(III) $d(\sigma; A)$ は、

符号数 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ と

行列 A の成分で σ から定められるやつら $a_{\sigma(1),1}$, $a_{\sigma(2),2}, \cdots, a_{\sigma(n),n}$ の

掛け算です。

13.2.2 行列式 $\det A$

さらに、ついでに行列式も導入しておきましょう。これは次回以降に詳しく解説するので、読み流しても構いません。

定義 13.9 (行列式)**.** n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det(A)$ を次の式で定義する：

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} d(\sigma; A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

n 文字の順列 $\sigma \in S_n$ に渡る和をとっています。なので項の個数は $n!$ 個です。

13.2.3 $n = 2$ の場合

感じを掴むために $n = 2, 3$ の場合を具体的に書き下してみましょう。先ずは $n = 2$ の場合から。

順列 σ	転倒数 N_σ	符号数 $\operatorname{sgn}(\sigma)$	$a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2}$
$\sigma_1 = (1, 2)$	0	1	$a_{11} a_{22}$
$\sigma_2 = (2, 1)$	1	-1	$a_{21} a_{12}$

なので $n = 2$ の場合の行列式を定義に戻って計算すると

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = 1 a_{11} a_{22} + (-1) a_{21} a_{12} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

となり、皆さんご存知のものに一致します。

[4] 世の中には記号上に現れていない情報も定義に必要とされることもあるので注意が必要です。

13.2.4 $n=3$ の場合

次は、$n=3$ の場合です。先ず、各自で下の表を完成させましょう。

順列 σ	転倒数 N_σ	符号数 $\mathrm{sgn}(\sigma)$	$a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}$
$\sigma_1=(1,2,3)$	0	1	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$\sigma_2=(1,3,2)$	1	-1	$a_{11}a_{32}a_{23}$
$\sigma_3=(2,1,3)$			
$\sigma_4=(2,3,1)$			
$\sigma_5=(3,1,2)$			
$\sigma_6=(3,2,1)$			

なので $n=3$ の場合の行列式を定義に戻って計算すると

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}=$$

13.3 転倒数の意味

転倒数が問題 13.1 の解を与えてくれます。

順列 σ の「隣り合う二つの文字を入れ替える」というのは、ある i に対して i 番目の文字 $\sigma(i)$ と $i+1$ 番目の文字 $\sigma(i+1)$ を入れ替えることをいうことにします。隣り合う二文字を入れ替えることを繰り返せば、順列 σ をもともとの並び順 e(自明な順列) に並べなおすことができますね。別の言い方をすれば、自明な順列 e から隣り合う二文字を入れ替えていけば任意の順列 σ を作ることができます。実は転倒数というのはその回数の最小値なのです。

定理 13.10 (教科書 補題 4.4+α)**.** *(1)* 順列 σ は N_σ 回隣り合う二つの文字を入れ替えることで自明な順列 e にすることが出来る。別の言い方をすれば、自明な順列 e は N_σ 回隣り合う二つの文字を入れ替えることで順列 σ にすることが出来る。

(2) N_σ はそのような回数の最小値である。

この定理と例 13.7 から問題 13.1 の答えは「13 回」です。

準備の補題が二つあります。一つ目は、自明な順列の特徴づけです。

補題 13.11. 順列 $\sigma\in\mathcal{S}_n$ について次は同値：

(1) σ は自明な順列である。つまり $\sigma=e.$ もっと詳しく言えば、$\sigma(i)=i,\ (i=1,2,\cdots,n)$ が成り立つということです。

(2) 任意の $i<j$ に対して $\sigma(i)<\sigma(j)$ が成り立つ。

(3) 任意の $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ が成り立つ。

(4) 任意の $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\sigma(i) \leq i$ が成り立つ。

(5) 任意の $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\sigma(i) \geq i$ が成り立つ。

(6) 転倒数 $N_\sigma = 0$.

Proof. (4) $\Rightarrow$ (1) の証明だけ与えておきます。

(4) の条件が成り立つと仮定して $\sigma(i) = i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ が成り立つことを i に関する帰納法で示します。

$i = 1$ のとき、$\sigma(1) \leq 1$ より $\sigma(1) = 1$ が従います。

$i \geq 2$ として、$\sigma(j) = j, (j = 1, \cdots, i-1)$ が成り立つと仮定します。$\sigma(i) \leq i$ ですが、$\sigma(i) < i$ ならば、ある $j = 1, \cdots, i-1$ に対して $\sigma(i) = \sigma(j)$ が成り立つことになって矛盾。よって、$\sigma(i) = i$ である。 □

二つ目の準備では、一回隣り合う二つの文字を入れ替えた場合の転倒数の変化を調べます。

補題 13.12. $i = 1, 2, \cdots, n-1$ を考える。

n 文字の順列 $\sigma \in S_n$ にたいして第 i 番目と第 $i+1$ 番目を入れ替えた順列を τ とする。つまり、順列 τ を次の様に定める。

$$\tau(k) = \begin{cases} \sigma(k) & k \neq i, i+1 \\ \sigma(i+1) & k = i \\ \sigma(i) & k = i+1 \end{cases}$$

この時、次が成り立つ。

$$N_\tau = \begin{cases} N_\sigma + 1, & (\sigma(i) < \sigma(i+1) \text{ の場合 }) \\ N_\sigma - 1. & (\sigma(i) > \sigma(i+1) \text{ の場合}) \end{cases}$$

Proof. 隣り合っている二文字 $\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ を入れ替えるので、転倒対で変化するものは $(i, i+1)$ しかないというのがポイントです。

$\sigma(i) < \sigma(i+1)$ の場合、$(i, i+1)$ は順列 σ の転倒対ではないですが順列 τ の転倒対にはなります。

$\sigma(i) > \sigma(i+1)$ の場合、$(i, i+1)$ は順列 σ の転倒対ですが順列 τ の転倒対ではありません。

そして σ と τ の転倒対にはこれ以外の違いはないので表記の結果をえます。 □

目標の定理を証明しましょう。

定理 *13.10* の証明*.* (1) 転倒数 $n = N_\sigma$ に関する帰納法を用います。$n = 0$ の場合は明らか。$n-1$ までは命題は正しいとする。σ を転倒数が $n > 0$ である順列とする。$\sigma \neq e$ なのである i が存在して $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ を満たす。よって σ の i 番目と $i+1$ 番目を入れ替えた順列を τ とおくと $N_\tau = n-1$ が成り立つ。帰納法の仮定から τ は $n-1$ 回の隣り合う文字の入れ替えで自明な順列にすることが出来る。

(2) 補題 13.12 により、σ の i 番目と $i+1$ 番目を入れ替えた順列を τ とおくと次が成り立ちます。

$$N_\tau = \begin{cases} N_\sigma + 1, & (\sigma(i) < \sigma(i+1) \text{ の場合 }) \\ N_\sigma - 1. & (\sigma(i) > \sigma(i+1) \text{ の場合}) \end{cases}$$

つまり、隣り合う二文字を入れ替えることで転倒数が減るのはせいぜい 1 だけです。一方、自明な順列の転倒は $N_e = 0$ だったので、σ を e に並び替えるには少なくとも N_σ 回は隣り合う二文字を入れ替えないといけないというわけです。 □

13.4　入れ替えと順列

隣り合っていない文字を入れ替えた場合は、転倒数の計算は難しいですが、偶奇の変化は簡単に追跡できます。この性質が行列式の交代条件・退化条件を示す際の鍵になります。

補題 13.13 (教科書 p.93, 補題 4.7)**.** σ を 1 から n までの順列とする。順列 σ の第 i 番目と第 j 番目を入れ替えた順列を τ とする。つまり、順列 τ を次の様に定める。

$$\tau(k) = \begin{cases} \sigma(k) & k \neq i, j \\ \sigma(j) & k = i \\ \sigma(i) & k = j \end{cases}$$

この時、次が成り立つ。

$$\mathrm{sgn}(\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma).$$

Proof. この命題は $i < j$ としても一般性を失わない。よって $i < j$ と仮定する。そして $a := j - i$ に関する帰納法でこの命題を証明する。

先ず $a = 1$ のとき。つまり、$j = i + 1$ のとき。これは補題 13.12 そのものです。

次に $a - 1$ までは主張が示されたと仮定する。そして a に対して主張が成り立つことを示す。（ポイントは a の値が小さい入れ替え 3 回を繰り返すことで σ から τ が作れる事です。）

Step 1. σ から $\sigma(i)$ と $\sigma(i+1)$ を入れ替えた順列を λ とおく。

$a = 1$ の場合の主張から $\mathrm{sgn}(\lambda) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$ が成り立つ。

Step 2. 更に、λ から $\lambda(i+1)$ と $\lambda(j)$ を入れ替えた順列を ρ とおく。

$j - (i+1) = j - i - 1 = a - 1$ なので、帰納法の仮定から $\mathrm{sgn}(\rho) = -\mathrm{sgn}(\lambda)$ が成り立つ。

Step 3. 順列 ρ から $\rho(i)$ と $\rho(i+1)$ を入れ替えた順列は τ になる事に注意する。

よって $a = 1$ の場合の主張より、$\mathrm{sgn}(\tau) = -\mathrm{sgn}(\rho)$ が成り立つ。

今までの式を合わせると $\mathrm{sgn}(\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$ が得られる。

	1 番目	$\cdots$	i 番目	$i+1$ 番目	$\cdots$	j 番目	$\cdots$
σ	$\sigma(1)$	$\cdots$	$\sigma(i)$	$\sigma(i+1)$	$\cdots$	$\sigma(j)$	$\cdots$
λ	$\sigma(1)$	$\cdots$	$\sigma(i+1)$	$\sigma(i)$	$\cdots$	$\sigma(j)$	$\cdots$
ρ	$\sigma(1)$	$\cdots$	$\sigma(i+1)$	$\sigma(j)$	$\cdots$	$\sigma(i)$	$\cdots$
τ	$\sigma(1)$	$\cdots$	$\sigma(j)$	$\sigma(i+1)$	$\cdots$	$\sigma(i)$	$\cdots$

$\square$

13.5 逆順列

逆順列が必要になるのは転置行列の行列式に関する等式 $\det {}^t A = \det A$ を導出するとき（定理 17.1）です。それまで、読まなくても構いません。

順列 σ を別の見方をします。自明な文字列 $(1, 2, 3, \cdots, n)$ を順列 $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \cdots, \sigma(n))$ に並び替える命令のことだとおもいましょう[5]。

順列 σ の逆順列 σ^{-1} というものを、元の順番に並び替える命令と定義します。正確な定義は次です。

定義 13.14. 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\sigma^{-1}(i)$ を $\sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$ を満たすものと定める。（こういう数 $j = 1, 2, \cdots, n$ が一意的に定まります。）

写像の言葉でいえば逆写像です。べつの言い方では、$j = 1, 2, \cdots, n$ が $\sigma(j) = i$ を満たす時に $\sigma^{-1}(i) = j$ と定めるということです。しかし、もっと強く次が成り立ちます。

$$\sigma^{-1}(i) = j \Leftrightarrow \sigma(j) = i.$$

もう一つ注意しておきたいのは逆順列の逆順列はもとのものであるということです。つまり、次が成り立ちます：$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

順列 σ と逆順列 σ^{-1} の転倒数は一致します。

補題 13.15. 次が成り立つ：

$$(1)\ N_{\sigma^{-1}} = N_\sigma, \quad (2)\ \mathrm{sgn}\sigma^{-1} = \mathrm{sgn}\sigma.$$

Proof. 順列 σ の転倒対の集合を T_σ と書きます：$T_\sigma := \{(i,j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$. この集合の要素の個数が転倒数なのでした：$N_\sigma := \#T_\sigma$.

σ に関する転倒対 (i,j) に対して対 $(\sigma(j), \sigma(i))$ は σ^{-1} に対する転倒対になっています。σ を σ^{-1} で置き換えれば、σ^{-1} に関する転倒対 (k, ℓ) に対して対 $(\sigma^{-1}(\ell), \sigma^{-1}(k))$ は $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ に対する転倒対になっていることが分かります。この対応により T_σ と $T_{\sigma^{-1}}$ の要素は一対一に対応するので二つの集合の要素の個数は一致します。

（ 別の言い方では写像 $f : T_\sigma \to T_{\sigma^{-1}},\ f(i,j) := (\sigma(j), \sigma(i))$ と写像 $g : T_{\sigma^{-1}} \to T_\sigma,\ g(k,\ell) := (\sigma^{-1}(\ell), \sigma^{-1}(k))$ が互いに逆写像になっているということです。） □

[5]順列は英語では order だし、命令も order ですね。同じ単語が二つの意味を持つようになった理由はこの通りなのだそうです。つまり、司令官が隊列を組めと命令していたことから、oder という単語が双方を指すようになったのだそうです。（ホンマかいな。）（一応、某 web 辞書にはそう説明がありました。）（別の説もあるかもしれませんが。）

14　行列式の導入

14.1　行列式の定義

　定義しないと始まらないので行列式の定義をあたえましょう。

14.1.1　$d(\sigma; A)$

　行列式の定義の補助記を復習しましょう。

定義 14.1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と順列 $\sigma \in S_n$ にたいして

$$d(\sigma; A) := \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

と定めます。

例 14.2. 自明な順列 e というのは $e(1) = 1, e(2) = 2, \cdots, e(n) = n$ を満たす順列でした。転倒数は $N_e = 0$ であり、符号数は $\mathrm{sgn}(e) = (-1)^{N_e} = 1$ でした。
　なので、次が得られます：

$$d(e; A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

14.1.2　行列式の定義

定義 14.3 (行列式)**.** n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det(A)$ を次の式で定義する：

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} d(\sigma; A)$$
$$:= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

n 文字の順列 $\sigma \in S_n$ に渡る和をとっています。なので項の個数は $n!$ 個です。

　学生 A :「こんなん絶対理解できへん」
　教員 M :「うん。難しいですね。でも、とりあえずは、
“正方行列 A から行列式と呼ばれる実数 $\det A$ が定まる ”
　くらいにおもっておけば大丈夫です。」
　学生 A :「え、でも、もっと、なんかこうしっかり理解しないといかんのじゃないの？」
　教員 M :「最終的にはそうです。まあ、でも、理解するというのも一つのミッションなんです。」

　行列式は複雑な与えられ方をしています。なので、パッと見で分からなくても仕方ないです。これも、例によって、使いながら計算しながら慣れていきましょう。

注意 14.4 (焦らずやろう). 行列式は複雑な式で総和 $\sum$ も順列の集合 S_n 上でとっているので意味不明ですね。時間をかけて慣れていくもの学習の課題です。

記号法. 行列式の表記方法としては他に $|A|$ もあります。また行列 A を列ベクトルの集まりとみて $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ と表した場合には行列式を $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ や $|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n|$ と表記する事もあります。

$$\det A = |A| = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = |\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n|.$$

14.2 $1, 2, 3$ 次正方行列の行列式

14.2.1 例：1 次正方行列の行列式

万全を期して 1 次正方行列 $A = (a)$ の行列式を与えておきます。それはもちろん、第 $(1, 1)$ 成分をそのまま取り出した値です：

$$\det(a) = a.$$

14.2.2 例：2 次正方行列の行列式

感じを掴むために $n = 2, 3$ の場合を具体的に書き下してみましょう。先ずは $n = 2$ の場合から。

順列 σ	転倒数 N_σ	符号数 $\operatorname{sgn}(\sigma)$	$a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}$
$\sigma_1 = (1, 2)$	0	1	$a_{11}a_{22}$
$\sigma_2 = (2, 1)$	1	-1	$a_{21}a_{12}$

なので $n = 2$ の場合の行列式を定義に戻って計算すると

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = 1 a_{11}a_{22} + (-1) a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

となり、皆さんご存知のものに一致します。

14.2.3 例：3 次正方行列の行列式

次は、$n = 3$ の場合です。先ず、各自で下の表を完成させましょう。

順列 σ	転倒数 N_σ	符号数 $\operatorname{sgn}(\sigma)$	$a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}$
$\sigma_1 = (1, 2, 3)$	0	1	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$\sigma_2 = (1, 3, 2)$	1	-1	$a_{11}a_{32}a_{23}$
$\sigma_3 = (2, 1, 3)$			
$\sigma_4 = (2, 3, 1)$			
$\sigma_5 = (3, 1, 2)$			
$\sigma_6 = (3, 2, 1)$			

なので$n=3$の場合の行列式を定義に戻って計算すると

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} =$$

15　行列式の基本的な性質

この節では行列式の基本的な性質を紹介します。
先の節で紹介した行列式の諸公式の証明もこれに基づいて行われます。

1 正規化条件

2 多重線形性

3 退化条件

15.1　正規化条件

命題 15.1 (正規化条件)**.** $\det E_n = 1$.

単位行列は上半三角行列なので、これは命題 16.1 の特別な場合ですね。

15.2　多重線型性

多重線型性です。

15.2.1　寄り道：多重線形性は良く知ってることです

2 個の実数の掛け算

$$x_1x_2$$

を考えましょう。実はこの操作も、それぞれの実数 x_1, x_2 に関して多重線形性を持っています。といっても、それは良く知ってる次のことを言ってるにすぎません：

$$(cx_1' + dx_1'')x_2 = cx_1'x_2 + dx_1''x_2, \quad x_1(cx_2' + dx_2'') = cx_1x_2' + dx_1x_2''.$$

n 個の実数の掛け算

$$x_1x_2\cdots x_n$$

もそれぞれの実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して多重線形性を持っています。

15.2.2

命題 15.2 (多重線形性)**.** $|\vec{a}_1, \cdots, \lambda\vec{a}_j' + \mu\vec{a}_j'', \cdots, \vec{a}_n| = \lambda|\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_j', \cdots, \vec{a}_n| + \mu|\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_j'', \cdots, \vec{a}_n|$

いざ証明を書いてみると面倒です。

$$\begin{aligned}
|\vec{a}_1, \cdots, \lambda\vec{a}_j' + \mu\vec{a}_j'', \cdots, \vec{a}_n| &= \sum_{\sigma\in S_n}(\mathrm{sgn}\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots(\lambda a'_{\sigma(j),j} + \mu a''_{\sigma(j),j})\cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}(\mathrm{sgn}\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots\lambda a'_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma\in S_n}(\mathrm{sgn}\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots\mu a''_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \lambda\left(\sum_{\sigma\in S_n}(\mathrm{sgn}\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a'_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n}\right) + \mu\left(\sum_{\sigma\in S_n}(\mathrm{sgn}\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a''_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n}\right) \\
&= \lambda|\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_j', \cdots, \vec{a}_n| + \mu|\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_j'', \cdots, \vec{a}_n|
\end{aligned}$$

15.3 退化条件

退化条件は結構、難しいです。証明のカギは補題 13.13 です。

命題 15.3 (退化条件)**.** n 次正方行列 $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)$ がある i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ に対して $\vec{a}_i = \vec{a}_j$ を満たすとすれば $\det A = 0$ が成り立つ。

Proof. 順列 σ の第 i 番目と第 j 番目を入れ替えた順列を σ' とする。つまり、順列 σ' を次の様に定める。

$$\sigma'(k) = \begin{cases} \sigma(k) & k \neq i, j \\ \sigma(j) & k = i \\ \sigma(i) & k = j \end{cases}$$

この時、次が成り立つのでした：

$$\mathrm{sgn}(\sigma') = -\mathrm{sgn}(\sigma).$$

また、次は明らかです：

$$a_{\sigma(k),k} = a_{\sigma'(k),k} \qquad (k \neq i, j)$$

残りの場合、つまり $k = i$ or $k = j$ のときは、条件 $\vec{a}_i = \vec{a}_j$ から次が分かります。

$$a_{\sigma'(i)\ i} = a_{\sigma(j)\ i} = a_{\sigma(j)\ j},\ a_{\sigma'(j)\ j} = a_{\sigma(i)\ j} = a_{\sigma(i)\ i}.$$

上のことから、次が分かります：

$$d(\sigma; A) = -d(\sigma'; A).$$

順列の集合 S_n の部分集合を以下のように定義する：

$$S^{<} := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}, \quad S^{>} := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

順列 $\sigma \in S_n$ は必ずどちらか一方に属し、両方に属することはない。これを集合論の記号を使ってあらわすと：

$$S_n = S^{<} \sqcup S^{>}.$$

もう一つ、大事なことは上の操作 $\sigma \mapsto \sigma'$ が二つの部分集合 $S^{<}, S^{>}$ に全単射を引き起こすことです。とくに次がなりたちます；

$$S^{>} = \{\sigma' \mid \sigma \in S^{<}\}, \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1' \neq \sigma_2'.$$

これらを合わせると証明が終わります：

$$\begin{aligned} \det A = \sum_{\sigma} d(\sigma; A) &= \sum_{\sigma \in S^{<}} d(\sigma; A) + \sum_{\sigma \in S^{>}} d(\sigma; A) \\ &= \sum_{\sigma \in S^{<}} d(\sigma; A) + \sum_{\sigma \in S^{<}} d(\sigma'; A) \\ &= \sum_{\sigma \in S^{<}} d(\sigma; A) - \sum_{\sigma \in S^{<}} d(\sigma; A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

15.3.1 $n=3, i=1, j=2$ の場合を考えてみよう。

証明は難しいので $n=3, i=1, j=2$ の場合で具体的な例で解説しましょう。今、証明したい命題は

命題. 3 次正方行列 A の第一列と第二列が等しいならば $\det(A)=0$ である。

[証明.] 3 文字 $1,2,3$ の順列の集合 S_3 を次のように二つに分けます。

$$
\begin{aligned}
&S^{<}: \text{一番目の数}\sigma(1)\text{ が二番目の数}\sigma(2)\text{ より小さい。}\\
&S^{>}: \text{一番目の数}\sigma(1)\text{ が二番目の数}\sigma(2)\text{ より大きい。}
\end{aligned}
$$

ポイントは並び替え σ は必ず $S^{<}$ か $S^{>}$ のどちらか一方のみに属しているという事です。例えば σ_1 だと $\sigma_1(1)=1, \sigma_1(2)=2$ なので、そして $1<2$ なので、σ_1 は $S^{<}$ のメンバーです。

具体的に属している元を並べると

$$S^{<}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_4\}, S^{>}=\{\sigma_3,\sigma_5,\sigma_6\}$$

です。二つの集合の間には一つ目の数字と二つ目の数字を入れ替えるという操作 $\sigma\mapsto\sigma'$ で一対一の対応が作れます。（写像の言葉で言えばこれは全単射ということです。）

$$
\begin{aligned}
&S'\leftrightarrow S'',\\
&\sigma_1\leftrightarrow\sigma_3,\\
&\sigma_2\leftrightarrow\sigma_5,\\
&\sigma_4\leftrightarrow\sigma_6.
\end{aligned}
\tag{15-10}
$$

もう一つのポイントはこの対応で符号数は -1 倍されるという事です。（これが補題 13.13 です。）

$$\operatorname{sgn}(\sigma_3)=-\operatorname{sgn}(\sigma_1), -\operatorname{sgn}(\sigma_5)=\operatorname{sgn}(\sigma_2), -\operatorname{sgn}(\sigma_6)=\operatorname{sgn}(\sigma_4). \tag{15-11}$$

第 1 列と第 2 列が等しいという条件 $\vec{a}_1=\vec{a}_2$ をばらすと

$$a_{11}=a_{12},\ a_{21}=a_{22},\ a_{31}=a_{32}$$

ですね。これをつかうと次が分かります：

$$d(\sigma_1;A)=-d(\sigma_3;A),\ d(\sigma_2;A)=-d(\sigma_5;A),\ \ d(\sigma_4;A)=-d(\sigma_6;A)$$

さあ行列式を計算しましょう。

$$
\begin{aligned}
\det(A)=\ & d(\sigma_1;A)+d(\sigma_2;A)+d(\sigma_4;A) && (S^{<}\text{に関する和})\\
&+d(\sigma_3;A)+d(\sigma_5;A)+d(\sigma_6;A) && (S^{>}\text{に関する和})\\
=\ & d(\sigma_1;A)+d(\sigma_2;A)+d(\sigma_4;A)\\
&-d(\sigma_1;A)-d(\sigma_2;A)-d(\sigma_4;A)\\
=\ & 0.
\end{aligned}
$$

□

15.4　交代条件

行列式の基本的な三つの性質の他にも大事な性質があります。
交代条件です。命題 16.2 の (R) そのものです。

命題 15.4 (交代条件)**.** 二つの自然数 i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ を取ってくる。n 次正方行列 A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて出来る行列を B とする。このとき、次が成り立つ。

$$\det B = -\det A$$

15.4.1　寄り道：多重線形性を使って展開

二つの実数の掛け算は多重線形性を持つことを注意しました。実は、それを使って掛け算の展開をしていたことを見直しておきます：

$$\begin{aligned}(x_1' + x_1'')(x_2' + x_2'') &= x_1'(x_2' + x_2'') + x_1''(x_2' + x_2'') \\ &= x_1'x_2' + x_1'x_2'' + x_1''x_2' + x_1''x_2''\end{aligned}$$

ここまでは、式変形に多重線形性しか使っていませんね。

15.4.2　証明その 1

多重線形性と退化条件のみを用いて交代条件を示します。

Proof. 次の行列式を考える：

$$D = |\cdots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \cdots|$$

ただし、二つの $\vec{a}_i + \vec{a}_j$ は第 i 列と第 j 列にあり、それ以外の列ベクトルは A のそれと一致する。
退化条件より $D = 0$ である。一方、多重線形性を用いて D を展開してみる：

$$\begin{aligned}D &= |\cdots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \cdots| \\ &= |\cdots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots| + |\cdots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_j, \cdots| \\ &= |\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_i, \cdots| + |\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots| + |\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots| + |\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_j, \cdots| \\ &= |\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots| + |\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots|\end{aligned}$$

最後の等号は退化条件を用いた。
このことから

$$\det(B) = |\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots| = -|\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots| = -\det(A)$$

が従う。 □

15.4.3　証明その２

行列式の定義に戻って証明します。

交代条件の証明 その２．（この証明の中では i,j は命題の主張の中で固定した自然数を表します。なので、一般の成分の位置を表すのに k,l を用いることにします。）

行列 A,B の第 (k,l) 成分を a_{kl}, b_{kl} と書きましょう。すると、B の作り方から次が成り立つ：

$$a_{ki} = b_{kj},\ a_{kj} = b_{ki},\ a_{kl} = b_{kl}\ (l \neq i,j). \tag{15-12}$$

順列 σ に対して i 番目と j 番目を入れ替えたやつを σ' と書くことにします。（補題 13.13 だと τ と書いてたやつです。）

$$a_{\sigma(i)i} = b_{\sigma(i),j} = b_{\sigma'(j),j},\ a_{\sigma(j)j} = b_{\sigma(j),i} = b_{\sigma'(i),i},\ a_{\sigma(l)l} = b_{\sigma(l),l} = b_{\sigma'(l),l}\ (l \neq i,j).$$

（それぞれの式変形において、一つ目の等号では等式 15-12 を用いています。二つ目の等号は σ' の定義です。）

補題 13.13 より $\mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma')$ なので次をえる：

$$d(\sigma;A) = \mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2} \times \cdots \times a_{\sigma(n),n} = -\mathrm{sgn}(\sigma')b_{\sigma'(1),1}b_{\sigma'(2),2} \times \cdots \times b_{\sigma'(n),n} = -d(\sigma';B).$$

故に行列式の定義より

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} d(\sigma;A) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} -d(\sigma';B) \\ &= -\sum_{\tau \in S_n} d(\tau;B) = -\det B\end{aligned}$$

最後から二つ目の等号の説明をします。総和記号 $\sum$ で和をとる変数の変更は高校以来おなじみですね。例えば下の等号は理解出来ますよね。$m = n+1$ とおけばいいすよね。

$$\sum_{n=1}^{100} x_{n+1} = \sum_{m=2}^{101} x_m$$

ここでも同じで、和をとる変数を σ から τ に変更しているだけです。つまり $\tau = \sigma'$ とおいています。

今までと少しだけ異なるのは和をとる範囲 S_n が変わっていない点です。和 $\sum\limits_{\sigma \in S_n}$ は順列 σ に関する和をとるという意味でした。要点は σ が全ての順列をひとつづつ動いていくときに σ' も全ての順列をひとつづつ動いていくことです。つまり $\{\sigma' \mid \sigma \in S_n\} = S_n$ が成り立ちます。それ故、和をとる範囲は変わらないのです。 □

15.5 退化条件 v.s. 交代条件

実は、交代条件とを使って退化条件を導出することも可能です。図式的にあらわすと

$$（交代条件）\Longrightarrow（退化条件）$$

ということです。

証明しておきましょう。

n 次正方行列 A の第 i 列と第 j 列が一致しているとします。$\vec{x} := \vec{a}_i = \vec{a}_j$ とおきましょう。すると、以下のようにして $\det A = -\det A$ が交代条件から導出できます。よって、$\det A = 0$ と結論できます。

$$\begin{aligned}
\det A &= |\cdots \overset{i}{\vec{x}} \cdots \overset{j}{\vec{x}} \cdots| \\
&= |\cdots \overset{i}{\vec{a}_i} \cdots \overset{j}{\vec{a}_j} \cdots| \\
&= -|\cdots \overset{i}{\vec{a}_j} \cdots \overset{j}{\vec{a}_i} \cdots| \\
&= -|\cdots \overset{i}{\vec{x}} \cdots \overset{j}{\vec{x}} \cdots| \\
&= -\det A
\end{aligned}$$

三つ目の等号で交代条件を用いています。

教員 M :「なので、教科書の抽象的な行列式の定義でも退化条件の代わりに交代条件から出発してもいいのです。」

学生 A :「これだったら退化条件よりも交代条件を定義に入れるほうがいい気がする。だって、交代条件だけから退化条件が出てくるけれど、退化条件から交代条件を出すには多重線形性がいるやん。」

教員 M :「そうですね。そうなんですけれど、、、、、」

上の証明で密に “$\det A = -\det A \ \Rightarrow \det A = 0$” という関係を使っていますね。

じつはこれが成立しないような数体系も世の中にはあるのです。

そういう場合もあることを考慮すると、やはり、教科書の通りに正規化条件、多重線形性、退化条件を行列式の基本的な性質と見るのが適切に思えてきます。

16　行列式の計算

この節では行列式を計算する方法を説明します。
基本方針は

Step 1. 正方行列 A を行と列の基本変形を繰り返して上半三角行列に直す。

基本変形の際の行列式の変換公式が大切です。

Step 2. 上半三角行列の行列式の公式を用いると A の行列式が計算できる。

ということです。なので、まず、基本変形に対する行列式の変換公式と上半三角行列の行列式の公式を説明します。

16.1　行列式を計算するための基礎公式

16.1.1　上半三角行列の行列式

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ が上半三角型とは $i>j$ ならば $a_{ij}=0$ が成り立つことをいいます。対角線よりも下側の成分がすべて 0 である正方行列です。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

命題 16.1. n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ が上半三角型ならば行列式は対角成分の積である。つまり、次がなりたつ：

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

Proof. 自明でない順列 $\sigma\in S_n,\ \sigma\neq e$ を持ってくる。$\sigma\neq e$ なので補題 13.12 の対偶よりある $i=1,2,\cdots,n$ で $\sigma(i)>i$ となるものが存在する。A が上半三角という仮定から $a_{\sigma(i)i}=0$ である。よって、$d(\sigma;A)=0$ である。

ゆえに、A の行列式を定義に基づいて計算すれば

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} d(\sigma;A)=d(e;A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

をえる。最後の等号は例 14.2 を使っている。 □

16.1.2　行と列の基本変形にともなう行列式の変化

基本変形 $(+\alpha)$ に関する行列式の変形の規則を述べて、あとで図解します。

命題 16.2. c を実数とする。　次が成り立つ：

(P) - 行列 A のある行の c 倍を別の行に足した行列を B とすると $\det B = \det A.$

- 行列 A のある列の c 倍を別の列に足した行列を B とすると $\det B = \det A.$

(Q) - 行列 A のある行を c 倍した行列を B とすると $\det B = c \det A.$

- 行列 A のある列を c 倍した行列を B とすると $\det B = c \det A.$

(R) - 行列 A のある行を別の行と入れ替えた行列を B とすると $\det B = -\det A.$

- 行列 A のある列を別の列と入れ替えた行列を B とすると $\det B = -\det A.$

注意 16.3 $(+\alpha)$. 命題 16.2 の操作で基本変形ではないものが一つだけありますね。それは $c = 0$ の場合の (Q) です。行や列を 0 倍するという操作は基本変形ではありませんでした。しかし、今の場合はそれも考えています。

行や列を 0 倍するというのはつまり、その行か列を 0 にしてしまうということですね。なので、次が判ります。

系 16.4. 正方行列 A はある行、またはある列が 0 ベクトルであれば行列式は 0 である。

命題 16.2 を基本行列を用いて書いておきましょう。

命題 16.5. c を実数、i, j を $1 \leq i < j \leq n$ を満たす自然数とする。　次が成り立つ：

(P) - $\det(P_n(i, j; c)A) = \det A$

- $\det(AP_n(i, j; c)) = \det A$

(Q) - $\det(Q_n(i; c)A) = c \det A$

- $\det(AQ_n(i; c)) = c \det A$

(R) - $\det(R_n(i, j)A) = -\det A$

- $\det(AR_n(i, j)) = -\det A$

証明の仕方. 列の基本変形 $+\alpha$ に関しての証明は教科書 p86, 命題 4.2 です。ただし、多重線形と性退化条件を用います。

行に関しては転置行列に関する行列式の性質（定理 17.1）を用いて列の場合に帰着することで証明できます。 □

16.1.3　3 次の場合の説明

(P)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+\lambda c & c \\ d & e+\lambda f & f \\ g & h+\lambda i & i \end{vmatrix}$$

第3列をλ倍して第2列に加えた。
行列式の値は変わらない。

(Q)
$$\begin{vmatrix} a & \lambda b & c \\ d & \lambda e & f \\ g & \lambda h & i \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

第2列からλを括り出した。

(R)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$$

第3列と第1列とを入れ換えた。
行列式は −1 倍される。

◎行も同様。

16.2 行列式の計算

例

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

第3行から3を括り出した。

$$= 3\times(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \downarrow +1$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \downarrow -2$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \downarrow -1$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

上半三角

$$= -3\times 1\times 1\times -1$$

$$= 3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

16.3 サラスの公式

$$
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}
$$

$$
= aei + bfg + chd
$$

$$
- ceg - bdi - ahf
$$

4次以上では

こんなに簡単ではない!

新しいセクション 1 - 1 ページ

4 次以上ではこんなに簡単に計算できない。

4 次以上で同じことをやったら<u>恥をサラスことになるので</u>注意してください。

17　行列式の公式

行列式に関して二つの公式を示します。

17.1　転置行列の行列式

次を示しましょう。

定理 17.1 (教科書 p. 95, 定理 4.9)**.** $\det {}^t A = \det A$.

教科書の証明は基本変形による分解をもちいています。ここでは逆順列を用います。

17.1.1　逆順列

順列 σ を別の見方をします。自明な文字列 $(1, 2, 3, \cdots, n)$ を順列 $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \cdots, \sigma(n))$ に並び替える命令のことだとおもいましょう[6]。

順列 σ の逆順列 σ^{-1} というものを、元の順番に並び替える命令と定義します。正確な定義は次です。

定義 17.2. 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\sigma^{-1}(i)$ を $\sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$ を満たすものと定める。（こういう数 $j = 1, 2, \cdots, n$ が一意的に定まります。）

写像の言葉でいえば逆写像です。べつの言い方では、$j = 1, 2, \cdots, n$ が $\sigma(j) = i$ を満たす時に $\sigma^{-1}(i) = j$ と定めるということです。しかし、もっと強く次が成り立ちます。

$$\sigma^{-1}(i) = j \Leftrightarrow \sigma(j) = i.$$

もう一つ注意しておきたいのは逆順列の逆順列はもとのものであるということです。つまり、次が成り立ちます：$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

順列 σ と逆順列 σ^{-1} の転倒数は一致します。

補題 17.3. 次が成り立つ：

$$(1)\ N_{\sigma^{-1}} = N_\sigma, \quad (2)\ \mathrm{sgn}\sigma^{-1} = \mathrm{sgn}\sigma.$$

Proof. 順列 σ の転倒対の集合を T_σ と書きます：$T_\sigma := \{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$. この集合の要素の個数が転倒数なのでした：$N_\sigma := \#T_\sigma$.

σ に関する転倒対 (i, j) に対して対 $(\sigma(j), \sigma(i))$ は σ^{-1} に対する転倒対になっています。σ を σ^{-1} で置き換えれば、σ^{-1} に関する転倒対 (k, ℓ) に対して対 $(\sigma^{-1}(\ell), \sigma^{-1}(k))$ は $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ に対する転倒対になっていることが分かります。この対応により T_σ と $T_{\sigma^{-1}}$ の要素は一対一に対応するので二つの集合の要素の個数は一致します。

（ 別の言い方では写像 $f : T_\sigma \to T_{\sigma^{-1}},\ f(i, j) := (\sigma(j), \sigma(i))$ と写像 $g : T_{\sigma^{-1}} \to T_\sigma,\ g(k, \ell) := (\sigma^{-1}(\ell), \sigma^{-1}(k))$ が互いに逆写像になっているということです。） □

[6] 順列は英語では order だし、命令も order ですね。同じ単語が二つの意味を持つようになった理由はこの通りなのだそうです。つまり、司令官が隊列を組めと命令していたことから、oder という単語が双方を指すようになったのだそうです。（ホンマかいな。）（一応、某 web 辞書にはそう説明がありました。）（別の説もあるかもしれませんが。）

17.1.2　定理 17.1 の証明。

Proof. 簡単の為に $b_{ij} := a_{ji},\ B := {}^tA = (b_{ij})$ とおきましょう。各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $k = \sigma(i)$ とおけば $b_{\sigma(i),i} = a_{i,\sigma(i)} = a_{\sigma^{-1}(k),k}$ が成り立ちます。更に i が $1, \cdots, n$ を動くときに $k = \sigma(i)$ も 1 から n までを動くことと上の補題を用いると次が成り立ちます：

$$d(\sigma, B) = (\mathrm{sgn}\sigma)b_{\sigma(1),1}b_{\sigma(2),2}\cdots, b_{\sigma(n),n} = (\mathrm{sgn}\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(1),1}a_{\sigma^{-1}(2),2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} = d(\sigma^{-1}, A)$$

左辺を全ての順列 σ に関して足し上げたものが $B = {}^tA$ の行列式でした。一方、σ が全ての順列を動くとき σ^{-1} も全ての順列を動くので右辺を全ての順列 σ に関して足し上げたものは A の行列式に一致します。

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma\in S_n} d(\sigma; {}^tA) = \sum_{\sigma\in S_n} d(\sigma^{-1}; A) = \sum_{\tau\in S_n} d(\tau; A) = \det A.$$

□

転置行列をとるという操作は行と列を入れ替えるので、いままで列に関して示している行列式の性質が行にたいしても成立することが示せます。

17.2　ブロック分解

ブロック分解に関する公式です。

定理 17.4 (教科書 p. 96 命題 4.12)**.** n 次正方行列 A と m 次正方行列 B と $n\times m$ 行列 C に対して

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B\end{pmatrix} = \det A \det B$$

教科書の証明は後で説明する行列式の抽象的な特徴づけを用いています。そちらも面白いのでぜひ勉強してください。

ここでは順列をもちいた証明を与えておきます。

$\tau \in S_n,\ \rho \in S_m$ から $n+m$ 文字の順列 $\sigma = (\tau, \rho) \in S_{n+m}$ を以下で定義する。

$$\sigma(i) := \begin{cases} \tau(i) & i = 1, \cdots, n \\ \rho(i-n)+n & i = n+1, \cdots, n+m \end{cases}$$

つまり、順列 $\sigma = (\tau, \rho)$ というのは $n+m$ 文字 $1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, n+m$ の順列なんですが、最初の n 文字 $1, 2, \cdots, n$ は τ で並び替えて、残りの m 文字 $n+1, n+2, \cdots, n+m$ で並び替えるという並び替え方なんですね。

次の補題は転倒対の意味を考えれば明らかです。

補題 17.5. 次が成り立つ：$N_{(\tau,\rho)} = N_\tau + N_\rho, \quad \mathrm{sgn}(\tau, \rho) = (\mathrm{sgn}\tau)(\mathrm{sgn}\rho)$

次が大事です。

補題 17.6. 順列 $\sigma \in S_{n+m}$ が (τ, ρ) の形をしているための必要十分条件は $\sigma(i) \le n$ が $i = 1, \cdots, n$ が成り立つことである。

Proof. 必要条件であることは明らか。十分条件であることを示す。$\sigma(i) \leq n$ が $i = 1, \cdots, n$ が成り立つとする。このとき $j = 1, \cdots, n$ に対してある $i = 1, \cdots, n$ が存在して $j = \sigma(i)$ を満たす。よって任意の $i = n+1, \cdots, n+m$ に対して $\sigma(i)$ は $j = 1, \cdots, n$ のどれでもない。つまり $n+1 \leq \sigma(i) \leq n+m$ が $i = n+1, \cdots, n+m$ が成り立つ。 □

これを使って次を示すことが出来る。

定理 *17.4* の証明. $X = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ とおき、これの (i,j) 成分を x_{ij} とおく。すると $x_{ij} = 0$ が $1 \leq j \leq n,\ n+1 \leq i \leq n+m$ を満たす i, j の組にたいして成り立つことに注意する。このことから、順列 $\sigma \in S_n$ がある $i = 1, \cdots, n$ に対して $n < \sigma(i)$ を満たせば $d(\sigma, X) = 0$ である。つまり σ が (τ, ρ) の形に表せないとき $d(\sigma, X) = 0$ である。

さらに、上の補題から $d((\tau,\rho), X) = d(\tau, A)d(\rho, B)$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \det X &= \sum_{\sigma \in S_{n+m}} d(\sigma, X) = \sum_{\tau \in S_n, \rho \in S_m} d((\tau,\rho), X) \\ &= \sum_{\tau \in S_n, \rho \in S_m} d(\tau, A)d(\rho, B) = (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

□

18 基本ベクトル：とても当たり前、だけれど、とても重要

定義 18.1 (基本ベクトル). 自然数 n を固定します。自然数 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の第 i 基本ベクトル $\vec{e_i}$ を第 i 成分が 1 でありそれ以外の成分が 0 であるベクトルとして定義します。記号には空間の次元 n は現れてきていませんが、それは文脈上指定されています。

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots, \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots, \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots, \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注意しておきたいのは基本ベクトルを番号順に並べて得られる n 次正方行列は単位行列 E_n であるということです。

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n) = E_n.$$

単位行列の列ベクトルを順列 σ で並び替えた行列の行列式が上の命題 13.10 から計算できます。

系 18.2. $|e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}| = \mathrm{sgn}\sigma$

次の問題は簡単な式変形だけれど、後期にも出てくる重要なものです。

練習問題 18.3. n 次元数ベクトル $\vec{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ が以下の式を満たすことを確認せよ。

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

18.1　$n = 2$ の場合

とても、当たり前なことをやっているということの説明のために $n = 2$ の場合を明記しおきます。

まず基本ベクトルですが、次ですね：

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

こいつらを順に並べた行列が単位行列 E_2 であることもあきらかですよね：

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix}.$$

練習問題 18.3 で言っているのも当たり前のことで 2 次数ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が次の和であらわされるということです：

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2. \tag{18-13}$$

18.2　$n = 3$ の場合

とても、当たり前なことをやっているということの説明のために $n = 3$ の場合を明記しおきます。

まず基本ベクトルですが、次ですね：

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

こいつらを順に並べた行列が単位行列 E_3 であることもあきらかですよね：

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

練習問題 18.3 で言っているのも当たり前のことで 3 次数ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ が次の和であらわされるということです：

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \tag{18-14}$$

19　抽象的な性質からの行列式が決定されること

行列式が三つの条件　正規化条件、退化条件、多重線形性を満たすことをみてきました。いまからはこの三つの条件を考察します。目標は定理 19.1(教科書の定理 4.8) を示し、その応用として三つの条件が行列式を決定することを示すことです。

まず、目標の定理は次です。

定理 19.1 (教科書 p. 94 の定理 4.8 の前半)**.** n を自然数とする。n 次正方行列 A に対して実数 $F(A)$ を対応させる写像 F が多重線形性と退化条件を満たしたとする。すると、次が成り立つ。

$$F(A) = (\det A)F(E_n)$$

（右辺は A の行列式 $\det A$ と E_n における F の値の（実数同士の）掛け算です。）

多重線形性と退化条件をみたす F は実は行列式（を対応させる写像）の定数倍になっていて、しかもその定数が $F(E_n)$ である、ということを主張している定理です。

正規化条件というのは $F(E_n) = 1$ ですから、上の定理から次が従います。

定理 19.2 (教科書 p. 94 の定理 4.8 の後半)**.** n を自然数とする。n 次正方行列 A に対して実数 $F(A)$ を対応させる写像 F が多重線形性と退化条件と正規化条件を満たしたとする。すると、次が成り立つ。

$$F(A) = \det A.$$

つまり、三つの条件を満たす F は行列式（を対応させる写像）しかないということを主張しています。

定理 19.1 の証明は教科書の通りで、数式が把握できればそう難しくありません。感じをつかむために $n = 2$ の場合を解説します。教科書の証明を読んで理解できればこれ以降を読む必要はありません。

19.1　$n = 2$ の場合を証明しよう。

以降では F は 2 次正方行列 A に対して実数 $F(A)$ を対応させる写像とします。さらに A の列ベクトル表示 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ に対して

$$F(A) = F(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

とあらわすことにします。

前回の講義と同様の方法に F も交代条件を満たすことが示されます：

命題 19.3 (交代条件)**.** 2 次正方行列 A に対して実数 $F(A)$ を対応させる写像 F が多重線形性と退化条件を満たすとする。このとき任意の 2 次元列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ に対して次がなりたつ。

$$F(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = -F(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

2 次正方行列 A の列ベクトルと成分の関係を明らかにしましょう。二通りの表示 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が与えられたとすると、等式 (18-13) を使うと次が成り立つことがわかりますね。

$$\vec{a}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \quad \vec{a}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \tag{19-15}$$

ここで $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ は 2 次元の場合の基本ベクトルです。

証明は $F(A) = F(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ に式 (19-15) を代入して、多重線形性で展開して、退化条件と交代条件を使って式を整理することで得られます。n が一般の場合も同じなので段階を踏んで書いていってください。

$$
\begin{aligned}
F(A) = F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) &= F(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \vec{a}_2) \\
&= a_{11}F(\vec{e}_1, \vec{a}_2) + a_{21}F(\vec{e}_2, \vec{a}_2) \qquad \text{（第 1 列に関する多重線形性を用いた。）} \\
&= a_{11}F(\vec{e}_1, a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) + a_{21}F(\vec{e}_2, a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) \\
&= a_{11}a_{12}F(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_{11}a_{22}F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_{21}a_{22}F(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \\
&= a_{11}a_{22}F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \quad \text{（退化条件、交代条件を用いて式を簡単にする。）} \\
&= (\det A)F(E_2).
\end{aligned}
$$

20　行列式と正則性

20.1　行列式と積の関係

次の公式も大事です。

定理 20.1 (教科書 p95, 定理 4.9)**.** n 次正方行列 A, B にたいして次が成り立つ：

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

左辺は行列の積 AB の行列式 $\det(AB)$ であり、右辺はそれぞれの行列の行列式 $\det A, \det B$ の（実数の）積 $(\det A)(\det B)$ です。

20.2　行列式と正則性

行列式の最も大事な性質の一つはそれによって正則性が判定できることです。

定理 20.2 (教科書 p103, 定理 4.16)**.** n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ である。

A が正則であるとき、逆行列の行列式は次で計算できる：

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \tag{20-16}$$

左辺は逆行列 A^{-1} の行列式であり、右辺は A の行列式 $\det A$ の実数としての逆数 $(\det A)^{-1}$ です。

最初の命題の十分性（つまり、$\det A \neq 0$ であれば A は正則）の証明は教科書では単に正則性を示す、というだけでなく逆行列の構成方法を与えています。ここではもう少し場当たり的な別証明を与えておきます。

定理 *20.2* の証明. 必要性と等式 (20-16) の証明は一度にできます。

A を正則と仮定しましょう。すると逆行列 A^{-1} が存在します。行列式の積公式と正規化条件を使うと次の式が得られますね：

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det AA^{-1} = \det E_n = 1$$

このことから $\det A \neq 0$ であり、$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ であることがわかります。

十分性の証明：対偶を示す。つまり、A が非正則行列ならば $\det A = 0$ であることを示す。

n 次正方行列 A を非正則とすると階数が n 未満なので、行基本変形によって n 次正方行列 B で第 n 行が 0 ベクトルであるものに変形できる。つまり、正則行列 P が存在して $B = PA$ の第 n 列は 0 ベクトルをみたす。第 n 列が 0 ベクトルということから $\det B = 0$ である。一方、積公式より

$$(\det P)(\det A) = \det(PA) = 0$$

である。上の必要性で示したことから $\det P \neq 0$ なので、$\det A = 0$ を結論できる。 □

21　余因子行列、余因子展開、クラメールの公式

21.1　余因子展開

n 次正方行列の余因子展開というものを与えます。

21.1.1　余因子

定義 21.1 (余因子（教科書 p.102, 定義 4.3）). n 次正方行列 A の第 (i,j) 余因子 Δ_{ij} を以下で定める：

$$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

（行列式をとっているのは A から第 i 行と題 j 列を引き抜いて得られる $n-1$ 次正方行列です。）

余因子は次の表示をもちます。

補題 21.2 (教科書 p.99 補題 4.14). n 次正方行列 A の第 (i,j) 余因子 Δ_{ij} は次で与えられる：

(1)

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

（A の第 j 列ベクトルを基本ベクトル $\vec{e}_i$ で置き換えたものの行列式です。）

(2) *(1)* の行バージョン。

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

（A の第 i 行ベクトルを基本行ベクトル $\vec{e}_j$ で置き換えたものの行列式です。）

21.1.2 余因子展開

余因子を導入する動機は次の余因子展開にあります。これにより、n 次正方行列の行列式の計算は $n-1$ 次正方行列の行列式の計算に帰着できます。

命題 21.3 (余因子展開（教科書 p100, 101 の式）). *(1)* 第 j 列に関する余因子展開：

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} a_{ij}.$$

（この式では j は先に与えられている。i は和をとっている。）

(2) 第 i 行に関する余因子展開：

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} a_{ij}.$$

（この式では i は先に与えられている。j は和をとっている。）

Proof. (1) 第 j 列ベクトル $\vec{a}_j$ を基本ベクトルの和であらわしましょう：

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i.$$

こいつを行列式の定義に代入して第 j 列に関する線形性を用いて展開することで主張をえます

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n) \\
&= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} a_{ij}.
\end{aligned}$$

(2) は行に関して同様の考察を行えばよい。

□

21.2 クラメールの公式

クラメールの公式に向かって余因子展開を観察してやります。
行と列とに関する性質は同様なので列に関して次の考察をします。

21.2.1 A の第 j 列 $\vec{a}_j$ を別のベクトル $\vec{v}_j$ にすると

$j = 1, 2, \cdots, n$ を一つ固定します。

n 次正方行列の A の第 j 列ベクトル $\vec{a}_j$ を他の n 次列ベクトル $\vec{v}$ で入れ替えた行列を考え、そのの行列式を $D_{A,j}(\vec{v})$ であらわす。つまり、

$$\begin{aligned}D_{A,j}(\vec{v}) &= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{v}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & v_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & v_{i-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & v_i & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & v_{i+1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & v_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

もったいぶって書いたけれど、これはこれで新しい行列 $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{v}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n)$ の行列式なのだから、（こいつを A と考え直して）余因子展開を考えると次が成り立つとわかりますね。

補題 21.4.

$$D_{A,j}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} v_i = \begin{pmatrix} \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \cdots & \Delta_{nj} \end{pmatrix} \vec{v}$$

二つ目の式は n 次行ベクトル $\begin{pmatrix} \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \cdots & \Delta_{nj} \end{pmatrix}$ と n 次列ベクトル $\vec{v}$ の積です。

特に $\vec{v}$ が A の列ベクトルの場合を考えると次が得られます。

系 21.5. $k = 1, 2, \cdots, n$ にたいして次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \cdots & \Delta_{nj} \end{pmatrix} \vec{a}_k = D_{A,j}(\vec{a}_k) = \begin{cases} \det A & (k = j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases}$$

21.2.2　余因子行列

補題 21.4 は行列の積を想起させます。そこで、

定義 21.6 (余因子行列)**.** A の余因子行列を $\tilde{A} = {}^{\mathrm{t}}(\Delta_{ij})$ で定める。

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} & \cdots & \Delta_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの掛け算の定義式を書いてみると次がわかります。

補題 21.7.

$$\tilde{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} D_{A,1}(\vec{v}) \\ D_{A,2}(\vec{v}) \\ \vdots \\ D_{A,n}(\vec{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(\vec{v}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \\ \det(\vec{a}_1, \vec{v}, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n) \\ \vdots \\ \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{v}) \end{pmatrix}$$

21.2.3

命題 21.8. 次が成り立つ：

$$\tilde{A}A = (\det A)E, \quad A\tilde{A} = (\det A)E$$

Proof. 一つ目式を証明します。二つ目の式は行に関する同様の考察から導出されます。

行列と行列の積は行列と列ベクトルの積であらわすことが出来ました：

$$BA = (B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, \cdots, B\vec{a}_n)$$

この式に $B = \tilde{A}$ を代入して、補題 21.7 を組み合わせると目的とする等式が導出されます：

$$\begin{aligned}
\tilde{A}A &= (\tilde{A}\vec{a}_1, \tilde{A}\vec{a}_2, \cdots, \tilde{A}\vec{a}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) & \det(\vec{a}_2, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) & \cdots & \det(\vec{a}_n, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \\ \det(\vec{a}_1, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) & \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) & \cdots & \det(\vec{a}_2, \vec{a}_n, \ldots, \vec{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_1) & \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_2) & \cdots & \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} \\
&= (\det A)E_n
\end{aligned}$$

(三つ目の等式では退化条件を使っています。対角成分以外では同じ列ベクトルを持つ行列の行列式を計算してるので、値は 0 になるのです。) □

定理 20.2 で正方行列 A の正則性は条件 $\det A \neq 0$ と同値であると示しました。この命題 21.8 を用いると逆行列を明示的に与えることが出来ます。

定理 21.9. $\det A \neq 0$ ならば、逆行列 A^{-1} は次の式で与えられる：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

21.2.4 クラメールの公式

定理 21.10. A を正則な n 次正方行列とする。この時、連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の解は次で与えられる：

$$\vec{x} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det(\vec{u}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \\ \det(\vec{a}_1, \vec{u}, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n) \\ \vdots \\ \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{u}) \end{pmatrix}$$

Proof. 連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の解は $\vec{x} = A^{-1}\vec{u}$ で与えらえました。定理 21.9 と補題 21.7 を適用すれば結果をえます：

$$\vec{x} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}\vec{u} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} D_{A,1}(\vec{u}) \\ D_{A,2}(\vec{u}) \\ \vdots \\ D_{A,n}(\vec{u}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det(\vec{u}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \\ \det(\vec{a}_1, \vec{u}, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n) \\ \vdots \\ \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{u}) \end{pmatrix}$$

□

21.3 積と余因子行列

定理 21.11. n 次正方行列 A, B にたいして次が成り立つ。

$$\tilde{A}\tilde{B} = \widetilde{BA}$$

Proof. $A, B, \tilde{B}$ の第 j 列ベクトルをそれぞれ $\vec{a}_j, \vec{b}_j, \vec{c}_j$ と書く。すると左辺と右辺のの第 (i,j) 成分 $(\tilde{A}\tilde{B})_{ij}$, $(\widetilde{BA})_{ij}$ は次の様に表される。

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}\tilde{B})_{ij} &= (\tilde{A}\vec{c}_j)_i = \det(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{c}_j, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_n) = (-1)^{j-1}\det(\vec{c}_j, \vec{a}_1 \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_n) \\
(\widetilde{BA})_{ij} &= \det(B\vec{a}_1 \cdots, B\vec{a}_{i-1}, \vec{e}_j, B\vec{a}_{i+1}, \cdots, B\vec{a}_n) = (-1)^{j-1}\det(\vec{e}_j, B\vec{a}_1 \cdots, B\vec{a}_{i-1}, B\vec{a}_{i+1}, \cdots, B\vec{a}_n).
\end{aligned}$$

以降では i, j を固定して議論を進める。上の両者は共に $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n$ に関して多重線型性を持ち、交代条件と退化条件を満たす。このことから、各 k, $(1 \le k \le n)$ に対して $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n$ が基本ベクトルから k 番目だけを除いたベクトルの組 $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n$ の場合に上の二つの式が一致することを示せばよいとわかる[7]。

ベクトル $\vec{c}_j$ の第 k 成分を c_{kj} とおく。といっても定義からこれは B の余因子であることに注意しておく: $c_{kj} = \det(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{k-1}, \vec{e}_j, \vec{b}_{k+1}, \cdots, \vec{b}_n)$。

$$\begin{aligned}
(-1)^{j-1}\det(\vec{c}_j, \vec{e}_1 \cdots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n) &= (-1)^{j+k}\det(\vec{e}_1 \cdots, \vec{e}_{k-1}, \vec{c}_j, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n) \\
&= (-1)^{j+k}c_{kj} = (-1)^{j+k}\det(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{k-1}, \vec{e}_j, \vec{b}_{k+1}, \cdots, \vec{b}_n)
\end{aligned}$$

最後から二つ目の等式は多重線型性と退化条件を使っています。

一方、下の方は $B\vec{e}_\ell = \vec{b}_\ell$ を使って変形してやります。

$$\begin{aligned}
(-1)^{j-1}\det(\vec{e}_j, B\vec{e}_1 \cdots, B\vec{e}_{k-1}, B\vec{e}_{k+1}, \cdots, B\vec{e}_n) &= (-1)^{j-1}\det(\vec{e}_j, \vec{b}_1 \cdots, \vec{b}_{k-1}, \vec{b}_{k+1}, \cdots, \vec{b}_n) \\
&= (-1)^{j-k}\det(\vec{b}_1 \cdots, \vec{b}_{k-1}, \vec{e}_j, \vec{b}_{k+1}, \cdots, \vec{b}_n)
\end{aligned}$$

これら二つの計算結果が等しいので、こうしてめでたく欲しい等式が示せました。 □

[7] $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n$ を基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ の線形和であらわして、多重線形性を使って両方の式を展開し、退化条件、交代条件を使って整理すると、$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n$ が順番に現れる k 項の和になる。$n = 3$ の場合にでも具体的に書き下してみましょう。

22 行列式の図形的な意味

22.1 平行４辺形の面積

定理 22.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値 $|\det A|$ は２本の列ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行４辺形の面積 S に等しい。

Proof. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の間の角を θ とおきます。あとは計算をしていくと示せます。

$$\begin{aligned} S &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2} = \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} \\ &= |\det A| \end{aligned}$$

□

証明中で示している式 $S = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ は大事です。というのは、この式の右辺は２次元ベクトルでなくても意味を持ち得るからです。長さと内積であらわされているので、例えば３次元ベクトルにたいしても意味を持ちますよね。

補題 22.2. n 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行４辺形の面積 S は次の式で与えられる。

$$S = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}.$$

22.2 平行６面体の体積と外積

22.2.1 外積

３次元数ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を次で定義する：

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

別の言い方をすれば $\vec{a}\times\vec{b}$ の第 i 成分は行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & * \\ a_2 & b_2 & * \\ a_3 & b_3 & * \end{pmatrix}$ の第 $(i,3)$ 余因子として定義される。

基本的な性質は次です。

命題 22.3. *(1)* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = 0, \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b} = 0.$

このことから、とくに次がわかりますね：$\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b} \neq 0$ と仮定すると、これは２本のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平面の法線である。つまり、平面の方程式は $d_1x + d_2y + d_3z = 0$ で与えられる。

(3) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(4) $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 > 0.$

(5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

右辺の式から外積の長さ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S に等しいことがわかります。

(6) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行。

Proof. (1) は余因子展開を今の場合に書き下した式です。

(2) は (1) を使うと退化条件からしたがいます：$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0.$

(3) 3 次元列ベクトル $\vec{c}$ の第 i 成分 c_i は第 i 基本ベクトル $\vec{e}_i$ との内積ですね：$c_i = \vec{c} \cdot \vec{e}_i$. これを用いると、行列式の交代条件から主張は成分ごとに確かめられます。

(4) 第三列で余因子展開してみるとわかります。

(5) 頑張って計算する。もしくは定理 21.11 から導出することができます。

(6) $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積が 0 であるのは二つのベクトルが平行であることと同値ですね。

□

22.2.2 平行 6 面体の体積

定理 22.4. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値 $|\det A|$ は三本のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の張る平行六面体の体積 V に等しい。

証明の概略. $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S に等しい。

$\vec{a}, \vec{b}$ の張る平面と $\vec{c}$ の成す角度を θ とおくと $V = S|\vec{c}| \sin\theta$ である。

$\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平面の法線であったことから $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \sin\theta$ である。

一方、$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det A$ であったから、今までの全てを合わせると証明が完了する。

$$|\det A| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \sin\theta = S|\vec{c}| \sin\theta = V$$

□

$n \geq 4$ の場合でも n 次正方行列 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ の行列式の絶対値 $|\det A|$ は列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ の張る n 次元立方体の n 次元体積であることが示せます。(Moodle にアップロードしている講義資料には証明らしきものがあります。)

22.3　一般の次元で

（少し難しいので範囲外です。興味ある人は読んでください。）

ここまで、2 次元 3 次元の場合を見てきました。一般の次元でも同様のことがなりたつのでそれを示しましょう。

n 次正方行列 $A = (\vec{a}_1.\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ の行列式の絶対値 $|\det(A)|$ が列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ の張る n 次元（超）平行六面体の（超）体積 V に等しい事を示します。

といっても、n 次元の物体 "(超）体積" を定義しないので完全な証明にはならず、直感的な議論が出てきますが、雰囲気は伝わるでしょう。

証明のアイデアは 3 次元の場合と同様で、n 次元の超体積計算を余因子展開によって $n-1$ 次元の場合に帰着させせます。

3 次元の場合は 2 次元に帰着させるために外積を導入しましたが、ここではもっと一般に余因子ベクトルを導入します。

22.3.1　余因子ベクトル

第 i 余因子ベクトル $\vec{d}_i$ を次で定めます。するとこいつを転置した行ベクトル ${}^{\mathrm{t}}\vec{d}_i$ が余因子行列 $\tilde{A}$ の第 i 行ベクトルを与えています。

$$\vec{d}_i := \begin{pmatrix} \Delta_{1i} \\ \Delta_{2i} \\ \vdots \\ \Delta_{1i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}\vec{d}_1 \\ {}^{\mathrm{t}}\vec{d}_2 \\ \vdots \\ {}^{\mathrm{t}}\vec{d}_n \end{pmatrix}$$

すると、第 j 列に関する余因子展開は $\vec{a}_j$ と $\vec{d}_j$ の内積 $(\vec{d}_j, \vec{a}_j)$ に他ならないと分かります：

$$\det(A) = \Delta_{1j}a_{1j} + \Delta_{2j}a_{2j} + \cdots + \Delta_{nj}a_{nj} = \vec{d}_j \cdot \vec{a}_j.$$

余因子ベクトル $\vec{d}_i$ の大切な性質は次です (簡単の為、$i = n$ の場合のみを書きます)：

Y1. $\vec{d}_n$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_{n-1}$ と直交しており、

Y2. 長さ $|\vec{d}_n|$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_{n-1}$ の張る $n-1$ 次元超平行六面体の $n-1$ 次元体積 U に等しい。

この二つの性質さえしめせば行列式の絶対値が体積を与えることの証明は $n = 3$ の場合と同様です。

22.3.2　行列式の絶対値 = 体積の証明

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_{n-1}$ の張る超平行六面体と $\vec{a}_n$ の成す角度を θ とおきます。すると、問題の（超）体積 V は "底（超）面積"U 掛ける高さ $|\vec{a}_n||\sin\theta|$ で与えられます：$V = U|\vec{a}_n||\sin\theta|$。後は計算すればよいだけです：

$$V = U|\vec{a}_n||\sin\theta| = |\vec{d}_n||\vec{a}_n||\cos(\theta - \frac{\pi}{2})| = |\vec{d}_n \cdot \vec{a}_n| = |\det(A)|.$$

22.3.3　Y1, Y2 の証明

残されたのは **Y1, Y2** です。

Y1 で示すべきは内積の計算 $\vec{d_n}\cdot\vec{a}_i=0$ が $i=1,2,\ldots,n-1$ に対して成立する事です。しかし、この内積は余因子展開なので、実はこれは既に解説しているんですね：一般の n 次数ベクトル $\vec{b}=(b_i)$ に対して

$$\vec{d_n}\cdot\vec{b}=\Delta_{1j}b_1+\Delta_{2j}b_2+\cdots+\Delta_{nj}b_n=\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_{n-1},\vec{b})$$

が成り立つので、行列式の退化条件より **Y1** が成り立つ事が分かります。

Y2 では $n-1$ 次元の超体積を扱います。その為に帰納法を用います。つまり、$n-1$ 次元の超体積は $n-1$ 次正方行列の行列式の絶対値で与えられると仮定して議論します。先ず注意するべきは、我々のベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ は$\underline{n\text{ 次}}$ベクトルという事です。これが若し$\underline{n-1\text{ 次}}$ベクトルならば、こいつらを並べた行列 $A':=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1})$ は $n-1$ 次正方行列になり帰納法の仮定からその行列式の絶対値が体積 U を与えます。しかし、今、行列 A' のサイズは $n\times n-1$ です。どうしたもんでしょう？ここを乗り越えるのは少し苦しいですが、僕としては後期の内容を宣伝する好機です。

実は、$n-1$ 本のベクトルの組 $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ は上手く座標を選べば、体積は変えずに $n-1$ 次元のベクトルにすることが出来ます。これを厳密に説明するには、後期の内容であるグラム-シュミットの直交化法が必要です。ここでのポイントは、実はその操作は二つのベクトル間の距離（従って内積も）も変えずに行なえるという事です。これは一般の次元ではイメージ不可能ですが、3 次元空間だとごく当たり前の事を言っているだけです。つまり、2 本ベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ があるとき、そのベクトルが張る平面に x 軸 y 軸を取り z 軸は適当に選べば、新たな座標では $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ は 2 次のベクトルですね。

これで、帰納法を使って U を求められそうですが、座標の変換が実際にどう行なわれるのか不明という難点があります。しかし、上に注意したように座標変換は内積を変えないで行えるので、そこで、座標の値 (a_{ij}) に依らず、ベクトル $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ の内積 $\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j$ のみから体積を求める公式を編み出してこの困難を乗り越えます。その公式とは次です：

$$U^2=\det\left[(\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j)_{1\le i,j\le n-1}\right] \tag{22-17}$$

行列式の中身は第 (i,j) 成分が内積 $(\vec{a}_i,\vec{a}_j)$ で与えられる $n-1$ 次正方行列です。

証明のために、次の計算法 **T** を思い出しましょう。これは後でも使います。

T. $n-1$ 次正方行列 $B=(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{n-1})$ とその転置行列 ${}^{\mathrm{t}}B$ の積 $({}^{\mathrm{t}}B)B$ は内積を成分とする行列 $(\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j)_{1\le i,j\le n-1}$ で与えられる。

これを用いると $|\det B|^2$ を列ベクトルの内積で表示する次の式が得られます：

$$|\det B|^2=\det{}^{\mathrm{t}}B\det B=\det[({}^{\mathrm{t}}B)B]=\det[(\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j)_{1\le i,j\le n-1}].$$

帰納法の仮定から、これによって $n-1$ 本のベクトル $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{n-1}$ の張る超平行六面体の体積を内積で表す式が得られる訳です。

今少し準備が要ります。余因子行列は次の性質を持っています

R1. ${}^{\mathrm{t}}(\tilde{A})=\widetilde{{}^{\mathrm{t}}A}$,

R2. $\tilde{A}\tilde{B}=\widetilde{BA}$. ここで B は別の n 次正方行列です,

R3. $\tilde{A}({}^{\mathrm{t}}\tilde{A})=\widetilde{({}^{\mathrm{t}}A)A}$.

R3 は **R1,R2** の帰結です。**R1** は簡単に確かめられます。

R2 は定理 21.11 です。

ここまで準備をすると **Y2** の証明は容易です。

先ず、計算法 **T** より、

$$|\vec{d_n}|^2 = \left(\tilde{A}({}^{\mathrm{t}}\tilde{A}) \text{ の第 } (n,n) \text{ 成分}\right)$$

が成り立ちます。

また、余因子行列の定義と計算法 **T** より、

$$\left(\widetilde{({}^{\mathrm{t}}A)A} \text{ の第 } (n,n) \text{ 成分}\right) = \det\left[(\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j)_{1\le i,j\le n-1}\right]$$

が成り立ちます。これらが一致する事は **R3** から従います。 そしてこれが $n-1$ 次元超体積の二乗 U^2 に一致している事も既に等式 (22-17) で示しています。

$$|\vec{d_n}|^2 = \left(\tilde{A}({}^{\mathrm{t}}\tilde{A}) \text{ の第 } (n,n) \text{ 成分}\right) = \left(\widetilde{({}^{\mathrm{t}}A)A} \text{ の第 } (n,n) \text{ 成分}\right) = \det\left[(\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j)_{1\le i,j\le n-1}\right] = U^2$$

これで **Y2** が示されました。

23　線形写像：正比例関係の多値多変数版

誤解を恐れずに言えば、これから勉強する線形写像というのは多値多変数の場合の正比例関係です。正比例関係 $y = ax$ は無数に応用をもっていました。同様に線形写像も様々に応用されていてとてもとても大切なものです。

23.1　線形写像

正比例関係 $y = ax$ というのは「x が何倍かされれば y も同じ分の倍数になる」という様に最初は習った筈です。つまり、正比例関係というのは写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であり任意の実数 c にたいして等式 $f(cx) = cf(x)$ を満たすもののことです。これが正比例関係の大事な性質ですが、多値多変数の場合にはさらにもう一つ性質を課します。

定義 23.1 (線形写像)**.** m, n を自然数とする。写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が**線形**とは次が成りたつことと定める：
任意の $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ と任意のスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対して以下の等式が成り立つ。

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) \quad f(c\vec{x}_1) = cf(\vec{x}_1).$$

補題 23.2. 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ はゼロベクトルをゼロベクトルに移す：

$$f(0) = 0.$$

23.1.1

定義 23.3. A を $m \times n$ 行列とする。写像 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$T_A(\vec{x}) := A\vec{x} \quad (\text{ for all } \vec{x} \in \mathbb{R}^m)$$

と定める。
[説明] 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定義するというのは、定義域 $\mathbb{R}^n$ の各要素 $\vec{x}$ にたいして値域 $\mathbb{R}^m$ の要素 $f(\vec{x})$ を一つ対応させる規則を定める事だった。いまの場合には行列 A を使ってその規則を与えている。

写像 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は定義域 $\mathbb{R}^n$ の各要素 $\vec{x}$ にたいして値域 $\mathbb{R}^m$ の要素として A を $\vec{x}$ に掛けて得られる m 次数ベクトル $A\vec{x}$ を対応させる規則として定義されている。

「n 次数ベクトル $\vec{x}$ に $m \times n$ 行列 A を掛けると m 次数ベクトル $A\vec{x}$ が得られる」という皆さんよくご存知のことを言い換えてるに過ぎない。

補題 23.4. 写像 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像である。

23.2 等距離写像の実線形性

線形写像なんてものが行列を掛ける以外にもあるのでしょうか？

小学校以来お馴染みの平面の変換、回転や対称変換を考えましょう。（これらも平面の点を平面の点に対応させる規則なので写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ です。）これらは二点間の距離を変えませんね。こういうものを距離を保つ変換とか等距離変換と呼びます。さらに、回転の中心が原点だったり、対称変換の軸が原点を通っていると、これらの変換は原点を原点に移します。実はこの場合には写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は線形写像です。2 次元以上でも二点間の距離を保ち原点を原点に移す写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は線形写像であることが示せます。

定理 23.5. 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が距離を保ち、原点を原点に移すならば実数上の線形写像である。

23.2.1 準備：距離と内積

2 次元、3 次元の場合には良く知っていることを n 次元の場合にまで拡張します。

n 次数ベクトル $\vec{x}=(x_i)$ の長さを

$$||\vec{x}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

と定めます。二点 $\vec{x},\vec{y}$ 間の距離は $||\vec{x}-\vec{y}||$ と表されます。

n 次数ベクトル $\vec{x}=(x_i),\ \vec{y}=(y_i)$ の内積を以下で定めます：

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

内積と長さの関係は

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}$$

ですね。このことから余弦定理

$$||\vec{x}-\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

が従うことは容易に証明できますね。

23.2.2 定理 23.5 の証明

仮定は f が次の二つの性質を満たすことをいっています:

$$(1)\ f(0)=0 \text{ and } (2)\ ||f(\vec{x})-f(\vec{y})|| = ||\vec{x}-\vec{y}|| \text{ for all } \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$$

(2) に $\vec{y}=0$ を代入すると (1) より $||f(\vec{x})||=||\vec{x}||$ を得ます。これを用いて f が内積を保つことが以下の様にして示せます：

$$\begin{aligned}\langle f(\vec{x}),f(\vec{y})\rangle &= \frac{1}{2}(||f(\vec{x})||^2+||f(\vec{y})||^2-||f(\vec{x})-f(\vec{y})||^2)\\ &= \frac{1}{2}(||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2-||\vec{x}-\vec{y}||^2)\\ &= \langle\vec{x},\vec{y}\rangle\end{aligned}$$

これを使って頑張って計算すると次を得ます：

$$||f(c\vec{x}+d\vec{y})-cf(\vec{x})-df(\vec{y})||^2=\cdots\cdots=0 \text{ for all } \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n \text{ and } c,d\in\mathbb{R}.$$

故に $f(c\vec{x}+d\vec{y})=cf(\vec{x})+df(\vec{y})$ が成り立つことが分かり、故に f は線形と示されました。 □

23.3 表現行列：比例定数の多値多変数の版

正比例関係 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ というのは常に $f(x)=ax$ という形にあらわせました[8]。それと同様に、線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ も実はある行列により $f(\vec{x})=A\vec{x}$ とあらわされる事が分かります。

定理 23.6. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ にたいしてある $m\times n$ 行列 A が一意的に存在して $f=T_A$ を満たす。つまり、任意の $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ にたいして等号

$$f(\vec{x})=A\vec{x}$$

がなりたつ。

正比例関係 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の場合だと比例定数 a は特別な値 $x=1$ における f のあ多値 $a=f(1)$ で求められました。線形写像の場合は多値多変数なので "特別な値" として選ぶものが増えます。

Proof. （A の存在）
各 $j=1,2,\ldots,n$ にたいして $\vec{a}_j:=f(\vec{e}_j)$ とおく。（つまり、$\vec{a}_j$ を n 次第 j 基本ベクトル $\vec{e}_j$ における f の値として得られる m 次の数ベクトルと定義する。）こうして m 本の n 次数ベクトル $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ が得られました。これらを順に並べて出来る $m\times n$ 行列 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)$ が求めるものであることを示す。つまり、任意の $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ にたいして $f(\vec{x})=A\vec{x}$ が成り立つことを示す。
n 次数ベクトル $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ をとってくる。次の計算で $f(\vec{x})=A\vec{x}$ が示せる：

$$f(\vec{x})=f\left(\sum_{j=1}^{n}x_i\vec{e}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_jf(\vec{e}_j)=\sum_{j=1}^{n}\vec{a}_jx_j=A\vec{x}$$

最後の等号は行列の積の定義から従う。

（A の一意性）$m\times n$ 行列 A が $f=T_A$ を満たしたと仮定する。a の第 j 列ベクトルを $\vec{a}_j$ とあらわす。すると $\vec{a}_j=a\vec{e}_j$ がなりたつ。一方、仮定 $f=T_A$ より、$a\vec{e}_j=f(\vec{e}_j)$ が成り立つ。よって、$\vec{a}_j=f(\vec{e}_j$ が成り立つことが分かった。ゆえに $f=T_A$ を満たす行列は上のものに限られることが分かった。 □

定義 23.7. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ にたいして $f=T_A$ を満たす $m\times n$ を f の表現行列と呼ぶ。
（ !!: 下の注意を読んでください。）

注意 23.8 (比例定数は何に依存しているか、あるいは、後期に出てくる表現行列との違い).
後期にはここで定義したよりもずっと抽象的な状況で表現行列が導入されます。抽象ベクトル空間の間の（抽象）線形写像 $f:U\to V$ にたいして、定義域 V と値域 U とに順序付き基底を与えたときに表現行列が定義されます。そこでの言い方では上で定義した表現行列は「線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ の、定義域 $\mathbb{R}^n$ と値域 $\mathbb{R}^m$ とにそれぞれ標準基底を与えたときの表現行列」です。

[8]というか、この形の関係を正比例関係と呼ぶと認識している方も多いだろうし、そう定義されることも多々あります。しかし、ここでは正比例関係というのは、上で述べたように「x が何倍かされれば y も同じ分の倍数になる」という関係のことと定義しています。

比例定数のことを思い出すと、正比例関係の比例定数というのは比例している二つの量の単位に依存していましたね。何が言いたいかというと、比例定数の具体例として等速直線運動の速度を考えることにしましょう。速度というのは時間と移動距離の正比例関係の比例定数でしたが、時間の単位と移動距離の単位に依存していましたね。実際、速度の単位の例としては km/時 とか m/秒 とかがありますね。それぞれ、時間の単位として「時間」をとり長さの単位として「km」を採用した時の速度の単位が「km/時」であり、時間の単位として「秒」をとり長さの単位として「m」を採用した時の速度の単位が「m/秒」ですね。

表現行列というのは比例定数の多値多変数版であると言っていました。実は、表現行列も二つの量の単位の取り方に依存しています。後期で扱う表現行列はそういう風になっています。上で言った「順序付き基底を与える」というのが「単位の取り方」なのです。ここで扱った表現行列は単位の取り方を特別に指定した場合の表現行列なのです。定理 23.6 の証明で $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\vec{e}_j$ が現れましたが、これが実は定義域側の単位を選んでいるのです。値域側では何も特別に選んでない様に思えますが、実は $\vec{a}_j$ を数ベクトルと見做すときに $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトルを用いています。

24　おまけ：いとも容易く行われるえげつない間違い

24.0.1　正方行列と正則行列をごっちゃにする

ちょっと信じられないかも知れないけれど、毎年間違える人がいます。

24.0.2　重要：被約階段行列の形を理解しない

被約階段行列に関してよくある間違いは、第 $j(i)$ 列の形です。
被約階段行列 B の第 $j(i)$ 列ベクトル $\vec{b}_{j(i)}$ というのは第 i 成分 1 でそれ以外は 0 のベクトルです：

$$\vec{b}_{j(i)} = \begin{array}{c} 1 \\ \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \\ n \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

妙に感じるかも知れないけれど、この条件が方程式を解く上での鍵であることは、講義で説明した通りです。

24.0.3　サラスの公式みたいにして 4 次以上の正方行列の行列式を計算してしまう。

サラスの公式は 3 次正方行列限定です。毎年、同じように斜めに線を引っ張って 4 次以上の正方行列の行列式を計算する人が出てきます。勿論、毎年、そういうことはできない！と講義で注意するのに、それでも出てきます。
例えば 4 次正方行列を考えて、斜めに線を引っ張ってもせいぜい 8 本しか引けません。でも 4 次正方行列の項は 24 個ですよね。

24.0.4　行基本変形を等号でつないでしまう。行列式の計算のときの変形を矢印でつないでしまう。

行基本変形を実行するときの式変形は等号「=」ではなく矢印「→」でつないでください。二つの行列が等号でつながってるということは両辺の行列のすべての成分が一致することを意味します。それが行列の等号の定義でした。行基本変形で得られる行列はもとの行列とは異なっているので等号でつなぐのはおかしいのです。
一方、行列式は中身の行列を変形した時の変化を加味して値が等しいように変形しているので、等号でつながないといけないのです。

25 おまけ：

25.0.1

n を正整数とする。n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ を第 (i,j) 成分 a_{ij} が

$$a_{ij} := \min\{i,j\}$$

で与えられるものとして定める。

すると $\det A = 1$ であり、ゆえに A は正則行列。さらに逆行列 A^{-1} は第 (i,j) 成分 b_{ij} が以下で与えられる：

$$b_{ij} := \begin{cases} 2 & (i=j\neq n) \\ 1 & (i=j=n) \\ -1 & (|i-j|=1) \\ 0 & (\text{上記以外の場合}) \end{cases}$$