目 次

第 I 部

抽象ベクトル空間

1　抽象ベクトル空間への導入

いよいよ後期線型数学が始まります。前期は計算ばかりである意味簡単でしたが後期はそうではありません。抽象的な線形代数の理論を学びます。先ずはその様なものが必要になる動機の一つを紹介します。

1.1　座標と行列

1.1.1　ある意味「同じ」行列

次の二つの行列 A, B を見て下さい。どちらが簡単ですか？

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

例えば、どちらかの行列のべき乗 A^n, B^n を求めよといわれたら皆さんどちらを選びますか？
それは勿論 A ですよね、ええ。n 乗の計算結果は次です：

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

しかし、実は、驚くことに A と B はある意味「同じ」なんです。それがどういう意味なのかを説明していきます。

1.1.2　線形写像

二つの行列 A, B を掛けるという線形写像 $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ はどんなものでしょうか？

$$T_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \quad T_B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x + 4y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}.$$

線形写像 T_A は x 軸に関する対称変換ですね。一方で T_B の方は教科書 p42,43 の公式を使うと T_B は直線 ℓ に関する対称変換です。ただし、ℓ の定義は以下です：

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \ell := \{r\vec{u} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

ポイントは二つの写像 T_A, T_B ともに対称変換であるということです。つまり、図形的に考えると二つとも全く同じ操作をしているんです。この意味で A と B は同じと思えます。

しかし、その表現行列 A, B の見た目は随分違っていますね。どうしてでしょう？原因を考えてみると、T_A は xy 座標にマッチした直線＝x 軸に関する対称変換であり、一方、T_B の対象軸 ℓ は xy 座標的に綺麗ではないことが思い当ります。そうです、座標の取り方が問題なんです。

1.1.3　座標の取り換え

直線 ℓ を第一座標軸とするような直交座標系を作りましょう。$\vec{u}$ は上のベクトルとして、$\vec{v}$ を以下で定めます。

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

このベクトルの組[1] $(\vec{u}, \vec{v})$ に関するベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の座標 $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とは以下を満たすものと定めます：

$$\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}. \tag{1-1}$$

「後期の線型数学で問うこのとの一つは、これで座標が定まるのか？ということです。いまの場合は 2 次元なので簡単ですが、一般的なベクトル空間の場合を扱うので大変です。」

兎も角、座標が定まるとして、この座標でもって直線 ℓ に関する対称変換、つまり線形写像 T_B を考えると、それを表現する行列って A になりそうですよね。というのも、

$$T_B\vec{u} = \vec{u}, \quad T_B\vec{v} = -\vec{v} \tag{1-2}$$

がわかるからです。つまり、u 軸＝直線 ℓ は保たれて v 軸は -1 倍されるのだから、これって A の xy 平面に対する作用と同じですよね。

1.1.4　座標変換の公式

座標変換の公式を与えましょう。xy 座標と st 座標の関係 (1-1) の別の書き方は次です。

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}. \tag{1-3}$$

注意しておきたいのは行列 P は座標を決めるベクトルの組 $(\vec{u}, \vec{v})$ を並べてできる行列ということです。

この行列 P はとても大事です。これを用いて等式 (1-2) は以下の様に書き換えられます。

$$BP = PA. \tag{1-4}$$

さらに行列 P は正則なので上の式 (1-4) は次の様に書き換えられます。

$$B = PAP^{-1}. \tag{1-5}$$

この式はとても大事なので、よく覚えておいて下さい。実は、この式 (1-5) が最初に言った「A と B はある意味同じ」ということの正確な表現なんです。

例えば B^n の計算も A^n に還元することが出来ます：

$$\begin{aligned} B^n &= PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1} \cdots PAP^{-1}PAP^{-1} \\ &= PAAA \cdots AAP^{-1} = PA^nP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n 4 & 2(1+(-1)^{n+1}) \\ 2(1+(-1)^{n+1}) & 4+(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1-6}$$

[1] 座標を決めるには順序も大切

1.2　応用：べきを考えるべき理由

そもそも、どうして行列のべき A^n を考えないといけないのでしょう？

1.2.1　数列

実数 α, β にたいして、数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が次の漸化式で定義されているとします。

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n. \tag{1-7}$$

一般項 a_n を初項 a_1 と第二項 a_2 で書き表す方法は皆さん覚えていますね。これも行列のべきを計算する問題といえるんですね、実は。行列 $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を使うと漸化式 (1-7) は次の様に表されるというのが鍵です。

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{1-8}$$

この式の第一成分が漸化式で第二成分は $a_{n+1} = a_{n+1}$ という恒等式です。この式から a_n を a_1, a_2 で表すことができますよね。

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

こうして漸化式 (1-7) を解くという問題は行列のべきを求める問題に還元されます。

もちろん、漸化式の解き方を覚えているから不要という人もいるでしょう。しかし、この様に理解する利点はキチンとあります。一つには行列のべきを求める方法は適用範囲が広いという点があります。もう一つには一般化が容易ということです。例えば、次の漸化式を行列のべきの問題に還元することは簡単ですよね。

$$a_{n+3} = \alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n. \tag{1-9}$$

この場合だったら下の 3 次正方行列のべきを求める問題になるわけです。

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.2　例えば人口の推移

教科書 p28 もご覧ください。

行列を用いると固定された複数のグループの間の一定期間毎のメンバーの推移をモデル化できます。X 国と Y 国があってある年から人口を測り始めます。あり得ない仮定だけれど、一年ごとの人口の推移は実数定数 p, q を使って次の様に表せるとします。毎年 X 国の国民の $100(1-p)\%$ は Y 国に移住し、毎年 Y 国の国民の $100(1-q)\%$ は Y 国に移住する。つまり、n 年目の人口を x_n 人 y_n 人とすると

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

n 年後の人口 x_n, y_n を初年度の人口 x_1, y_1 から求めるというのが問題になりますが、これも矢張り下の行列 A のべき A^n を求める問題になります。

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}.$$

答えは次です。

$$A^n = \frac{1}{p+q-2}\begin{pmatrix} (p+q-1)^n(p-1)+q-1 & (1-(p+q-1)^n)(q-1) \\ (1-(p+q-1)^n)(p-1) & (p+q-1)^n(q-1)+p-1 \end{pmatrix}$$

ただし $p+q \neq 2$ としている。

解法は講義の中で解説します。後期の最後には皆さんこれくらいは余裕で解けるようになります。一つだけ注意しておきたいのは、座標変換を考える時の基準となるベクトルの組 $(\vec{u}, \vec{v})$ は次で与えられるということです。

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} q-1 \\ p-1 \end{pmatrix}.$$

行列 A が作用しているベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ は X 国 Y 国の人口を成分とするベクトルの空間でした。そう考えると、成分が負の数のベクトルというのは現実的な意味を持たないですよね。しかし、$\vec{u}$ はそういうベクトルで、そういう非現実的なものが現実の問題を解くのに重要な役割を果たすのです。

1.3 線形代数の応用は他にも沢山あります。

ここで説明したのは線形代数の応用の極々一部です。線形代数は広く深く数学やその他の自然科学、更には工学経済学等にも浸透しています。線形代数の素養は微積分学と並んで数理科学を学ぶ上での必須事項です。

1.4 抽象的って難しそうだけれど､､､､､

いよいよ抽象ベクトル空間を勉強しなければいけなくなりました。教科書 p114 の定義 5.1 にその定義がありますが、見てもまあなんのことだか分かりません。「分からない」のは当然で、何故かというと、これは公理なのである意味では「分かる」ものではないからです。

公理というのはゲームのルールみたいなもんです。ゲームのルールって「分かる」ものではないですよね。バットを三回空振りしたらアウト、とか、ボールがゴールに入れば一得点、とか。「分かる」ものではなくて、これに従ってゲームを進行するものですよね。抽象ベクトル空間の公理も同様で、これに従って命題を証明するものなんです。

そう思ったとしても気持ちの落ち着かない人もおられるでしょう。そういう方へのメッセージです

メッセージ：

取り敢えずは抽象ベクトル空間は普通の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ と思っておいて構いません。

抽象ベクトル空間の公理（定義 5.1）というのは、後期で用いるベクトル空間の性質をリストアップしている、と思ってください。大事なのは、命題を証明する際にリストアップした以外の性質を使わない、ということです。ルールにないことはしちゃいけないのです。

2　ベクトル空間

2.1

先にもいったとおり、抽象ベクトル空間の定義は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の性質を抽象化することで得られます。数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は様々な性質をもっているのですが、そのうちで抽象化するのは足し算とスカラー倍です。

数ベクトルの足し算は皆さんご存知ですが、その一番簡単な性質といえば、

「数ベクトル $\vec{v}, \vec{u}$ の足し算 $\vec{u}+\vec{v}$ は数ベクトルである」

ということです。

二つの数ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ から一つの数ベクトル $\vec{u}+\vec{v}$ が定まるのですね。数ベクトルの足し算というのは二つの数ベクトルから一つの数ベクトルを定める規則ですね。規則といえば写像ですね。

なので、うえで述べた数ベクトルの足し算の一番簡単な性質というのは、

「数ベクトルの足し算というのは写像

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v}$$

である」

といいかえられます。

同じように考えると、数ベクトルのスカラー倍の一番簡単な性質は、

「数ベクトル $\vec{v}$ のスカラー c 倍というのは数ベクトル $c\vec{v}$ である」

なんですが、これは

「数ベクトルのスカラー倍というのは写像

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (c, \vec{v}) \mapsto c\vec{v}$$

である」

といいかえられます。

勿論、足し算にしてもスカラー倍にしても様々な性質を持っていますが、それらはこの事実の上で述べられるものですね。

2.2

ここまでは実数の上で話しを進めてきましたが、複素数でも同様のことがいえるのでまとめて扱っていきます。

以下では K により実数の集合 $\mathbb{R}$ または複素数の集合 $\mathbb{C}$ をあらわす。

2.3　（抽象）ベクトル空間の定義

（抽象）ベクトル空間の定義を与えます。

頭に入りにくい方は数ベクトル空間 K^n と足し算とスカラー倍の規則を並べているのだとおもってください。

定義 2.1. K 上のベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ とは以下のものの三つ組

集合 V.

写像 $+ : V \times V \to V$.

写像 $\cdot : K \times V \to V$.

であり、以下の八つの条件を満たすものと定める：

(I) （足し算の結合法則）

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{for all } u, v, w \in V.$$

(II) （ゼロベクトルの存在）
次の性質をもつ要素 $0 \in V$ が存在する：

$$v + 0 = v,\ 0 + v = v \quad \text{for all } v \in V.$$

(III) （マイナスベクトルの存在）
任意の要素 $v \in V$ にたいして、つぎの性質をもつ要素 $u \in V$ が存在する：

$$v + u = 0, \quad u + v = 0.$$

(IV) （足し算の可換性）

$$u + v = v + u \quad \text{for all } u, v \in V.$$

(V) （スカラー倍の結合法則）

$$c \cdot (d \cdot v) = (cd) \cdot v \quad \text{for all } c, d \in K,\ v \in V.$$

(VI) （単位元の恒等作用）

$$1 \cdot v = v \quad \text{for all } v \in V.$$

(VII) （分配法則１）

$$c \cdot (u + v) = (c \cdot u) + (c \cdot v) \quad \text{for all } c \in K,\ u, v \in V.$$

(VIII) （分配法則２）

$$(c + d) \cdot v = (c \cdot v) + (d \cdot v) \quad \text{for all } c, d \in K,\ v \in V.$$

2.3.1　記法

ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ を構成している集合 V を下部集合、写像 $+$ を足し算 or 和、写像 $\cdot$ をスカラー倍とよぶ。

以下ではベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ を下部集合の記号 V で代表させ、「ベクトル空間 $V = (V, +, \cdot)$」とか「ベクトル空間 V」とか言ったりする。

2.3.2　注意

先にもいいましたが、

頭に入りにくい方は数ベクトル空間 K^n と足し算とスカラー倍の規則を並べているのだとおもってください。

ただし、大事なことは、

抽象ベクトル空間として数ベクトル空間を扱う際には、
上の定義でリストアップした規則しか用いてはいけない

いうことです。

次に抽象ベクトル空間の基本的な性質を見ていきます。数ベクトル空間では当たり前なことなのですが、ポイントは、それらが上でリストアップした規則から導出できるということです。

2.3.3　（抽象）ベクトル空間の基本的な性質

補題 2.2. ベクトル空間 $V = (V, +, \cdot)$ のゼロベクトルは一意的である。

つまり、$0, 0'$ を V のゼロベクトルとすると $0 = 0'$ がなりたつ。

Proof. $0'$ が V のゼロベクトルという仮定から、任意の $v \in V$ にたいして

$$v = v + 0'$$

がなりたつ。これを $v = 0$ の場合に適用して

$$0 = 0 + 0' \tag{2-10}$$

をえる。

同様に 0 が V のゼロベクトルであるという仮定から

$$0' = 0 + 0' \tag{2-11}$$

を得る。

上で得られた等号 (2-10)(2-11) を用いた次の式変形により $0 = 0'$ が示せる：

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

□

補題 2.3. $V = (V, +, \cdot)$ をベクトル空間とする。すると、要素 $v \in V$ の逆ベクトルは一意的に定まる。

つまり、$u, w \in V$ を v の逆ベクトルとすると $u = w$ が成り立つ。

Proof. 次の式変形により $u = w$ が示される：

$$u = u + 0 = u + (v + w) = (u + v) + w = 0 + w = w.$$

□

以下、ベクトル空間 V の要素 $v \in V$ の逆ベクトルを $-v$ であらわす。

補題 2.4. V をベクトル空間とする。次が成り立つ：

(1) 任意の $v \in V$ にたいして
$$-(-v) = v.$$

(2) $v \in V$ が $v + v = v$ を満たせば $v = 0$.

(3) 任意の $v \in V$ にたいして $0 \cdot v = 0$.

(4) 任意の $v \in V$ にたいして $(-1) \cdot v = -v$.

(5) 任意の $c \in K$ にたいして $c \cdot 0 = 0$.

Proof. (1) $u := -v$ とおく。（$v = -u$ であることを示したい。つまり、v が u の逆ベクトルであることを示したい。）
$$u + v = (-v) + v = 0,$$
$$v + u = v + (-v) = 0.$$
この等式から v は u の逆ベクトルである。

(2) 要素 $v \in V$ が等式 $v + v = v$ を満たすと仮定する。両辺に $-v$ を足す。左辺は
$$(v + v) + (-v) = v + (v + (-v)) = v + 0 = v$$
となり、右辺は
$$v + (-v) = 0$$
となるので、$v = 0$ を結論する。

(3) 次の等式と (2) より $0 \cdot v$ が示される。
$$0 \cdot v + 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v.$$

(4) 次の等式から $(-1) \cdot v$ は v の逆ベクトルであることが従う：
$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0.$$

(5) 次の等式と (2) より $c \cdot 0$ が示される。
$$c \cdot 0 + c \cdot 0 = c \cdot (0 + 0) = c \cdot 0.$$

□

2.4

2.4.1 ゼロベクトル空間

下部集合が一点のみからなる抽象ベクトル空間を 0 とあらわし、ゼロベクトル空間とよぶ。
注意：一点のみからなる集合 $\{0\}$ には写像
$$+ : \{0\} \times \{0\} \to \{0\}, \quad \cdot : K \times \{0\} \to \{0\}$$
は一つしか存在しない。$(\{0\}, +, \cdot)$ は抽象ベクトル空間である。

3　部分空間

3.1　部分空間の定義

　平面 $\mathbb{R}^2$ の原点を通る直線、3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線や平面を抽象化した概念を導入します。

定義 3.1 (部分空間)**.** ベクトル空間 V の部分空間 U とは (下部集合の) 部分集合 $U \subset V$ であり次をみたすものと定める。

(0) $U \neq \emptyset$.

(1) 任意の $u, v \in U$ に対して $u + v$ もまた U に属する。
　別の書き方では、
$$\forall u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$$

(2) 任意の $u \in U, c \in K$ に対して cu もまた U に属する。
　別の書き方では、
$$\forall u \in U, c \in K \Longrightarrow cu \in U$$

注意 3.2. 上の条件 (1)(2) は次と同値：

$$\forall u, v \in U, c, d \in K \Longrightarrow cu + dv \in U$$

補題 3.3. 部分空間にはゼロベクトルが属する。

Proof. U を V の部分空間とする。要素 $u \in U$ をとってくる。
　すると $0 \in U$ がつぎで示される：
$$0 = 0u \in U.$$
□

3.2　部分空間の例：多項式ベクトル空間

　この節では $n \geq 1$ とする。

例 3.4. K の要素 $\alpha \in K$ を代入して 0 になる n 次以下の多項式全体を

（ここだけの記号で）U_α とおく：

$$U_\alpha := \{f(x) \in P_n \mid f(\alpha) = 0\}.$$

これは部分空間である。
　つまり、X に α を代入して 0 になるという性質は足し算やスカラー倍しても保たれる。

例 3.5. $g \in P_n$ をとってくる。g で割り切れる n 次以下の多項式の集合を W_g とおく：

g の次数を m とすれば

$$W_g := \{fg \in P_n \mid f \in P_{n-m}\}.$$

これは部分空間である。

つまり、g の倍多項式二つを足しても倍多項式だし、スカラー倍しても倍多項式。

命題 3.6 (因数定理)**.** $\alpha \in K$ にたいして次が成り立つ：

$$U_\alpha = W_{X-\alpha}.$$

3.3 部分空間の例：数ベクトル空間

3.3.1 核

定義 3.7 (核)**.** $V = K^n$ とする。$m \times n$ 行列 A にたいして

$$\operatorname{Ker} A := \{v \in V \mid Av = 0\}$$

とおく。

これは $V = K^n$ の部分空間である。行列 A の核 **(Kernel)** とよぶ。

文章「$v \in \operatorname{Ker} A$」は「$v$ は $Av = 0$ をみたす n 次数ベクトル」という意味

例 3.8. $n = 3,\ A = (2, 4, -3)$ の場合。

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \,\middle|\, 2x + 4y - 3z = 0 \right\}$$

例 3.9. $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ \pi & e & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ の場合。

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \,\middle|\, 2x + 4y - 3z = 0, \pi x + ey + \sqrt{2}z = 0 \right\}$$

3.3.2 像

定義 3.10 (像)**.** $V = K^m$ とする。$m \times n$ 行列 A にたいして

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} A &:= \{v \in V \mid \text{ある}\vec{x} \in K^n\text{が存在して}\, A\vec{x} = v\,\text{を満たす}\} \\ &= \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in K^n\}\end{aligned}$$

これは $V = K^m$ の部分空間である。 **行列 A の像 (Image)** とよぶ。

文章「$v \in \operatorname{Im} A$」は「$v$ はある $\vec{x} \in K^n$ によって $v = A\vec{x}$ とあらわすことが出来る」という意味。

復習：$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示したとき、
n 次列ベクトル $\vec{x} = (x_i)$ にたいして次がなりたつ：

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

文章「$v \in \operatorname{Im} A$」は「$v$ はある $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって

$$v = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

とあらわすことが出来る」という意味。

なので像の定義を書き直すこともできる

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} A &:= \left\{ v \in V \;\middle|\; \text{ある}\, x_1, \cdots, x_n \in K\,\text{が存在して}\, v = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i\text{を満たす} \right\} \\ &= \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \cdots, x_n \in K\}\end{aligned}$$

例 3.11. $A = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. この場合は

$$\operatorname{Im} A = \{c\vec{a} \mid c \in K\} \subset K^3$$

例 3.12. $A = (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 776 \\ 2 & 3 \\ 3 & \pi \end{pmatrix}$. この場合は

$$\operatorname{Im} A = \{c\vec{a} + d\vec{b} \mid c, d \in K\} \subset K^3$$

3.4 ベクトルの生成する部分空間

定義 3.13. V を抽象ベクトル空間とする。ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ にたいして

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle := \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \mid c_1, c_2, \cdots, c_k \in K\}$$

とおく。

これは部分空間である。

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ **が生成する部分空間とよぶ。**

例 3.14. $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k)$ にたいして次がなりたつ：

$$\operatorname{Im} A = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k \rangle \tag{3-12}$$

Proof. 集合の一致 (3-12) を示すための標準的な方法は二つの包含関係

$$(1)\ \operatorname{Im} A \subset \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle, \quad (2)\ \operatorname{Im} A \supset \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle.$$

を示すというものです。

(1). 包含関係 (1) を示す標準的な方法は、左辺 $\operatorname{Im} A$ の要素が全て右辺 $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle$ に属することをしめすことです。

$\vec{u} \in \operatorname{Im} A$ を任意にえらぶ。ある $\vec{x} \in K^n$ が存在して $\vec{u} = A\vec{x}$ をみたす。故に $\vec{x}$ の第 i 成分を x_i と表すと $A\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$ なので $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$ が成り立つ。よって $\vec{u}$ は $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle$ に属する。

(2). 包含関係 (2) を示す標準的な方法は、右辺 $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ の要素が全て左辺 $\operatorname{Im} A$ に属することをしめすことです。

要素 $\vec{u} \in \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle$ を任意に選ぶ。あるスカラーの組 $x_1, \cdots, x_n \in K$ が存在して $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$ を満たす。よって n 次数ベクトル $\vec{x}$ を $\vec{x} = (x_i)_{1 \le i \le n}$ で定義すると $\sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i = A\vec{x}$ なので $\vec{u} = A\vec{x}$ が成り立つ。よって $\vec{u}$ は $\operatorname{Ker} A$ に属する。 □

3.5 ゼロ部分空間

V を抽象ベクトル空間とする。

部分集合 $\{0\} \subset V$ は部分空間である。

3.6 部分空間はベクトル空間

抽象ベクトル空間 V の部分空間 U は V の和とスカラー倍で閉じている。

これにより U を抽象ベクトル空間とするような写像

$$+ : U \times U \to U, \quad \cdot : K \times U \to U$$

がえられる。

以降、この講義では部分空間 U といえばこの方法で抽象ベクトル空間の構造を付与したものをいう。

4 座標って??

4.1 測定値と単位

厳密に考えないことにすると、例えば、質量全体も（実数上の）抽象ベクトル空間を構成しますね。
質量を足したり、実数倍したりできますね。

強調したいことは、質量 m というのは測定するまえから存在する、ということです。
けれど、測定した値がないと取り付く島がなくて扱えないですよね。
測定して質量の値を決めるためには、単位が必要ですね。グラム **g** とかポンド **lb** とか。

質量のなす抽象ベクトル空間を V とあらわすことにすると、
そこに座標を定めるというのは、測定値をあたえるということですが、
そのためには単位を決めないといけないのです。

グラムを単位として質量を測定する（＝座標をあたえる）ことを模式的にあらわすと

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} V, \quad x \mapsto x\mathbf{g} = m.$$

抽象ベクトル空間に "座標" を定めるには "単位" が必要！

4.2 次元が高い場合に単位って???: 2 次元数ベクトル空間で見直す

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

次元が高くなると単位（基準となるもの）は複数必要。
また、座標には順序が入ってるので、単位に順番を決めておく必要がある。

4.3　座標を決めるには、

4.3.1　アイデア

V を（抽象）ベクトル空間とする。
座標を決めるための単位として、ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ をとり、
それに順番を付けたもの $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ を考える。

そして、$u \in V$ の "単位" $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ に関する座標 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ を

次を満たすことにより定義したらよさそう：

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k. \tag{4-13}$$

4.3.2　けれども、

「座標を定める」というからには次のことが気になる：

(I) どんな $u \in V$ のに対しても (4-13) を満たす $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ は存在するか？

(II) $u \in V$ のに対して (4-13) を満たす $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ は唯一に定まるか？

つまり、$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ と $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ とが

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_k v_k$$

を満たしたとすれば $\vec{x} = \vec{y}$ が成り立つか？

これらは "単位" $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ の選び方によっては全然なりたたない。

例 4.1. (1) $v_1 = v_2$.

(2) $1, X, \cdots, X^{n-1} \in P_n$.

(3) $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = 0$.

5 生成系、一次独立系、基底

以降、抽象ベクトル空間をベクトル空間とよぶ。

好き勝手に選んだ順序付きベクトルの組 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ を "単位" として座標を定義することはできない。

上の (I)(II) を満たすものを考えよう。

定義 5.1 (一次独立、一次従属、生成系、基底)**.** ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ を考える。

(1) ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ が**一次独立**とは次が成り立つことと定める：

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ と $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ とが

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_kv_k$$

を満たしたとすれば $\vec{x} = \vec{y}$ である。

(2) ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ が**一次従属**とは一次独立でないことと定める。

つまり、別の言い方では次が成り立つことと定める：

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ と $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ で、$\vec{x} \neq \vec{y}$ であるが

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_kv_k$$

を満たしたとすものが存在する。

(3) ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ が**ベクトル空間 V の生成系**とは次が成り立つことと定める：

任意の $u \in V$ にたいしてある $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ が存在して、次を満たす

$$u = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k.$$

(4) ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ が**ベクトル空間 V の基底**とは一次独立かつ V の生成系であることと定める。

つまり、別の言い方では次が成り立つことと定める：

任意の $u \in V$ にたいしてある $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ が一意的に存在して、次を満たす

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k.$$

定義 5.2 (順序付き基底、座標)**.** (1) ベクトル空間 V の基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ に順序を備え付けたものを V の**順序付き基底**とよび、順序の情報をこめて

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

とあらわす。

(2) ベクトル空間 V の順序付き基底 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を考える。

順序付き基底 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ **に関する** $u \in V$ **の座標**とは n 次列ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ で次を満たすものと定める：

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

例 5.3. ベクトル空間 V を考える。一つのベクトル v のみからなるベクトルの組 $\{v\}$ を考える。

(1) 0 ベクトルのみからなるベクトルの組 $\{0\}$ は一次従属。

(2) $v \neq 0$ なら $\{v\}$ は一次独立。

(3) $\{v\}$ が一次独立 $\Leftrightarrow v \neq 0$.

(4) 例えば $V = K^2$ の場合、一本のベクトルからなる組 $\{v\}$ は生成系ではありえない。

(5) $V = K$ の場合、$v \neq 0$ ならば $\{v\}$ は V の基底。
$u \in V$ の順序付き基底 (v) に関する座標が $x \in K^1$ というのは等式

$$u = xv.$$

がなりたつこと。

例 5.4. $V = K^2$ とする。基本ベクトルの組 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ は基底である。

(1) 順序付き基底 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ に関する $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の座標は $\vec{x}$.

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

(2) 順序付き基底 $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ に関する $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の座標は $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{x} = x_2\vec{e}_2 + x_1\vec{e}_1$$

5.1 一次独立性、生成系であることの言い換え。

補題 5.5. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ にたいしてつぎは同値：

(1) $\{v_1, \cdots, v_k\}$ は一次独立。

(2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ が $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = 0$ を満たしたとすれば $\vec{x} = 0$ である。

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1).

(2) を仮定する。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ と $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ とが

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_kv_k$$

を満たしたとする。移項して次の等式をえる：

$$(x_1 - y_1)v_1 + (x_2 - y_2)v_2 + \cdots + (x_k - y_k)v_k = 0.$$

今、(2) を仮定しているので $\vec{x} - \vec{y} = 0$ が成り立つ。よって $\vec{x} = \vec{y}$ を結論する。

(1) $\Rightarrow$ (2).

(1) を仮定する。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ が $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = 0$ を満たしたとする。一方、

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k$$

なので (1) より等式 $\vec{x} = 0$ をえる。

□

補題 5.6. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ にたいしてつぎは同値：

(1) $\{v_1, \cdots, v_k\}$ は一次従属。

(2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \neq 0$ で $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = 0$ を満たすものが存在する。

補題 5.7. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ にたいしてつぎは同値：

(1) $\{v_1, \cdots, v_k\}$ は V の生成系。

(2) $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = V$.

復習：
文章「$u \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$」は「ある $x_1, x_2, \cdots, x_k \in K$ が存在して $u = x_1v_1 + \cdots + x_kv_k$ をみたす」

Proof. (2) ⇒ (1).
(2) を仮定しする。
$u \in V$ を持ってくる。
仮定より、$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = V$ なので、$u \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ である。
よって、ある $\vec{x} = (x_i)$ が存在して $u = \sum_{i=1}^{k} x_iv_i$ を満たす。
(1) ⇒ (2).
(1) を仮定する。
$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = V$ を示すには包含関係 (i) $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle \subset V$、(ii) $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle \supset V$ を示さなければいけない。

(i) は $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ の定義より従う。

(ii) を示す。つまり、任意の $u \in V$ が $u \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ を満たすことをしめす。
$u \in V$ をとってくる。いま (1) を仮定しているので、ある $\vec{x} = (x_i)$ が存在して $u = \sum_{i=1}^{k} x_iv_i$ をみたす。
ゆえに $u \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ である。 □

6 ベクトル空間の次元

ベクトル空間 V が基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ と基底 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ をもつとすれば $n = m$ なのか？
そうだったら、基底を構成するベクトルの本数を V の次元と定めればいいだろう。

6.1 次元

補題 6.1. ベクトル空間 V の n 本のベクトルからなるベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ の生成する部分空間を U とおく：

$$U := \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$$

U の n より多い本数からなるベクトルの組は一次従属。
つまり、ベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\} \subset U$ は $m > n$ ならば一次従属。

Proof. 仮定より各 $j, (1 \leq j \leq m)$ にたいして $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ をみたす $a_{ij} \in K, (1 \leq i \leq n)$ が存在する。

$n \times m$ 行列を $A = (a_{ij})$ を考える。$m > n$ と仮定すると。$\vec{x} \in K^m, \vec{x} \neq 0$ が存在して $A\vec{x} = 0$ を満たす。

この $\vec{x}$ にたいして $\sum_{j=1}^{m} x_j u_j = 0$ が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{m} x_j u_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij} \right) v_i = 0$$

□

定理 6.2. ベクトル空間 V は有限個のベクトルから構成される基底を持つとする。
すると、基底を構成するベクトルの本数は基底の取り方に依らず一定である。

つまり、
ベクトル空間 V が基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ と基底 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ をもつとすれば $n = m$ がなりたつ。

Proof. ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{u_1, \cdots, u_m\}$ を V の基底とする。

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ が V の生成系なので $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = V$ がなりたつ。一方、$\{u_1, \cdots, u_m\} \subset V$ は一次独立なので、補題 6.1 より、$m \leq n$ でなくてはならない。

同様に $m \geq n$ も導出される。
よって、$m = n$ を結論する。 □

定義 6.3. ベクトル空間 V は有限個のベクトルから構成される基底を持つとする。
ベクトル空間 V の次元 $\dim V$ を基底を構成するベクトルの本数と定義する。

ゼロベクトル空間の次元は 0 と定める：

$$\dim 0 := 0.$$

6.2 例

6.2.1 数ベクトル空間 K^n

数ベクトル空間 K^n は基本ベクトルの組 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を基底として持つ。よって、

$$\dim K^n = n.$$

6.2.2 多項式のなすベクトル空間 P_n

n 次以下の多項式のなすベクトル空間 P_n は変数 X のべき $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ を基底として持つ。よって、

$$\dim P_n = n + 1.$$

6.3　部分空間の次元

定義 6.4 (復習)**.** ベクトル空間 V は有限個のベクトルから構成される基底を持つとする。
ベクトル空間 V の次元 $\dim V$ を基底を構成するベクトルの本数と定義する。

ゼロベクトル空間の次元は 0 と定める：

$$\dim 0 := 0.$$

以降、この講義ではベクトル空間は　有限次元と仮定する。

6.3.1　目標の定理

定理 6.5. V を有限次元ベクトル空間とする。部分空間 $U \subset V$ にたいして次がなりたつ：

$$\dim U \leq \dim V.$$

等号成立条件は $U = V$ である。つまり、つぎの同値関係が成り立つ：

$$\dim U = \dim V \quad \Longleftrightarrow \quad U = V.$$

6.3.2　準備

補題 6.6 (前回)**.** ベクトル空間 V の n 本のベクトルからなるベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ の生成する部分空間を U とおく：

$$U := \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$$

U の n より多い本数からなるベクトルの組は一次従属。
つまり、ベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\} \subset U$ は $m > n$ ならば一次従属。

系 6.7. n 次元ベクトル空間 V の中に一次独立なベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が存在したとすれば、

$$m \leq n$$

がなりたつ。

補題 6.8. V を *(*有限次元*)* ベクトル空間、$\{v_1, \cdots, v_k\}$ を V の一次独立なベクトルの組とする。
$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle \neq V$ と仮定する。ある $v_{k+1} \notin \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ をとってくる。
すると $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$ も V の一次独立なベクトルの組になる。

Proof. ある $c_1, \cdots, c_{k+1} \in K$ が存在して次を満たすとする：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad \cdots \quad (\spadesuit)$$

$c_{k+1} \neq 0$ とする。$(\spadesuit)$ より、次をえる：

$$v_{k+1} = \left(-\frac{c_1}{c_{k+1}}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{c_k}{c_{k+1}}\right) v_k.$$

この式は $v_{k+1} \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ を意味するので、矛盾。
よって $c_{k+1} = 0$ でなくてはならない。

等式 $(\spadesuit)$ は

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0 \quad \cdots \quad (\spadesuit)$$

となる。いま、$\{v_1, \cdots, v_k\}$ は一次独立なので、$c_1 = 0, \cdots, c_k = 0$ を得る。
よって、$c_1 = 0, \cdots, c_k = 0, c_{k+1} = 0$ が結論できる。

ゆえに、$\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$ は一次独立である。 □

6.3.3 定理の証明

定理 *6.5* の証明. $V = 0$ のときは定理は明らか。

$V \neq 0$ とする。$n = \dim V$ とおく。
部分空間 U を考える。$U = 0$ ならば明らかに $\dim U \leq \dim V$ がなりたつ。
$U \neq 0$ と仮定する。
$u_1 \in U,\ u_1 \neq 0$ がとってこれる。$\langle u_1 \rangle = U$ ならば $\{u_1\}$ が U の基底。
$\langle u_1 \rangle \neq U$ とする。$u_2 \in U \setminus \langle u_1 \rangle$ をとってくると、補題6.8 により、$\{u_1, u_2\}$ は一次独立。$\langle u_1, u_2 \rangle = U$ ならば、$\{u_1, u_2\}$ が U の基底。
$\langle u_1, u_2 \rangle \neq U$ ならば、$u_3 \in U \setminus \langle u_1, u_2 \rangle$ をとってくると、補題 6.8 により、$\{u_1, u_2, u_3\}$ は一次独立。
この操作が $n+1$ 回続けられたとすると、U のなかに $n+1$ 本のベクトルから構成される一次独立なベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_{n+1}\}$ が存在する。これは系 6.7 に矛盾。
よって、ある m $(1 \leq m \leq n)$ が存在して、m 本のベクトルから構成される一次独立なベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ が存在して $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle = U$ をみたす。つまり、$\{u_1, \cdots, u_m\}$ は U の基底である。よって $\dim U \leq \dim V$ をえる。

U を $\dim U = \dim V = n$ を満たす部分空間とする。$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を U の基底とする。もし、$U \neq V$ ならば補題 6.8 より、$u_{n+1} \in V \setminus U$ を付け足して得られるベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ は一次独立になる。系 6.7 に矛盾。
よって、$U = V$ でなければいけない。 □

6.3.4 一次独立なベクトルの組を基底への拡張

上の証明の議論を使うと次が証明できます：

命題 6.9. 一次独立なベクトルの組 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ は V の基底に拡張できる。

つまり、ベクトルの組 $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ で付け足して得られるベクトルの組 $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ が V の基底であるものが存在する。

6.3.5 生成系を基底へ縮小

命題 6.10. V のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ が V の生成系とすれば、その部分集合 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n}\}$ で V の基底になるものが取れる。

$$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n}\}$$

次の補題から従う。

補題 6.11. ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset V$ にたいしてつぎは同値：

(1) ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset V$ は一次従属。

(2) ある $i, (1 \leq i \leq m)$ が存在して $v_i \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ を満たす。

(3) ある $i, (1 \leq i \leq m)$ が存在して $\langle v_j \mid 1 \leq j \leq m \rangle = \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ を満たす。

つまり、v_i を除いても生成するベクトル空間は変わらない。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset V$ は一次従属なので、ある $\vec{c} = (c_j)_{1 \leq j \leq m}$, $\vec{c} \neq 0$ が存在して $\sum_{j=1}^{m} c_j \vec{v}_j = 0 \cdots (\heartsuit)$ を満たす。$\vec{c} \neq 0$ なのである $i, (1 \leq i \leq m)$ が存在して $c_i \neq 0$ をみたす。よって等式 $(\heartsuit)$ を変形して等式 $v_i = \sum_{j, j \neq 0} -c_j c_i^{-1} v_j$ をえる。ゆえに $v_i \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ である。

(2) $\Rightarrow$ (1). $v_i \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ であるから、ある $d_j \in K$, $(1 \leq j \leq m, j \neq i)$ が存在して $v_i = \sum_{j \neq i} d_j v_j$ をみたす。よって m 次数ベクトル $\vec{c} = (c_j)$ を $c_j = -d_j, c_i = 1$ と定めれば $\vec{c} \neq 0, \sum_{j=1}^{m} c_j \vec{v}_j = 0$ がなりたつ。ゆえにベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset V$ は一次従属。

(2) $\Rightarrow$ (3). 包含関係 $\langle v_j \mid 1 \leq j \leq m \rangle \supset \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ は明らかなので、包含関係 $\langle v_j \mid 1 \leq j \leq m \rangle \subset \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ を示す。

条件 (2) を仮定している。つまり、$v_i \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m, j \neq i \rangle$ であるから、ある $d_j \in K$, $(1 \leq j \leq m, j \neq i)$ が存在して $v_i = \sum_{j \neq i} d_j v_j \cdots (\clubsuit)$ をみたす。

$u \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m \rangle$ を任意にとってくる。あるスカラー $c_i \in K, (1 \leq i \leq m)$ が存在して $u = \sum_{j=1}^{m} c_j v_j$ を満たす。これに $(\clubsuit)$ を代入することで $u = \sum_{j \neq i} (c_j + d_j) v_j$ をえる。ゆえに $u \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m,\ j \neq i \rangle$ が示された。

(3) $\Rightarrow$ (2). $v_i \in \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m \rangle = \langle v_j \mid 1 \leq j \leq m,\ j \neq i \rangle$. $\square$

6.3.6 基底の特徴づけ

定理 6.12. n 次元ベクトル空間 V の n 本のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に対して次の命題は同値：

(1) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は V の基底。

(2) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は V の生成系。

(3) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は一次独立。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2), (3) は明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1). $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が一次独立であることを示せばよい。
$v_1, \cdots, v_n$ が一次独立でなければ、これよりも個数の少ない生成系を V が持つことになり矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (1).
$\{v_1, \cdots, v_n\}$ が生成系であることを示せばよい。
$v_1, \cdots, v_n$ が生成系でなければある v_{n+1} が存在して $v_1, \cdots, v_{n+1}$ が一次独立になり矛盾。 □

7 ベクトルの組の一次独立、生成系、基底であることの判定

7.1 数ベクトルの組の一次独立、生成系、基底であることの判定

$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m \in K^n$ に対して $A = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ と定める。（注意：これまでの講義とはサイズが逆転していて A は $n \times m$ 行列です。）$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ の一次結合は行列の積で表せます：$\vec{x} = (x_i) \in K^m$ にたいして

$$A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_m\vec{v}_m$$

が成り立つ。

これを使って一次独立性、生成系・基底であることを行列の言葉に翻訳してやることができます。

命題 7.1. $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m \in K^n$ に対して $A = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ と定める。このとき次が成り立つ。

(1) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ が一次独立である為の必要十分条件は $\mathsf{rank}\, A = m$ が成り立つことである。

(2) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ が K^n の生成系である為の必要十分条件は $\mathsf{rank}\, A = n$ が成り立つことである。

(3) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ が K^n の基底である為の必要十分条件は $m = n$ でかつ A が正則であることである。
このとき $\vec{u} \in K^n$ の $(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ に関する座標は $A^{-1}\vec{u}$ で与えられる。

Proof. (1) 一次独立性というのは斉次連立一次方程式 $A\vec{x} = 0$ が非自明な解をもたないことである。よって、前期の定理から命題は示される。

(2) $v_1, \cdots, v_m$ が生成系であるというのは、任意の $u \in K^n$ にたいしてある $x \in K^m$ が存在して $Ax = u$ をみたすということである。$u \in K^n$ にたいしてこのような $x \in K^m$ が存在するための必要十分条件は $\mathsf{rank}\, A = \mathsf{rank}(A \mid u)$ だった。
$\mathsf{rank}\, A = n$ ならばこれは任意の $u \in K^n$ にたいして成り立つ。
$\mathsf{rank}\, A < n$ とする。するとこれが成り立たない $u \in K^n$ が存在する。

$\because$ ある正則行列 X と被約階段行列 B が存在して $A = XB$ をみたす。仮定より B の第 n 行は 0 ベクトルである。例えば $u = Xe_n$ と置けばよい。$(A \mid u) \xrightarrow{\text{行基本変形}} (B \mid e_n)$. □

一次独立系が基底へ拡張できることを数ベクトルの場合に翻訳すると次の補題を得ます。

系 7.2. $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m \in K^n$ が一次独立とする。若し $m < n$ ならば $n-m$ 本のベクトル $\vec{v}_{m+1}, \cdots, \vec{v}_n$ を付け足して K^m の基底 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ をつくることができる。

別の言い方をすると、$n \times m$ 行列 $A = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$ が $\mathsf{rank}\, A = m$ ならば適切な $n \times (n-m)$ 行列 $B = (\vec{v}_{m+1}, \cdots, \vec{v}_n)$ を付け足して n 次正則行列 $(A \mid B)$ が得られる。

7.1.1 例

1×3 行列 $B = (1,1,1)$ の核 $V := \operatorname{Ker} B$ の基底と次元を求めよう。

$$V = \operatorname{Ker} B = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$$

（イメージでは V は平面だから 2 次元になって欲しい）

実は前期で講義した斉次連立一次方程式 $B\vec{x} = 0$ の解法がそのまま使える。この方程式の解は

$$\vec{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

ということを前期に説明しました。このことは線形代数にたいしては次の様に言い換えられます：

3 次数ベクトル $\vec{x} \in K^3$ にたいして次がなりたつ：

$$\vec{x} \in V \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{for some } s, t \in \mathbb{R}.$$

この関係を集合を使って整理すると次の様に言い換えられます：

$$V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

ただし、次の様に記号を設定しました：

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

うえの集合の等号はベクトルの組 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ が部分空間 V の生成系であること言っています。

さて、これは基底なのでしょうか？一次独立性を確かめましょう。

$$A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\mathsf{rank}\, A = 2$ なので、ベクトルの組 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ は一次独立です。

ベクトルの組 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ が部分空間 V の基底であることが証明できました。とくに次元も求まりましたね：

$$\dim V = 2.$$

7.2 ベクトルの組の一次独立、生成系、基底であることの判定

数ベクトル空間ではない（抽象）ベクトル空間の場合を扱うために新たな記法を導入します。「新たな」といっても一次結合の書き方を簡単にするだけです。

7.2.1 ベクトルの順序付き集合と列ベクトルとの積として一次結合を表す

ベクトルの順序付き組 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を（抽象ベクトルの）行ベクトルとしてみなすと（通常の）列ベクトルとの積を次で定義してみようと思えてきます：

定義 7.3. ベクトル空間 V のベクトルの順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を考えます。
こいつと $\vec{x} = (x_j)_{j=1}^m \in K^m$ に対して次のように記号を定めましょう：

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m)\vec{x} := (u_1, u_2, \cdots, u_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m.$$

偉そうなことを言っているけれど、単に、今まで書いてきた一次結合の新たな書き方を与えただけです。念のために一次独立、生成系、基底がどう表されるかを見ておきましょう：

例 7.4. ベクトル空間 V のベクトルの順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を考えます。

(1) 順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が一次独立であるというのは次がなりたつこと：
$\vec{x} \in K^m$ が $(u_1, u_2, \cdots, u_m)\vec{x} = 0$ をみたせば $\vec{x} = 0$ が成り立つ。

(2) 順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が V の生成系であるというのは次がなりたつこと：
任意の $v \in V$ にたいしてある $\vec{x} \in K^m$ が存在して $(u_1, u_2, \cdots, u_m)\vec{x} = v$ をみたす。

(3) 順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が V の基底であるというのは次がなりたつこと：
任意の $v \in V$ にたいしてある $\vec{x} \in K^m$ が一意的に存在して $(u_1, u_2, \cdots, u_m)\vec{x} = v$ をみたす。

座標についても書き換えられますね。

例 7.5. ベクトル空間 V の順序付き基底 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を考える。
$u \in V$ の $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に関する座標 $\vec{x} \in K^n$ というのは、次を満たすものをいう：

$$u = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\vec{x}$$

7.2.2　判定法

命題 7.6. ベクトル空間 V の順序付き基底 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を考える。
部分集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\} \subset V$ の各要素 u_j の $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に関する座標を $\vec{a}_j$ とする。
$n \times m$ 行列 A を $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m)$ と定める。
次がなりたつ；

(1) 次は同値：

- *(a)* 部分集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\} \subset V$ は一次独立。
- *(b)* 部分集合 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} \subset K^n$ は一次独立。
- *(c)* $\mathsf{rank}\, A = m$

(2) 次は同値：

- *(a)* 部分集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ は V の生成系。
- *(b)* 部分集合 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\}$ は K^n の生成系
- *(c)* $\mathsf{rank}\, A = n$

(3) 次は同値：

- *(a)* 部分集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ は V の基底。
- *(b)* 部分集合 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\}$ は K^n の基底。
- *(c)* $m = n$ かつ A は正則行列。

(4) 部分集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ は V の基底とする。
$w \in V$ の $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に関する座標を $\vec{x}$, $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ に関する座標を $\vec{y}$ とおく。
すると次がなりたつ：
$$\vec{y} = A^{-1}\vec{x}.$$

7.2.3　ベクトルの順序付き集合に行列を掛けてあらたに順序付き集合を作り出す。

列ベクトルを掛けられるのだから、行列も掛けるという操作も定義できます。

定義 7.7. ベクトル空間 V のベクトルの順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を考えます。こいつに対して $m \times k$ 行列 $A = (a_{ij})$ の積を以下で与えられる k 本のベクトルの順序付き集合として定義します：

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, \cdots, u_m)A &:= ((u_1, u_2, \cdots, u_m)\vec{a}_1, \cdots, (u_1, u_2, \cdots, u_m)\vec{a}_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}u_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}u_i, \cdots, \sum_{i=1}^m a_{ik}u_i\right).\end{aligned}$$

補題 7.8. 上の状況を考える。B を $k \times \ell$ 行列 B とする。このとき次が成り立つ。

$$((u_1, u_2, \cdots, u_m)A)\, B = (u_1, u_2, \cdots, u_m)\,(AB)\,,$$
$$(u_1, u_2, \cdots, u_m)E_m = (u_1, u_2, \cdots, u_m).$$

例 7.9. n 次元数ベクトル空間 K^n のベクトルの順序付き集合 $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を考えます。これを $n \times m$ 行列とみなしたものを此処だけの記号で $(u_1, u_2, \cdots, u_m)_{\text{行列}}$ と書くことにします。すると次が成り立ちます。

$$((u_1, u_2, \cdots, u_m)A)_{\text{行列}} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)_{\text{行列}}A$$

左辺の括弧の中身は上で定義した積で右辺は行列の積です。

7.2.4 命題 7.6 の証明（の鍵）

命題 7.6 を証明の鍵を示します。(1)(2)(3) の同値性 (b)⇔(c) は数ベクトル空間の場合から従います。また (1)(2) の同値性 (a)⇔(b) から (3) のおなじところは導出されることに注意しておきます。

命題の設定のもとで次がなりたつ：

$$(v_1, \cdots, v_n)A = (u_1, \cdots, u_m). \tag{7-14}$$

このことから、次の同値関係が成り立ちます

(1) $\vec{x} \in K^m$ にたいして

$$(u_1, \cdots, u_m)\vec{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; (v_1, \cdots, v_n)A\vec{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} = 0$$

(2) (i) 任意の $w \in V$ にたいしてある $\vec{x} \in K^m$ が存在して $w = (u_1, \cdots, u_m)\vec{x}$ をみたす。

(ii) 任意の $w \in V$ にたいしてある $\vec{x} \in K^m$ が存在して $w = (v_1, \cdots, v_n)A\vec{x}$ をみたす。

(iii) 任意の $\vec{y} \in K^n$ にたいしてある $\vec{x} \in K^m$ が存在して $\vec{y} = A\vec{x}$ をみたす。

(ii)⇔ (iii). (ii)⇒ (iii).
任意の $\vec{y} \in K^n$ をとってくる。$w = (v_1, \cdots, v_n)\vec{y}$ とおく。いま (ii) を仮定しているので、ある $\vec{x} \in K^m$ が存在して $w = (v_1, \cdots, v_n)A\vec{x}$ をみたす。よって、$(v_1, \cdots, v_n)\vec{y} = (v_1, \cdots, v_n)A\vec{x}$ をえる。$(v_1, \cdots, v_n)$ の一次独立性より、$\vec{y} = A\vec{x}$ を結論する。

(iii)⇒ (ii).
任意の $w \in V$ をとってくる。$(v_1, \cdots, v_n)$ は V の生成系なので、ある $\vec{y} \in K^n$ が存在して $w = (v_1, \cdots, v_n)\vec{y}$ をみたす。いま (iii) を仮定しているのである $\vec{x} \in K^m$ が存在して $\vec{y} = A\vec{x}$ をみたす。よって、$w = (v_1, \cdots, v_n)\vec{y} = (v_1, \cdots, v_n)A\vec{x}$ を得る。 □

この同値性を使えば (1)(2) の同値性 (a)⇔(b) は簡単に確認できます。

7.2.5 例

2 次以下の多項式のなすベクトル空間 P_2 のベクトルの組

$$f_1 = 1 + X + X^2,\ f_2 = 1 + 2X + 2X^2,\ f_3 = 1 + 2X + 3X^3$$

が基底であることを示し、一般のベクトル

$$g = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

の順序付き基底 (f_1, f_2, f_3) に関する座標 $\vec{x}$ を求めよう。

（まず、なにか基底をもってこないといけなかった。ここでは順序付き基底 $(1, X, X^2)$ を使うことにする。）

順序付き基底 $(1, X, X^2)$ に関する座標を求めるために計算する。

$$f_1 = 1 + X + X^2 = \begin{pmatrix} 1 & X & X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = 1 + 2X + 2X^2 = \begin{pmatrix} 1 & X & X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = 1 + 2X + 3X^3 = \begin{pmatrix} 1 & X & X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

この等式から、f_1, f_2, f_3 の順序付き基底 $(1, X, X^2)$ に関する座標は

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。そこで行列 A を

$$A = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と定める。行列式を求めると $\det A = 1$ となるので、A は正則。ゆえに、ベクトルの組 $\{f_1, f_2, f_3\}$ は P_2 の基底である。

一般のベクトル

$$g = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

の $(1, X, X^2)$ に関する座標 $\vec{y}$ は

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

である。よって、g の (f_1, f_2, f_3) に関する座標 $\vec{x}$ は

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_0 - a_1 \\ -a_0 + 2a_1 - a_2 \\ -a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

である。

7.3 おまけ：$\{\cdots\}$, $(\cdots)$, $\langle\cdots\rangle$ の区別をつけよう！

小さい記号の違いですが抽象的な概念を把握できるようになるために、キチンと区別するようにしてください。

• $\{\cdots\}$: 集合の括弧

ベクトル $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して「$\{v_1, v_2, v_3\}$」と書けば、これはこの 3 本のベクトルからなる集合を表します。単に要素を見ているので括弧の中の並び順はどうでもいいのです。下の六つの表記はすべて同じものです。

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_3, v_2\} = \{v_2, v_1, v_3\} = \{v_2, v_3, v_1\} = \{v_3, v_1, v_2\} = \{v_3, v_2, v_1\}.$$

用例： 文章「$u \in \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$」の意味は「$u$ は $v_1, v_2, \cdots, v_n$ のどれか」です。別の言い方では「ある $i(1 \leq i \leq n)$ が存在して $u = v_i$ を満たす」です。

注意: 講義では怠けてベクトルの組 $v_1, \cdots, v_n \in V$ とか書いていますが、これは大概は集合 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ のことを指しています。偶に、順序付き集合 $(v_1, \cdots, v_n)$ の場合もあります。

• $\langle\cdots\rangle$: 生成するベクトル空間の括弧

ベクトル $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して「$\langle v_1, v_2, v_3\rangle$」と書けば、これはこの 3 本のベクトルが V の中で生成するベクトル空間を表します。

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle := \{c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in K\}.$$

これは部分空間です。v_1, v_2, v_3 がすべて 0 でなければ下部集合は無限集合になります。

括弧の中を並び替えた以下の六つはすべて一致します。

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3, v_2\rangle = \langle v_2, v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3, v_1\rangle = \langle v_3, v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_2, v_1\rangle.$$

用例： 文章「$u \in \langle v_1, v_2, \cdots, v_n\rangle$」の意味は「$u$ は $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の一次結合であらわせる」です。別の言い方では「ある $\vec{c} = (c_i)_{1\leq i\leq n}$ が存在して $u = \sum_{i=1}^n c_iv_i$ を満たす」です。

• $(\cdots)$: 順序付き集合の括弧

ベクトル $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して「(v_1, v_2, v_3)」と書けば、これはこの 3 本のベクトルからなる集合に順序を考えあわせたもの表します。括弧の中の並び順も見ています。要素の集まりとその間の順序をみているので、これは<u>単なる集合ではありません</u>。

例 7.10. $v_1 \neq v_2, v_1 \neq v_3, v_2 \neq v_3$ とします。括弧の中を並び替えた以下の六つはすべて<u>別のもの</u>です。

$$(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_2), (v_2, v_1, v_3), (v_2, v_3, v_1), (v_3, v_1, v_2), (v_3, v_2, v_1).$$

注意 1： この記号法では紙面に現れている並び順を考えています。例えば「(v_2, v_3, v_1)」と書けば一番目のベクトルは v_2, 二番目のベクトルは v_3, 三番目のベクトルは v_1 です。

注意 2： 文章「$u \in (v_1, \cdots, v_n)$」を書くことはまずないでしょう。

• $(\cdots)$: 順序付き集合の括弧で中身が数ベクトルの場合

この講義では数ベクトル $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n \in K^m$ に対して「$(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$」と書けば、$m \times n$ 行列を表すこともよくあります。上の括弧の用法と紛らわしいといえば紛らわしいのですが、行列の括弧と順序付き集合の括弧は混用したほうが便利なのでそうしています。

8　行列の核と像の次元と基底

8.1　次元公式と基底の求め方

8.1.1　定義を復習

定義 8.1 (復習)**.** $m \times n$ 行列 A に対してその核 (kernel)$\operatorname{Ker} A$ と像 (image)$\operatorname{Im} A$ を以下の様に定めます。

$$\operatorname{Ker} A := \{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = 0\},$$
$$\operatorname{Im} A := \{\vec{u} \in K^m \mid \exists \vec{x} \in K^n \text{ s.t. } \vec{u} = A\vec{x}\}.$$

つまり、文章「$\vec{x} \in \operatorname{Ker} A$」の意味は「$\vec{x}$ は n 次元数ベクトルであり $A\vec{x}$ をみたす」です。

文章「$\vec{u} \in \operatorname{Im} A$」の意味は「$\vec{u}$ は m 次元数ベクトルであり、ある n 次元数ベクトル $\vec{x}$ が存在して $\vec{u} = A\vec{x}$ をみたす」です。

方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ の観点からは次の様にみることができます。核 $\operatorname{Ker} A$ は斉次方程式 $A\vec{x} = 0$ の解のなすベクトル空間です。像 $\operatorname{Im} A$ は方程式 $A\vec{x} = \vec{u}$ が解をもつような $\vec{u} \in K^m$ のなすベクトル空間です。

補題 8.2. *(1)* 核 $\operatorname{Ker} A$ は K^n の部分空間、像 $\operatorname{Im} A$ は K^m の部分空間です。

(2) $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示すると

$$\operatorname{Im} A = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle.$$

8.1.2　次元公式

次の定理は大事です。教科書では線形写像の次元公式の系として与えられますが、それとは別の方法で直接証明しましょう。

定理 8.3 (次元公式)**.** $m \times n$ 行列 A に対して次が成り立つ：

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - \mathsf{rank}\, A,$$
$$\dim \operatorname{Im} A = \mathsf{rank}\, A,$$
$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n$$

Proof. $A = 0$ の場合は

$$\mathsf{rank}\, A = 0,\ \operatorname{Ker} A = K^n,\ \operatorname{Im} A = 0$$

なので明らか。

$A \neq 0$ とし、$r := \mathsf{rank}\, A$ とおく。$A = (\vec{a}_j)_{1 \leq j \leq n}$ が行基本変形により被約階段行列 $B = (\vec{b}_j)_{1 \leq j \leq n}$ に変形できたとする。$\vec{b_j}$ の第 k 成分を b_{kj} と表す。被約階段行列の定義にはある $1 \leq j(1) < j(2) < \cdots < j(r) \leq n$ が込められていたこと思いだしましょう。

よく出てくるので $j(i)$ の形以外の $j, (1 \leq j \leq n)$ の集合を J とおきます。つまり $J := \{1, \cdots, n\} \setminus \{j(1), \cdots, j(r)\}$ と定めます。

文章「$j \in J$」の意味は
「j は $1 \leq j \leq n$ であり、かつ、どんな $i = 1, \cdots, r$ にたいしても $j \neq j(i)$ である」ですね。

Im A に関する主張。

m 次正則行列 $P = (\vec{p}_j)_{1 \leq j \leq m}$ が存在して $A = PB$ を満たしました。

被約階段行列の定義を復習しましょう。

1. $\vec{b}_{j(i)} = \vec{e}_i$ for $1 \leq i \leq r$.
2. 若し j が $j < j(1)$ ならば $\vec{b}_j = 0$.
3. 若し j がある $i = 1, \cdots, r-1$ に対して $j(i) < j < j(i+1)$ ならば $b_{kj} = 0,\ (k > i)$.
4. 若し j が $j(r) < j$ ならば $b_{kj} = 0,\ (k > r)$.

これらのことから $\vec{b}_j, (j \in J)$ は、$i := \max\{i' \mid j(i') < j\}$ と定めると

$$\vec{b}_j = \sum_{k=0}^{i} b_{ki} \vec{b}_{j(k)} \tag{8-15}$$

と表されることに注意する。

等式 $A = PB$ より $\vec{a}_j = P\vec{b}_j$ が任意の $j = 1, \cdots, n$ に対して従います。これを $j(i),\ i = 1, \cdots, m$ に適用すると

$$\vec{a}_{j(i)} = P\vec{b}_{j(i)} = P\vec{e}_i = \vec{p}_i$$

が得られます。つまり P の列ベクトルを左からみて最初の r 本は A の列ベクトルになっていると分かります：

$$P = (\vec{a}_{j(1)}, \vec{a}_{j(2)}, \cdots, \vec{a}_{j(r)}, \vec{p}_{r+1}, \cdots, \vec{p}_m)$$

よって特にベクトルの組 $\vec{a}_{j(1)}, \cdots, \vec{a}_{j(r)}$ は一次独立であることに注意します。

また等式 (8-15) に P を左から掛けると

$$\vec{a}_j = \sum_{k=0}^{i} b_{ki} \vec{a}_{j(k)}. \tag{8-16}$$

よって

$$\vec{a}_j \in \langle \vec{a}_{j(1)}, \cdots, \vec{a}_{j(r)} \rangle$$

であることに注意します。

この事から次の等号の二つ目従います：

$$\mathrm{Im}\, A = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \rangle = \langle \vec{a}_{j(1)}, \cdots, \vec{a}_{j(r)} \rangle$$

上で注意した一次独立性と合わせるとベクトルの組 $\vec{a}_{j(1)}, \cdots, \vec{a}_{j(r)}$ が Im A の基底であることが示せました。

Ker A に関する主張。

これは基本的には前期の定理（教科書の定理 3.6）です。

各 $j \in J$ に対して m 次列ベクトル $\vec{x}_j$ を次で定義する：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -b_{kj} & i > j \text{ かつ } i = j(k) \text{ を満たす } k \text{ が存在する} \\ 0 & \text{上記以外}. \end{cases}$$

すると、任意の $\vec{x} \in \operatorname{Ker} A$ は $\{\vec{x}_j\}_{j\in J}$ の一次結合で表されるのだった。

つまり、$\operatorname{Ker} A = \langle \vec{x}_j \rangle_{j \in J}$ である。

あとはベクトルの組 $\{\vec{x}_j\}_{j\in J}$ が一次独立であることを確かめればいいです。

注目したいのは $j' \in J$ で $j' \neq j$ なものに対しては、次が成り立つということです：

$$x_{j'j} = \delta_{j'j} = \begin{cases} 1 & (j = j') \\ 0 & (j \neq j') \end{cases}.$$

一次独立性を確かめましょう。スカラーの組 $\{c_j\}_{j\in J}$ が存在して

$$\sum_{j\in J} c_j \vec{x}_j = 0$$

を満たしたとします。ある $j' \in J$ に対してこの等式の第 j' 座標をみましょう：

$$0 = \left(\sum_{j\in J} c_j \vec{x}_j \right)_{j'} = \sum_{j\in J} c_j x_{j'j} = c_{j'}$$

これが各 $j \in J$ に対して成り立つので $c_{j'} = 0\ (\forall j' \in J)$ が結論できます。

これにて $\{\vec{x}_j\}_{j\in J}$ は一次独立と分かりました。 □

8.2 基底のもとめかた

上の定理の証明中に核と像の基底をもとめる方法が与えられているので、まとめておきましょう。

命題 8.4. $m \times n$ 行列 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ の核 $\operatorname{Ker} A$ と像 $\operatorname{Im} A$ の基底は次の方法で求められる。

Step 1. 行基本変形により被約階段行列 $B = (\vec{b}_j)_{1\leq j\leq n}$ に変形する。

被約階段行列の定義にあらわれた数列 $1 \leq j(1) < j(2) < \cdots < j(r) \leq n$ を考える。

Step 2. ベクトルの組 $\{\vec{a}_{j(1)}, \vec{a}_{j(2)}, \cdots, \vec{a}_{j(r)}\}$ が像 $\operatorname{Im} A$ の基底である。

Step 3. 方程式 $A\vec{x} = 0$ を解くときあらわれる教科書の定理 *3.6* で与えられるベクトルの組 $\{\vec{x}_j\}_{j\in J}$ が核 $\operatorname{Ker} A$ の基底である。

8.3 応用

上の命題を使うと $\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \rangle \subset K^m$ の基底を求めることができます。$m \times n$ 行列 $A = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n)$ の像と考えて基底を求めればいいのです。

注意 8.5. 上の命題からも $\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \rangle \subset K^n$ の基底が $\{v_1, \cdots, v_n\}$ の中から選んでくることができることが示されています。

これは以前、抽象ベクトル空間にたいして述べて、詳しい証明を省いたことを、数ベクトル空間の場合に証明したことになります。

例 8.6.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

として部分空間 $U = \langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_6 \rangle$ の基底を求めましょう。

その為には行列 A を以下で定めて、行基本変形して被約階段行列 B に変形しましょう。

$$A = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

被約階段行列 B は下に書いた通りです。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

なので特に $\operatorname{rank} A = 3$ であり $j(1) = 1, j(2) = 3, j(3) = 5$ です。

このことから $U = \langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_6 \rangle$ の基底は $\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5$ であり、この部分空間の次元は 3 と分かります：

$$\dim U = 3.$$

この例をもう少し観察しましょう。$j(i)$ 以外の形をした j（つまり J の要素）に対する $\vec{v}_j$ は $\vec{v}_{j(i)}$ の一次結合で表すことができました。それを今の場合に具体的に書いてみます。

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1, \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_3, \vec{v}_6 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_5 \tag{8-17}$$

この式から次の式の二つ目の等号がが分かります：

$$A = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_6) = (\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8-18}$$

何となく被約階段行列 Bっぽい行列が現れていますね。ベクトルの組 $\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5$ は 4 次元数ベクトル空間 K^4 の一次独立なベクトルの組なので、これを基底に拡張することができますね。いまの場合だ

と、ある $\vec{u}\in K^4$ が存在して $\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_5,\vec{u}$ が K^4 の基底になります。ベクトル $\vec{u}$ は等式 (8-17) にはあらわれていません。しかし、無理やり $0\vec{u}$（0 倍の $\vec{u}$）がいるとおもうと、(8-19) は次の様にかけます：

$$A=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_6)=(\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_5,\vec{u})\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&1\\0&0&1&-3&0&-1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{8-19}$$

しかし、無駄な行が増えたお蔭で被約階段行列 B が現れました。基底を取って来たご利益は 4 次正方行列 $P=(\vec{v}_1,\vec{v}_3,\vec{v}_5,\vec{u})$ が正則ということにあります（分からない人は復習しましょう。）。つまり、整理してみると得られる式は以下です

$$A=PB,\ （P：\text{正則}、B：\text{被約階段}).$$

これが行基本変形（正則行列を左から掛ける）をして被約階段行列に変形する、という操作（の逆）に対応している等式です。行基本変形を実行しなくてもこの等式の存在が示せました。

この例の締めくくりとして $j(1),j(2),j(3)$ もベクトル空間の観点からえられることを見ておきましょう。先ず、$i=1,\cdots,6$ にたいして部分空間 U_i を $U_i=\langle v_1,\ldots,v_i\rangle$ と定めましょう。すると次の関係が分かります：

$$0\neq U_1=U_2\subsetneq U_3=U_4\subsetneq U_5=U_6.$$

生成系を増やしても、部分空間は変化してない場合もあることに注意して下さい。

等号 $U_1=U_2,U_3=U_4,U_5=U_6$ はそれぞれ (8-17) から従います。$j(1)=1,j(2)=3,j(3)=5$ が何処に現れているか探してみましょう。

そうですね。部分空間が増大している番号を拾ってきていますね。

8.4 （抽象）ベクトル空間の場合

（抽象）ベクトル空間の場合は次の命題を使って数ベクトル空間の場合に帰着します。

命題 8.7. ベクトル空間 V の順序付き基底 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ を考える。
部分集合 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}\subset V$ の各要素 u_j の $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ に関する座標を $\vec{a}_j$ とする。
$U:=\langle u_1,u_2,\cdots,u_m\rangle$ とおく。
$A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$ と $n\times m$ 行列を定める。
次は同値：

(a) 部分集合 $\{u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_r}\}$ は U の基底。

(b) 部分集合 $\{\vec{a}_{i_1},\vec{a}_{i_2},\cdots,\vec{a}_{i_r}\}$ は $\operatorname{Im}A$ の基底。

9　部分空間の共通部分、和、直和

9.1　共通部分空間

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る二つの平面 $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^3$ の交わり $H_1 \cap H_2$ は原点を通る直線でした。
これは（抽象）ベクトル空間 V の部分空間 $U_1, U_2 \subset V$ の交わり $U_1 \cap U_2$ が V の部分空間であるという命題に一般化されます。

念のために復習しておくと、集合 X の部分集合 Y, Z の共通部分 $Y \cap Z$ というのはどういうものだったかというと、
文章「$x \in Y \cap Z$」の意味が「$x \in Y$ かつ $x \in Z$」であるようなものでした。

命題 9.1. V をベクトル空間、U_1, U_2 を V の部分空間とする。
すると、共通部分集合 $U_1 \cap U_2$ も V の部分空間である。

Proof. $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ を示す。
$0 \in U_1$ かつ $0 \in U_2$ なので $0 \in U_1 \cap U_2$ である。よって、$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ が示された。

$u, v \in U_1 \cap U_2,\ c, d \in K \ \Rightarrow cu + dv \in U_1 \cap U_2$ を示す。
条件より $u, v \in U_1$ なので $cu + dv \in U_1$ がなりたつ。同じく、$u, v \in U_2$ なので $cu + dv \in U_2$ がなりたつ。
よって、$cu + dv \in U_1$ かつ $cu + dv \in U_2$ が示されたので、ゆえに $cu + dv \in U_1 \cap U_2$ が結論される。 □

例 9.2. $V = K^3$ とし、さらに

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \middle| \ 2x + 4y - 3z = 0 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \middle| \ \pi x + ey + \sqrt{2} z = 0 \right\}$$

とすると

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \middle| \ 2x + 4y - 3z = 0, \pi x + ey + \sqrt{2} z = 0 \right\}$$

例 9.3. $V = K^m$ とする。A を $n \times m$ 行列、B を $k \times m$ 行列とする。これらの核の共通部分は $(n+k) \times m$ 行列 $C := \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ の核と一致する：

$$\ker A \cap \ker B = \ker C$$

9.2 部分空間の和

9.2.1 部分空間の合併は、、、、、

ベクトル空間 V の部分空間 $U_1,\ U_2$ の合併集合 $U_1 \cup U_2$ は部分空間になるとは限らない。
実際、次がなりたつ：

命題 9.4. ベクトル空間 V の部分空間 $U_1,\ U_2$ の合併集合 $U_1 \cup U_2$ は部分空間になるための必要十分条件は $U_1 \subset U_2$ あるいは $U_2 \subset U_1$ が成り立つことである。
前者の条件が成り立つ場合には $U_1 \cup U_2 = U_2$, 後者の場合は $U_1 \cup U_2 = U_1$ がなりたつ。

部分空間のなかで合併っぽいものを考えたくなる。

9.2.2 部分空間の和

定義 9.5. ベクトル空間 V の部分空間 $U_1,\ U_2$ にたいして V の部分集合 $U_1 + U_2$ を次で定義する：

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

文章「$v \in U_1 + U_2$」の意味は「x というのは V の要素であり、ある $u_1 \in U_1$ とある $u_2 \in U_2$ が存在して $v = u_1 + u_2$ を満たす」です。
これを使うと次の命題は容易に示せます。

命題 9.6. ベクトル空間 V の部分空間 $U_1,\ U_2$ にたいして V の部分集合 $U_1 + U_2$ は部分空間である。

例 9.7. $V = K^3$ とする。$u_1,\ u_2$ を考え、$U_1 = \langle u_1 \rangle,\ U_2 = \langle u_2 \rangle$ とおく。

$$U_1 + U_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$$

がなりたつ。
$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ の場合には、U_1, U_2 はそれぞれのベクトルが張る直線である。さらに u_1, u_2 が一次独立ならば $U_1 + U_2$ は u_1, u_2 が張る平面である。

例 9.8. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\},\ \{u_1, \cdots, u_m\}$ にたいして次がなりたつ：

$$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle + \langle u_1, \cdots, u_m \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n, u_1, \cdots, u_m \rangle$$

例 9.9. もう一回数ベクトル空間に戻る。$V = K^n$ で考える。$n \times m$ 行列 A と $n \times k$ 行列 B の像の和空間は $n \times (m+k)$ 行列 $(A|B)$ の像である：

$$\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A|B)$$

.

定理 9.10. ベクトル空間 V の部分空間 $U_1,\ U_2$ にたいして次がなりたつ：

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

この公式は、集合の要素の個数に関する次の公式と対比させると覚えやすい：

部分集合 $X_1, X_2 \subset Y$ にたいして次がなりたつ：

$$\#X_1 + \#X_2 = \#(X_1 \cup X_2) + \#(X_1 \cap X_2)$$

Proof.

$$l = \dim(U_1 \cap U_2),\ m := \dim U_1,\ n = \dim U_2$$

とおく。

$$\dim(U_1 + U_2) = n + m - l \tag{9-20}$$

をしめしたい。

$\{u_1, \ldots, u_l\}$ を $U_1 \cap U_2$ の基底とする。

これを拡張して U_1 の基底 $\{u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}\}$ と U_2 の基底 $\{u_1, \cdots, u_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\}$ を構成する。

主張 9.11. $\{u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}, w_1, \cdots, w_{n-l}\}$、は $U_1 + U_2$ の基底である。

主張を示せば、次元の等式 (9-20) は直ちにしがう：

$$\dim(U_1 + U_2) = l + (m - l) + (n - l) = n + m - l,$$

主張の証明. 一次独立性：

まず最初に次のことを示す:「もし一次結合 $v = \sum_{j=1}^{m-l} d_j v_j$ が $U_1 \cap U_2$ に属したとすれば $d_j = 0\ (\forall j = 1, \cdots, m - l)$ がなりたち、従って $v = 0$ である。」

$\{u_1, \cdots, u_l\}$ が $U_1 \cap U_2$ の生成系なので $v = \sum c_i u_i$ for some c_i とあらわせる。よって $\sum_{i=1}^{l} c_i u_i - \sum_{j=1}^{m-l} d_j v_j = 0$ が成り立つが、$\{u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}\}$ は一次独立だったので目標の結論を得る。

スカラー $c_1, \cdots, c_l, d_1, \cdots, d_{m-l}, e_1, \cdots, e_{n-l}$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{l} c_i u_i + \sum_{j=1}^{m-l} d_j v_j + \sum_{k=1}^{n-l} e_k w_k = 0 \tag{9-21}$$

をみたしたと仮定する。すると移項して

$$\sum_{j=1}^{m-1} d_j v_j = -\sum_{i=1}^{l} c_i u_i - \sum_{k=1}^{n-l} e_k w_k$$

をえる。

この式の左辺は U_1 に属し、右辺は U_2 に属する。よって両辺ともに $U_1 \cap U_2$ に属する。

先に示したことより。$d_j = 0\ (\forall j = 1, \cdots m - l)$ を得る。

同様の議論で.$e_k = 0$ ($\forall k = 1, \cdots, n-l$) を得る。
等式 (9-21) は
$$\sum_{i=1}^{l} c_i u_i = 0$$
となるが、$\{u_1, \cdots, c_l\}$ の一次独立性より、$c_i = 0$ ($\forall i = 1, \cdots, l$) を結論する。
これで等式 (9-21) がなりたてば係数は全て 0 であることが示された。よって、問題のベクトルの組は一次独立である。

生成系であること：

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \langle u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}\rangle + \langle u_1, \cdots, u_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\rangle \\ &= \langle u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}, u_1, \cdots, u_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\rangle \\ &= \langle u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}, w_1, \cdots, w_{n-l}\rangle \end{aligned}$$

よって、$\{u_1, \cdots, u_l, v_1, \cdots, v_{m-l}, w_1, \cdots, w_{n-l}\}$ は $U_1 + U_2$ の生成系である。

□

□

証明のなかで次の命題を示していますね：

補題 9.12. $\{u_1, \cdots, u_n\}$ が U の生成系、$\{w_1, \cdots, w_m\}$ が W の生成系ならば、$\{u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_m\}$ は $U + W$ の生成系である。

例 9.13. $\dim(\ker A + \ker B), \dim \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B$ の次元が計算できますね。

9.3 像や核の共通部分空間と和空間

次の補題を再掲。

補題 9.14. A, を $m \times n$ 行列、B を $m' \times n$ 行列、C を $m \times n'$ 行列とする。次がなりたつ。

1. $\ker A \cap \ker B = \ker \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$
2. $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} C = \operatorname{Im}(A|C)$.

9.3.1 例

例 9.15. 次の行列 A, B の核と像の次元を求めよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形で被約階段行列 A', B' に変形すると、以下を得る：

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

次元公式から次元が計算できます：

$$\dim \ker A = 2, \dim \operatorname{Im} A = 3, \dim \ker B = 3, \dim \operatorname{Im} B = 2$$

基底がどうなるかは各自で求めましょう。

次に核の和 $\ker A + \ker B$ と共通部分 $\ker A \cap \ker B$ の次元を調べましょう。

ポイントは共通部分の方が調べやすいことです。二つの行列を積み上げた行列 $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. を持って来ると $\ker A \cap \ker B = \ker C$ が成り立つのでした。C を行基本変形で被約階段行列 C' を作りましょう：

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次元公式から共通部部分の次元が計算できます。

$$\dim(\ker A \cap \ker B) = \dim \ker C = 1$$

和空間を直接扱うのは難しいのですが、次元公式を使うと次元は計算できますね：

$$\dim(\ker A + \ker B) = \dim \ker A + \dim \ker B - \dim(\ker A \cap \ker B) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

9.3.2　例

例 9.16.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

に対して $U_1 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle, U_2 = \langle \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6 \rangle$ と定める。部分空間 $U_1, U_2, U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$ の次元を求めよう。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおくと、$U_1 = \operatorname{Im} A_1, U_2 = \operatorname{Im} A_2, U_1 + U_2 = \operatorname{Im}(A_1 \mid A_2)$ が成り立つのでした。A_1, A_2 を行基本変形で被約階段行列に変形したものを B_1, B_2 と書くと、次を得ます：

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、U_1 の基底としてはベクトルの組 $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ が取れることが分かり、$\dim U_1 = 2$ U_2 の基底としてはベクトルの組 $\vec{v}_4.\vec{v}_5, \vec{v}_6$ が取れることが分かり、$\dim U_2 = 3$ が従います。

$U_1 + U_2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4.\vec{v}_5, \vec{v}_6 \rangle$ なので、計算は少し楽になります。このベクトルを並べた行列 A_3 を行基本変形で被約階段行列に直したもの B_3 は次です：

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $U_1 + U_2$ の基底としてはベクトルの組 $\vec{v}_1.\vec{v}_3, \vec{v}_5$ が取れることが分かり、$\dim(U_1 + U_2) = 3$ が従います。

最後に $\dim U_1 \cap U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = 2 + 3 - 3 = 2$ です。よく見てみると包含関係 $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ の両辺の次元が一致しています。なので、実は $U_1 \cap U_2 = U_1$ が成り立ちます。別の言い方をすると $U_1 \subset U_2$ が成り立っている訳です。

同じく包含関係 $U_2 \subset U_1 + U_2$ の両辺の次元も一致していて、この事から $U_2 = U_1 + U_2$ が従います。これも $U_1 \subset U_2$ と同値な条件ですね。

9.3.3 例

例 9.17. 実数 θ $(0 < \theta < 2\pi)$ を決める。

記号を簡単にするために $c := \cos\theta, s := \sin\theta$ とおく。仮定より $c \neq 1$ に注意しておく[2]。

ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を以下で定める：

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ s \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -s \\ c \end{pmatrix}.$$

さらに部分空間 U, W を $U := \langle \vec{v}_1 \rangle,\ W := \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ で定める。

次は簡単に示せる：

$$\dim U = 1,\ \dim W = 2.$$

次に $U + W$ の次元を求めよう。そこで $A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ とおき、これを行基本変形する

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & -s \\ 1 & s & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -(s+1)/(c-1) \\ 0 & 0 & (1-2c)/(c-1) \end{pmatrix}$$

[2] $c = 1$ を除外するのは場合分けを無くすためで、本質的な条件ではありません。

よって、

$$\dim(U+W) = \mathsf{rank}\, A = \begin{cases} 3 & (\theta \notin \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}), \\ 2 & (\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}). \end{cases}$$

つぎに、$\dim(U \cap W)$ を求める。

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) &= \dim U + \dim W - \dim(U+W) \\ &= 3 - \dim(U+W) \\ &= \begin{cases} 0 & (\theta \notin \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}), \\ 1 & (\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}). \end{cases} \end{aligned}$$

？図形的に理解できる？

9.4 直和空間、補空間

補題 9.18. ベクトル空間 V の部分空間 $U, W \subset V$ にたいして次の条件は同値：

(1) $U \cap W = 0$,

(2) $\dim U + \dim W = \dim(U+W)$,

(3) U と W の基底の合併集合は $U+W$ の基底である。

つまり、$\{u_1, \cdots, u_n\}$ が U の基底、$\{w_1, \cdots, w_m\}$ が W の基底ならば、$\{u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_m\}$ は $U+W$ の基底である。

(4) もし $u \in U, w \in W$ が $u+w=0$ をみたせば $u=0, w=0$ がなりたつ。

(5) 任意の $v \in U+W$ にたいして $(u,w) \in U \times W$ が一意的に存在して $v = u+w$ を満たす。

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) これは次元公式より明らか。

(2) $\Rightarrow$ (3). 補題 9.12 と基底というのは次元の本数のベクトルから構成される生成系が基底だったということから従う。

(3) $\Rightarrow$ (2) はあきらか。

(1) $\Rightarrow$ (4). $u \in U,\ w \in W$ が $u+w=0$ をみたしたとする。移項して $u = -w$ をえる。よって $u \in U \cap W$ である。いま $U \cap W = 0$ を仮定しているので $u=0$ をえる。さらに $w = -u = 0$ も結論する。

(4) $\Rightarrow$ (5).
$v \in U+W$ をとってくる。$(u,w) \in U \times W$ が存在して $v = u+w$ を満たす。ことは和空間の定義である。$(u,w), (u',w') \in U \times W$ が存在して

$$v = u + w = u' + w'$$

を満たしたと仮定する。移項して

$$(u-u')+(w-w')=0$$

をえる。いま (4) の成立を仮定しているので $u-u'=0,\ w-w'=0$ をえる。よって、$u=u',\ w=w'$ を結論する。

(5) $\Rightarrow$ (1).

$x\in U\cap W$ をとってくる。二つの要素 $(x,0),(0,x)\in U\times W$ は $x=x+0=0+x$ を満たす。いま (5) の成立を仮定しているので $(x,0)=(0,x)$ をえる。つまり、$x=0$ を結論する。

よって $U\cap W=0$ である。 □

定義 9.19. ベクトル空間 V の部分空間 U,W が上の補題の条件のどれかを満たすとき

和空間 $U+W$ は**直和空間**とよばれ $U\oplus W$ と書かれる：

$$U\oplus W := U+W \quad (\text{ただし}\,U\cap W=0\,\text{のときだけ})$$

例 9.20.

$$\mathbb{R}^2=(x\text{-axis})\oplus(y\text{-axis})=\langle\vec{e}_1\rangle\oplus\langle\vec{e}_2\rangle.$$

9.4.1 補空間

定義 9.21. ベクトル空間 V の部分空間 U を考える。

部分空間 W が **U の V のなかでの補空間**とは

$$V=U\oplus W$$

が成り立つことをいう。

補空間の存在は示す必要がありますね。

補題 9.22. ベクトル空間 V の部分空間 U を考える。

U の V のなかでの補空間は存在する。

Proof. $\{u_1,\cdots,u_m\}$ を U の基底とする。これは V のなかで一次独立なので、拡張して V の基底を作ることが出来る。つまり、ベクトルの組 $\{w_1,\cdots,w_l\}$ が存在して $\{u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_l\}$ は V の基底になる。$W=\langle w_1,\cdots,w_l\rangle$ が U の補空間である。 □

9.5 複数の空間の和空間、直和空間

部分空間 $U_1, \ldots, U_r$ にたいしてこれらの和空間を以下で定義する：

$$U_1 + \cdots + U_r := \left\{ \sum_{i=1}^{r} u_i \;\middle|\; u_i \in U_i \right\}.$$

といっても、これは二つの部分空間の和空間をとる操作を繰り返しているだけである：

$$U_1 + \cdots + U_r = (U_1 + \cdots + U_{r-1}) + U_r.$$

次元公式の系として次をえる：

系 9.23.

$$\dim(U_1 + \cdots + U_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim U_i - \sum_{i=2}^{r} \dim(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i.$$

系 9.24. ベクトル空間 V の部分空間 $U_1, U_2, \cdots, U_r$ にたいしてつぎは同値：

(1)

$$\dim(U_1 + \cdots + U_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim U_i$$

(2) $(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i = 0$ *for* $i = 2, \ldots, r$.

(3) $(U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_r) \cap U_i = 0$ *for* $i = 1, \ldots, r$.

Proof. (3) $\Rightarrow$ (2) は明らか。

(2) $\Leftrightarrow$ (1) 上の系からしたがう。

(1) $\Rightarrow$ (3).
すでに (1) と (2) の同値性は示している。
(3) の等式で $i = r$ の場合は (2) で得られている。

(1) で仮定している次元の等式は部分空間 $U_1, \cdots, U_r$ の並び順には依存しないことがカギとなる。
(3) の等式をある $i = 1, 2, \cdots, r-1$ にかんして導きたいとする。

第 i 番目の部分空間 U_i を一番最後においた部分空間の列 $W_1, W_2, \cdots, W_r$ をかんがえる：

$$W_j := \begin{cases} U_j & j < i \\ U_{j+1} & i \leq j < r \\ U_i & j = r \end{cases}.$$

この部分空間の組 $W_1, \cdots, W_r$ にたいしいも仮定 (1) はなりたつ。よって (2) も成り立つ。等式 $i = r$ の場合をみると、(3) の i における等式が得られる。

□

定義 9.25. 部分空間の和 $\sum_{i=1}^r U_i$ はうえの補題の条件をみたすとき**直和**と呼ばれ下の様に書かれる：

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r.$$

直和の同値条件を与えておきます。

命題 9.26. ベクトル空間 V の部分空間 $U_1, U_2, \cdots, U_r$ にたいしてつぎは同値：

(1) 和空間 $W = \sum_{i=1}^r U_i$ は直和である。

(2) $U_i, (1 \le i \le r)$ の基底の合併集合が W の基底である。

(3) もし $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2,\ \cdots, u_r \in U_r$ が等式 $\sum_{i=1}^r u_i = 0$ をみたせば、$u_i = 0\ (\forall i = 1, \cdots, r)$ が成り立つ。

(4) 任意の $w \in W$ にたいして $(u_1, u_2, \cdots, u_r) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_r$ が一意的に存在して $w = \sum_{i=1}^r u_i$ を満たす。

命題 9.27. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を考える。
$v_i \neq 0\ (\forall i = 1, 2, \cdots, n)$ と仮定する。次がなりたつ：

(1) ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が一次独立であるための必要十分条件は和空間 $\sum_{i=1}^n \langle v_i \rangle$ が直和空間であることである。

(2) ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が V の生成系であるための必要十分条件は

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

が成り立つことである。

例 9.28.

$$K^n = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$$

10 線形写像

10.1 線形写像

定義 10.1 (線形写像)**.** U, V をベクトル空間とする。写像 $f : V \to U$ が**線形**とは次が成りたつことと定める

任意の $u, v \in V$ と任意のスカラー $c \in K$ に対して以下の等式が成り立つ。

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad f(cu) = cf(u).$$

補題 10.2. 線形写像 $f : V \to U$ はゼロベクトルをゼロベクトルに移す：

$$f(0_V) = 0_U.$$

例 10.3. (1) 恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ は線形写像。

(2) ゼロ写像（任意の要素をゼロベクトルに送る写像）$0 : V \to U$ は線形写像。

10.2 像と核

定義 10.4. 線形写像 $f : V \to U$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\ker f$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\, f &:= \{v \in V \mid f(v) = 0\},\\ \mathrm{Im}\, f &:= \{u \in U \mid \exists v \in V \text{ s.t. } u = f(v)\} = \{f(v) \mid v \in V\}.\end{aligned}$$

像 $\mathrm{Im}\, f$ は U の部分空間であり、核 $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である。

補題 10.5. 線形写像 $f : V \to U$ にたいして次が成り立つ：

(1) f が全射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = U$.

(2) f が単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = 0$

Proof. (1) は明らか。

(2) $\Rightarrow$. （つまり、f は単射と仮定して、$\mathrm{Ker}\, f = 0$ を示す。）
$v \in \mathrm{Ker}\, f$ をとってくる。$f(v) = 0$ がなりたつ。一方、$f(0) = 0$ である。f の単射性より、$v = 0$ を結論する。
よって、$\mathrm{Ker}\, f = 0$ である。

$\Leftarrow$. （つまり、$\mathrm{Ker}\, f = 0$ と仮定して f が単射であると示す。）
$v, u \in V$ が $f(v) = f(u)$ をみたすとする。すると以下の計算で $f(v-u) = 0$ が示される：

$$f(v-u) = f(v) - f(u) = 0.$$

つまり、$v - u \in \mathrm{Ker}\, f$ である。いま $\mathrm{Ker}\, f = 0$ と仮定しているので、$v - u = 0$ をえる。したがって $v = u$ を結論する。
よって f は単射である。 □

10.3　例

10.3.1　数ベクトル空間の場合

数ベクトル空間から数ベクトル空間への線形写像 $f : K^m \to K^n$ は全て行列 A を掛ける写像でした。

例 10.6. $n \times m$ 行列 A にたいして写像 $T_A : K^m \to K^n$ をいかで定めた：

$$T_A(\vec{x}) := A\vec{x} \quad (\forall \vec{x} \in K^m).$$

次がなりたつ：

$$\ker T_A = \ker A, \quad \operatorname{Im} T_A = \operatorname{Im} A$$

10.3.2　多項式ベクトル空間の場合

例 10.7.

1. 多項式 $f \in P_n$ の微分を $D(f) := \dfrac{df}{dX}$. とあらわす。正確にいうと

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ にたいして } D(f) := \sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1}$$

と定める。

この対応規則は線形写像 $D : P_n \to P_{n-1}$ を与える。

- $\ker D$ は定数多項式のなす部分空間。
- $\operatorname{Im} D = P_{n-1}$.

2. 多項式 $f \in P_n$ の積分を $I(f) := \int f dX$. とあらわす。正確にいうと

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ にたいして } I(f) := \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

と定める。

この対応規則は線形写像 $I : P_n \to P_{n+1}$ を与える。

- $\ker I = 0$
- $\operatorname{Im} I$ は定数項が 0 の多項式がなす部分空間。

3. 差分

$$\Delta(f) := f(X+1) - f(X)$$

も線形写像 $\Delta : P_n \to P_{n-1}$ を与える。

- $\ker \Delta$ は定数多項式のなす部分空間。
- $\operatorname{Im} \Delta = P_{n-1}$.

4. 多項式 $g \in P_m$ を一つ決める。

この多項式を掛けるという写像

$$\mu_g : P_n \to P_{n+m}, \quad \mu_g(f) := gf$$

も線形写像である。

- $g = 0$ のとき $\ker \mu_g = P_n$, $\mathrm{Im}\, \mu_g = 0$.
- $g \neq 0$ のとき、$\ker \mu_g = 0$ であり、
  $\mathrm{Im}\, \mu_g$ は g の倍多項式からなる部分空間。（以前 W_g と書いていたやつ。）

5. 定数 $\alpha \in K$ を一つ決める。

この定数を X に代入する写像

$$S_\alpha : P_n \to K, S_\alpha(f) := f(\alpha).$$

も線形写像である。

- $n = 0$ のとき $\ker S_\alpha = 0$, $\mathrm{Im}\, S_\alpha = K$.
- $n \neq 0$ のとき $\mathrm{Im}\, S_\alpha = K$.
  $\mathrm{Ker}\, S_\alpha$ は α を代入すると 0 になる多項式のなす部分空間。（以前 U_α と書いていたやつ。）

命題 10.8 (因数定理)**.**

$$\mathrm{Im}\, \mu_{X-\alpha} = \ker S_\alpha$$

最後の例をもう少し膨らましてみましょう。

例 10.9. m を正整数とする。相異なる m 個の定数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in K$ を決める。

これらの定数を X に代入したものをまとめた写像

$$S : P_n \to K^m, S(f) := \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) \\ \vdots \\ f(\alpha_m) \end{pmatrix}$$

も線形写像である。

全射性、単射性を良く知ってる言葉で書いてみましょう：

- この写像 S が全射というのは

  「任意のスカラーの組 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ にたいして、ある n 次以下の多項式 f が存在して

  $$f(\alpha_1) = b_1,\ f(\alpha_2) = b_2,\ \cdots,\ f(\alpha_m) = b_m$$

  を満たす」

  ことです。

- この写像 S が単射というのは言いにくいですが、核 $\mathrm{Ker}\, S = 0$ という条件は言いやすいです：

  「n 次以下の多項式 f が
  $$f(\alpha_1) = 0,\ f(\alpha_2) = 0,\ \cdots,\ f(\alpha_m) = 0$$
  を満たせば、その多項式 f は $f = 0$ である」

  ということです。

いま、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ が相異なるスカラーという仮定から、S の全射性単射性は良く知ってることからすぐに判定できます。（分かりにくい場合は n, m が小さい場合を考えてみてください。）

- 写像 S が全射であるための必要十分条件は $n + 1 \geq m$ である。
- 写像 S が単射であるための必要十分条件は $n + 1 \leq m$ である。
- 写像 S が全単射であるための必要十分条件は $n + 1 = m$ である。

10.4 全射性・単射性の特徴づけ

10.4.1 全射性の特徴づけ

補題 10.10. 線形写像 $f : V \to U$ にたいして次の命題は同値。

(1) f は全射である。

(2) V のある生成系 $\{v_1, \cdots, v_r\}$ が存在して $\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ は U の生成系になる。

(3) V の任意の生成系 $\{v_1, \cdots, v_r\}$ にたいして $\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ は U の生成系になる。

Proof. (3) $\Rightarrow$ (2) は明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1). $\{v_1, \cdots, v_r\}$ を V の生成系で、$\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ は U の生成系であるものとする。
$u \in U$ を持ってくる。ある $c_1, \cdots, c_r \in K$ が存在して
$$u = c_1 f(v_1) + \cdots, +c_r f(v_r) = f(c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r)$$
をみたす。$v := c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r$ とおけば $u = f(v)$ がなりたつ。
よって f は全射と示された。

(1) $\Rightarrow$ (3)
$\{v_1, \cdots, v_r\}$ を V の生成系とする。$\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ は U の生成系であることを示す。
$u \in U$ をとってくる。仮定より f は全射なので、ある $v \in V$ が存在して $f(v) = u$ を満たす。ある $c_1, \cdots, c_r \in K$ が存在して
$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r$$
をみたす。よって、等式
$$u = f(v) = f(c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r) = c_1 f(v_1) + \cdots, +c_r f(v_r)$$
が成り立つ。これは $u \in \langle f(v_1), \cdots, f(v_r) \rangle$ を意味する。
ゆえに、$\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ は U の生成系であることが示された。

$\square$

次元というのは生成系を構成しうる最小のベクトルの個数だったので、次が導かれる：

系 10.11. ベクトル空間 V からベクトル空間 U への全射線形写像 $f : V \to U$ が存在すれば

$$\dim V \geq \dim U$$

がなりたつ。

じつは、逆も成り立つ。証明は、後ほど。

10.4.2 単射性の特徴づけ

補題 10.12. 線形写像 $f : V \to U$ にたいして次の命題は同値。

(1) f は単射である。

(2) V の中の任意の一次独立なベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_r\}$ にたいして $\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ は U の中で一次独立。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2).
$\{v_1, \cdots, v_r\}$ を V の中の一次独立なベクトルの組とする。$\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ が U の中で一次独立であることを示す。
あるスカラー $c_1, \cdots, c_r \in K$ が存在して

$$c_1 f(v_1) + \cdots + c_r f(v_r) = 0$$

をみたしたとする。
$v = c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r$ とおくと、$f(v) = 0$ がなりたつ。f は単射と仮定しているので $v = 0$ である。これはつまり

$$c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = 0$$

を意味するが、今 $\{v_1, \cdots, v_r\}$ は一次独立なので、$c_1 = 0, \cdots, c_r = 0$ を結論する。
よって、$\{f(v_1), \cdots, f(v_r)\}$ が U の中で一次独立であることが示された。

(2) $\Rightarrow$ (1).
$v \in V,\ v \neq 0$ を持ってくる。ベクトルの組 $\{v\}$ は一次独立である。よって仮定より $\{f(v)\}$ も一次独立である。ゆえに $f(v) \neq 0$.
これは $V \setminus \{0\} \subset V \setminus \operatorname{Ker} f$ を意味する。つまり、$\operatorname{Ker} f = \{0\}$ である。
ゆえに f は単射であることが示された。 □

次元というのは一次独立なベクトルの組を構成しうる最大のベクトルの個数だったので、次が導かれる：

系 10.13. ベクトル空間 V からベクトル空間 U への単射線形写像 $f : V \to U$ が存在すれば

$$\dim V \leq \dim U$$

がなりたつ。

じつは、逆も成り立つ。証明は、後ほど。

10.5 同型写像、同型なベクトル空間

定義 10.14 (同型写像)**.** 全単射な線形写像 $f : V \to U$ を**同型写像**とよぶ。記号では

$$f : V \xrightarrow{\cong} U$$

とあらわす。

全単射な写像には逆写像が存在しましたね。

補題 10.15. *(1)* 恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ は同型写像である。

(2) 同型写像 $f : V \to U$ の逆写像 $f^{-1} : U \to V$ も同型写像である。

（線形である、というのが新しいところ）

$$f : V \overset{\cong}{\to} U \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : U \overset{\cong}{\to} V.$$

(3) 同型写像の合成写像は同型写像である。

$$f : V \overset{\cong}{\to} U,\ g : U \overset{\cong}{\to} W \quad \Rightarrow \quad g \circ f : V \overset{\cong}{\to} W.$$

10.5.1 同型なベクトル空間

定義 10.16. ベクトル空間 V, U が**同型**とは同型写像 $f : V \to U$ が存在することをいう。

ベクトル空間が同型であることを次の記号であらわす：

$$V \cong U$$

補題 10.15 から次が従う：

補題 10.17. *(1)* $V \cong V$.

(2) $V \cong U \ \Leftrightarrow \ U \cong V$.

(3) $V \cong U,\ U \cong W \ \Rightarrow \ V \cong W$

注意 10.18. 性質 (1)(2)(3) はそれぞれ、対称律、反射律、推移律と呼ばれる。
これら三つの性質をみたす関係は**同値関係**と呼ばれます。

次元に関しては次が分かりますね。

補題 10.19.

$$V \cong U \ \Rightarrow \ \dim V = \dim U$$

同型なベクトル空間というのは線形代数の理論の中では本質的に同じベクトル空間というようなことを言っています。

なので、同型なベクトル空間の次元が一致するという上の補題の主張は非常に自然なものです。

驚くべきは逆が成り立つということです。

定理 10.20. ベクトル空間 V, U にたいして次は同値：

(1) $V \cong U$,

(2) $\dim V = \dim U$.

この定理は、（抽象）ベクトル空間というのは同型なものを同一視すると、次元だけの個性しかないということを言っています。

自然数 $n \geq 0$ にたいして次元が n であるベクトル空間として n 次元数ベクトル空間 K^n がありました。なので、上の定理の系として次を得ます：

系 10.21. ベクトル空間 V の次元を $n = \dim V$ とおく。すると V は n 次元数ベクトル空間 K^n と同型である：

$$V \cong K^n$$

ただ、実際の証明ではこの系を先に示し、それを梃子にして定理 10.20 を証明します。

準備をしましょう。

10.6 ベクトルの順序組から定まる線形写像 $\Phi : K^m \to V$

ベクトル空間 V の集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ をもってきます。

定義 10.22. V をベクトル空間、$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を V のベクトルの順序付き組とします。

線形写像 $\Phi : K^m \to V$ を以下で定義します：

$$\Phi(\vec{x}) := (u_1, \cdots, u_m)\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i u_i.$$

補題 10.23. 上の状況で次が成り立つ。

$$\operatorname{Im}\Phi = \langle u_1, \cdots, u_m \rangle, \quad \ker\Phi = \left\{ (x_i)_i^m \in K^m \middle| \sum x_i u_i = 0 \right\}.$$

系 10.24. 次が成り立つ。

(1) Φ が全射 $\Leftrightarrow$ ベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ は V の生成系。

(2) Φ が単射 $\Leftrightarrow$ ベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ は一次独立。

(3) Φ が同型 $\Leftrightarrow$ ベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ は V の基底。

10.6.1 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が基底の時は、

さて、最初に選んだベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が基底であるとしましょう。
上の系より線形写像 $\Phi : K^m \to V$ は同型写像です。なので、逆写像 $\Phi^{-1} : V \to K^m$ が存在します。
こいつが座標を与えてくれる写像なのです。

どういうことかというと、
ベクトル v に写像 Φ^{-1} を適用してやると K^n の要素 $\Phi^{-1}(v)$ が得られます。

この $\Phi^{-1}(v) \in K^m$ が $v \in V$ の順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ に関する座標なのです。

$$\Phi^{-1} : V \xrightarrow{\text{順序付き基底 } (u_1, \cdots, u_m) \text{ に関する座標を out put}} K^m$$

実際、順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ に関する $v \in V$ の座標 $\vec{x} \in K^m$ というのは
下の式 (10-22) を満たす数ベクトルとして定まっていました。

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m \tag{10-22}$$

これはとりもなおさず $\Phi(\vec{x}) = v$ ということを言っています。
それはつまり $\Phi^{-1}(v) = \vec{x}$ ということですね。

10.6.2 定理 10.20 の証明

定理 10.20 を証明していきましょう。(1) $\Rightarrow$ (2) は既に示しているので、(2) $\Rightarrow$ (1) を示せばいいのです。
実際には上で言った通り、系 10.21 の主張から先に証明します。

V を n 次元ベクトル空間とする。$\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底とする。系 10.24 より、線形写像 $\Phi_{\underline{v}} : K^n \to V$ は同型である。よって、$V \cong K^n$ が示された。

V, U を n 次元ベクトル空間とする。上で示したことから、$V \cong K^n$, $U \cong K^n$ である。よって、補題 10.17 より、$V \cong U$ を得る。

$$V \cong K^n,\ U \cong K^n \ \Rightarrow V \cong K^n,\ K^n \cong U \ \Rightarrow\ V \cong U.$$

10.7 次元公式

行列 A の像と核の次元に関する次元公式はすでに紹介しています。同様な公式が一般的な線形写像にたいしても成り立ちます。すぐあとで学習する線形写像の表現行列を用いることで、一般的な次元公式を行列のそれに帰着することも可能ですが、ここでは直接証明します。

定理 10.25 (次元公式)**.** 線形写像 $f : V \to U$ にたいして次がなりたつ：

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

Proof. W を $\operatorname{Ker} f$ の補空間とする。つまり、W は $\operatorname{Ker} f \oplus W = V$ をみたす V の部分空間。等式

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim W = \dim V$$

がなりたつので、定理を示すためには

$$\dim W = \dim \operatorname{Im} f$$

を示せばよい。そのためには W と $\operatorname{Im} f$ が同型であることを示せばよい。つまり、なにか同型写像 $g : W \to \operatorname{Im} f$ を構成すればよい。

写像 $g : W \to \operatorname{Im} f$ を

$$g(w) := f(w) \quad (\forall w \in W)$$

と定める。（W は V の部分集合なので要素 $w \in W$ を V の要素とみなすことができて、そうしてから写像 $f : V \to U$ により U に送ってやる。そうして定めた対応規則の像 $f(w)$ が $\operatorname{Im} f$ に属していることは明らかなので、値域を $\operatorname{Im} f$ に制限して写像 $g : W \to \operatorname{Im} f$ を得る。）

注意 10.26. 専門用語（というほど大したものではないけれど）でいうと、g は f の制限写像です。記号では $g = f|_W$ とかきます。

写像 $g : W \to \operatorname{Im} f$ が線形なのは明らか。以下、これが全単射であることを示す。

単射性：$\operatorname{Ker} g = 0$ を示す。

$w \in W$ が $g(w) = 0$ をみたすとする。g の定義より $f(w) = 0$ であるから $w \in \operatorname{Ker} f$ である。よって $w \in \operatorname{Ker} f \cap W = 0$ である。ゆえに $w = 0$ を結論する。

ゆえに $\operatorname{Ker} g = 0$ が示せた。

注意 10.27. 一般に線形写像の制限写像は線形で核に関しては $\operatorname{Ker}(f|_W) = \operatorname{Ker} f \cap W$ が成り立ちます。

全射性：$u \in \operatorname{Im} f$ をとってくる。ある $v \in V$ が存在して $u = f(v)$ をみたす。$V = \operatorname{Ker} f \oplus W$ なので、ある $(k, w) \in \operatorname{Ker} f \times W$ が一意的に存在して

$$v = k + w$$

をみたす。これに f を施すことで以下の様にして $u = g(w)$ がわかる：

$$u = f(v) = f(k + w) = f(k) + f(w) = f(w) = g(w)$$

これは u が g の像に属することをしめしている。

ゆえに $g : W \to \operatorname{Im} g$ は全射である。 □

10.7.1 応用

命題 10.28. V, U は次元の等しいベクトル空間とする：$\dim V = \dim U$. このとき線形写像 $f : V \to U$ にたいして次は同値：

(1) f は全単射。したがって同型写像。

(2) f は全射。

(3) f は単射。

Proof. (1) ⇒ (2) (3) は明らか。

(2) ⇒ (1).
f が単射であることを示せばよい。仮定より、$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim U$ がなりたつ。よって以下の様にして $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ が導出される：

$$\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim U - \dim U = 0.$$

ゆえに $\mathrm{Ker}\, f = 0$ が結論できる。

(3) ⇒ (1)
f が全射であることを示せばよい。
仮定より $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ がなりたつ。以下の様にして $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim U$ が導出される：

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim U$$

よって $\mathrm{Im}\, f = U$ が結論できる。 □

この命題は、つぎの命題の類似と思えますね：

命題 10.29. X, Y を要素な個数が等しい有限集合とする：$\#X = \#Y < \infty$.
このとき写像 $f : X \to Y$ にたいして次は同値：

(1) f は全単射。

(2) f は全射。

(3) f は単射。

注意 10.30. この集合に関する命題は有限集合という仮定がないと不成立です。
同様に、上の線形写像に関する命題も次元の有限性という仮定を（密に）使っています。

11　表現行列

11.1　喩え話

標語を先にあげます：

「基底：座標：線形写像：表現行列＝単位：測定値：正比例関係：比例定数」

以前、基底と座標を導入した際に、基底と座標というのは単位と測定値の様なものだ、と説明しました。この喩え話でいうと、表現行列というのは「比例定数」です。

「比例定数」というからには何か「正比例の関係」が二つの量の間に設定されている、というのが前提にありますよね。実は、この「正比例の関係」というのが線形写像なんです。「正比例の関係」は「ある量」を「別の量」に変換しますが、変換される前の「ある量」が写像の定義域であり、変換された後の「別の量」が写像の値域です。

抽象的な言葉で話していても分かり辛いので、具体的な例をあげて話しを続けて行きましょう。

11.1.1　豚肉を買おう

（あまり深く考えないことにして、）質量のなすベクトル空間を V とし、貨幣価値のなすベクトル空間を U としましょう[3]。

$$V := \{\,\text{質量}\,\},\quad U := \{\,\text{貨幣価値}\,\}.$$

豚肉を量り売りで買いましょう。質量にたいしてその分だけの豚肉の貨幣価値を対応させることで写像

$$f : V \to U,\quad f(m) := \text{ 質量 } m \text{ の分の豚肉の貨幣価値}$$

が得られますね。これは正比例の関係になっていますよね。購入する豚肉の質量が c 倍なら価値も c 倍になりますよね。また、この対応は質量の和を貨幣価値の和に写しますよね。なので、実は写像 f は線形です。

正比例の関係の比例定数を求めるには単位を V, U それぞれについて決める必要がありますね。

正比例とか比例定数とかいう以前に、質量とか貨幣価値とか抽象的な量を扱うにも単位を決めて測定値を与える必要がありました。「グラム」っていう単位と質量 m をグラムで測ったり（$m = xg$）とか。以前にも言ったことですが、実はこれはベクトル空間 V に順序付き基底 (g) を与えてベクトル m の座標を x を求めていることそのものです。

$$\Phi_{(\mathbf{g})} : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} V,\quad x \to x\mathbf{g} = (\mathbf{g})x.$$

（注意：$(\mathbf{g})x$ は順序付き基底 $(\mathbf{g})$ にベクトル x を掛けていることをあらわしている。いつもだと $(u_1, \cdots, u_n)\vec{x}$ になってるやつ。）

同じように、「円」っていう単位と貨幣価値 u を円で換算する（$u = y$ **円**）のはベクトル空間 U に順序付き基底 (**円**) を与えてベクトル u の座標を y を求めていることそのものです。

$$\Phi_{(\text{円})} : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} U,\quad y \to y\,\text{円} = (\text{円})y.$$

[3]あくまでも喩え話です

変換前後の量 V, U に単位を決めてやると、正比例の関係 f の比例定数 a というのは

$$f(\mathbf{g}) = a\,\text{円}$$

を満たす実数 a として一意的に定まるのでした。

実はこの a が表現行列なのです。ただ、皆さんご存知の通り、比例定数というのは設定した単位 $\mathbf{g}$, 円 に依存するので、表現行列というにはどの単位で測定したのかを明記する必要があります。正確に言うと比例定数 a というのは「定義域 V の順序付き基底 ($\mathbf{g}$) と値域 U の順序付き基底 (円) に関する線形写像 $f: V \to U$ の表現行列」です。

なにをやているのかを整理しておきましょう。

- 正比例の関係 $f: V \to U$ の比例定数 a を取り出すレシピ：

(I) まず、定義域 V と値域 U に順序付き基底（＝単位）を設定する。

(II) 次に、(I) で与えた V の順序付き基底（今の例だと $\mathbf{g}$）を f で U におくる。
（今の例だと、1$\mathbf{g}$ の豚肉を買う。$f(\mathbf{g}) \in U$ を得る）

(III) 最後に、(II) で得られた U の要素を (I) で与えた U の順序付き基底で測定する。
その測定値が比例定数 a である。
（今の例だと $f(\mathbf{g})$ という貨幣価値を 円 で測って、$f(\mathbf{g}) = a$ 円 という結果をえる。）

次の模式図は状況を明らかにしています。あとで出てくる図式 (11-31) の特別な場合です：

(11-23)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & U \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\Phi_{(\mathbf{g})}"] \arrow[r, "T_a"'] & \mathbb{R}. \arrow[u, "\Phi_{(\text{円})}"'] \end{tikzcd}$$

11.2 表現行列

11.2.1 順序付き基底とそれに関する座標

順序付き基底とそれに関する座標の定義を復習しておきます。

定義 11.1. V をベクトル空間、$\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底とする。このときベクトル $v \in V$ の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ に関する座標 $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n \in K^n$ を以下の式を満たす n 次元数ベクトルと定義する。

(11-24)
$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

上の式 (11-24) は次のようにも書けることに注意しておきます。

$$v = \Phi(\vec{x}) = (v_1, \cdots, v_n)\vec{x}. \tag{11-25}$$

上の式に現れている Φ はの順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ から定まる線形写像 $\Phi : K^n \to V$ です。

今の状況では Φ は同型写像なので逆写像 $\Phi^{-1} : V \to K$ が存在しますね。こいつが $v \in V$ の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ に関する座標 $\vec{x}$ を与えてくれます：

$$\vec{x} = \Phi^{-1}(v).$$

11.2.2　表現行列

表現行列というのは言わば「線形写像の座標」です。座標というのは順序付き基底があって初めて定義されるものでしたが、線形写像 $f : V \to U$ の定義域 V の順序付き基底と値域 U の順序付き基底が与えられて初めて表現行列が定義できます。

定義 11.2. V, U をベクトル空間、$(v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底、$(u_1, \cdots, u_m)$ を U の順序付き基底とする。

線形写像 $f : V \to U$ の定義域 V の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ と値域 U の順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ に関する表現行列 $A = (a_{ij})$ を

以下の式を満たす $m \times n$ 行列と定義する。

$$f(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m \quad \text{for all } j = 1, 2, \cdots, n. \tag{11-26}$$

上で現れた m, n はそれぞれ値域 U と定義域 V の次元であることに注しましょう：

$$m = \dim U,\ n = \dim V.$$

前の比例定数を作るレシピそのままですよね：

• <u>線形写像 $f : V \to U$ の表現行列 $A = (a_{ij})$ を取り出すレシピ</u>：

(I) まず、定義域 V と値域 U に順序付き基底

$$(v_1, \cdots, v_n), \quad (u_1, \cdots, u_m)$$

を設定する。

(II) 次に、(I) で与えた V の順序付き基底を f で U におくる。

$$f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$$

(III) 最後に、(II) で得られた U の要素を (I) で与えた U の順序付き基底で測定する。

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\
f(v_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
f(v_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m
\end{aligned}
$$

こうして得られた $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ が

線形写像 $f : V \to U$ の定義域 V の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ と値域 U の順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ に関する表現行列

です。

11.2.3　表現行列の定義の言い換え

表現行列 A の第 j 列ベクトルを $\vec{a}_j$ とおきます：$A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)$. このとき上の式 (11-26) は次のようにも書けます：

(11-27)
$$f(v_j) = (u_1, \cdots, u_m)\vec{a}_j \quad \text{for all } j = 1, 2, \cdots, n.$$

さらに、この式は j を動かして並べてやることで次のように書き直せます：

(11-28)
$$(f(v_1), \cdots, f(v_n)) = (u_1, \cdots, u_m)A.$$

さらにさらにこの式は行列 A に対する条件として次の式と同値です：

(11-29)
$$f((v_1, \cdots, v_n)\vec{x}) = (u_1, \cdots, u_m)A\vec{x} \quad \text{for all } \vec{x} \in K^n.$$

式 (11-29) は表現行列と座標との関係を教えてくれます。定義域と値域に順序付き基底が決められている状況で線形写像 $f : V \to U$ による座標の挙動を司るのが表現行列なのです。

(11-30)
$$
\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[rr, "f"] \arrow[d, dash, dashed] & & f(v) \in U \arrow[d, dash, dashed] \\
\vec{x} \in K^n \ \ (v\text{の座標}) \arrow[rr, "A\text{を掛ける}"'] & & A\vec{x} \in K^m \ \ (f(v)\text{の座標})
\end{tikzcd}
$$

この模式図は同型写像 Φ を用いるとキチンと書けます。

V, U をベクトル空間、$\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底、$\underline{u} = (u_1, \cdots, u_m)$ を U の順序付き基底とする。

それぞれを使って同型写像 Φ を作りましょう。

$$\Phi_{\underline{v}} : K^n \to V, \quad \Phi_{\underline{u}} : K^m \to U.$$

これを使うと図式 (11-30) は写像の図式として書けます：

(11-31)
$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & U \\
K^n \arrow[u, "\Phi_{\underline{v}}"] \arrow[r, "T_A"'] & K^m. \arrow[u, "\Phi_{\underline{u}}"']
\end{tikzcd}
$$

これを写像の等式として書いてやると、さらに表現行列の新たな定義が得られます：

(11-32)
$$f \circ \Phi_{\underline{v}} = \Phi_{\underline{u}} \circ T_A.$$

上の五つの式 (11-26) (11-27)(11-28)(11-29)(11-32) は同値なのでどれでも表現行列の定義式として採用することができます。実際の計算に向いているのは (11-26) です。抽象的な命題の証明に適しているのは (11-28) あるいは (11-32) です。

11.2.4　像と核

命題 11.3. V, U をベクトル空間、$(v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底、$(u_1, \cdots, u_m)$ を U の順序付き基底とする。線形写像 $f : V \to U$ の定義域 V の順序付き基底 $\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ と値域 U の順序付き基底 $\underline{u} = (u_1, \cdots, u_m)$ に関する表現行列を A とする。

すると次が成り立つ：

(1) 同型写像 $\Phi_{\underline{v}} : K^n \to V$ は核の同型
$$\operatorname{Ker} A \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ker} f$$
を誘導する。これの意味するところは：

(a) $v \in V$ が $\operatorname{Ker} f$ に属するための必要十分条件は座標 $\vec{x} = \Phi_{\underline{v}}^{-1}(v)$ が $\operatorname{Ker} A$ に属することである。

(b) ベクトルの組 $\{p_1, \cdots, p_r\} \subset \operatorname{Ker} f$ が基底（*resp.* 一次独立、生成系）であるための必要十分条件は座標 $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_r\} \subset \operatorname{Ker} A$ が同じ性質をみたすことと同値。

(c) 二つの部分空間の次元は一致する：
$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} A.$$

(2) 同型写像 $\Phi_{\underline{u}} : K^m \to U$ は像の同型
$$\operatorname{Im} A \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f$$
を誘導する。

これの意味するところは：

(a) $u \in U$ が $\operatorname{Im} f$ に属するための必要十分条件は座標 $\vec{y} = \Phi_{\underline{u}}^{-1}(u)$ が $\operatorname{Im} A$ に属することである。

(b) ベクトルの組 $\{q_1, \cdots, q_s\} \subset \operatorname{Im} f$ が基底（*resp.* 一次独立、生成系）であるための必要十分条件は座標 $\{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_s\} \subset \operatorname{Im} A$ が同じ性質をみたすことと同値。

(c) 二つの部分空間の次元は一致する：

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} A.$$

(3) 次が成り立つ：

(a) f が単射 $\Leftrightarrow$ T_A が単射。

(b) f が全射 $\Leftrightarrow$ T_A が全射。

(c) f が全単射 $\Leftrightarrow$ T_A が全単射。

11.3　例

例 11.4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を掛ける写像 $f = T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える。これは直線 $\langle \vec{v}_1 \rangle$ に関する偏角 $2\pi/3$ の回転ですね。ただし

$$\vec{v}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

良い座標をとってそれを見やすくしましょう。そこで以下の様にベクトルを定義します：

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ちなみに、この二つのベクトルが生成する平面 $H := \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ は $\vec{v}_1$ を法線とする平面です：

$$H = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}.$$

（余談）以前に講義でこの平面の基底を求めましたが、それとは別の基底 $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ を用いています。そうしなければいけない理由は、この基底が「正規直交基底」というものになっているからです。内積を計算すればスグわかる通り、二つのベクトルの長さは 1 で、しかも、互いに直交していますよね。この様な性質を持つ基底を正規直交基底と呼びます。しかし、内積というのは抽象ベクトル空間の構造では無いということに注意しておきます。後の講義で、数ベクトル空間の内積を抽象ベクトルに抽象化した抽象内積を導入します。（余談終）

ここでは f の値域定義域ともに同じ順序付き基底 $\underline{v} := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ を考えることにします。ただ、最初なので慣れるために

$$\vec{u}_1 := \vec{v}_1,\ \vec{u}_2 := \vec{v}_2,\ \vec{u}_3 := \vec{v}_3$$

と書き直して、値域の順序付き基底を $\underline{u} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ と書くことにします：

線形写像 $f = T_A$ の $\underline{v},\ \underline{u}$ に関する表現行列 B を計算しましょう：

$$
f(\vec{v}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_1 = 1\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\vec{v}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= (\cos 2\pi/3)\vec{u}_2 + (\sin 2\pi/3)\vec{u}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 \end{pmatrix} \\
f(\vec{v}_3) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= (-\sin 2\pi/3)\vec{u}_2 + (\cos 2\pi/3)\vec{u}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2\pi/3 \\ \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

この結果から表現行列が求まりますね：

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ 0 & \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(2\pi/3) \end{pmatrix}.
$$

第 2,3 列、第 2,3 行に位置する 2 次正方行列は回転をつかさどる行列 $R(2\pi/3)$ ですね。これは写像 $f = T_A$ というのは直線 $\langle \vec{v}_1 \rangle$ を軸とする、平面 $H = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ に関する偏角 $2\pi/3$ の回転であることを教えてくれます。

例 11.5. 次を示せ：

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を相異なる実数とする。

任意の実数の組 (b_1, b_2, b_3) にたいしてある 2 次以下の多項式 f が一意的に存在して

$$
f(\alpha_1) = b_1,\ f'(\alpha_2) = b_2,\ f''(\alpha_3) = b_3
$$

を満たす。

写像 $F : P_2 \to \mathbb{R}^3$ を以下で定める：

$$
F(f) := \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ f'(\alpha_2) \\ f''(\alpha_3) \end{pmatrix} \quad (\text{ for all } f \in P_2).
$$

この写像は線形である。問題にしている命題は F が全単射であることと同値である。（復習しておくと、写像 F の全射性が f の存在に対応していて、単射性が一意性に対応しています。）

よって、F の適当に値域と定義域に順序付き基底を与えて得られる表現行列 A が正則であることを示せばよい。

そこで、定義域には順序付き基底を $(1, X, X^2)$ を備え付け、値域には標準順序付き基底 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ を備え付けて、これらに関する表現行列 A を求める。

$$
\begin{aligned}
F(1) &= \begin{pmatrix} 1|_{X=\alpha_1} \\ (1)'|_{X=\alpha_2} \\ (1)''|_{X=\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
F(X) &= \begin{pmatrix} X|_{X=\alpha_1} \\ (X)'|_{X=\alpha_2} \\ (X)''|_{X=\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
F(X^2) &= \begin{pmatrix} X^2|_{X=\alpha_1} \\ (X^2)'|_{X=\alpha_2} \\ (X^2)''|_{X=\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ 2\alpha_2 \\ 2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ 2\alpha_2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

なので、表現行列 A は以下である：

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha_2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

行列式を計算すると $\det A = 2$ なので、A は正則であることが示せた。

例 11.6. $V = W = P_2(K)$ の場合を考えましょう。線形写像 $F : V \to W$ を次で定義します

$$
F(f) := Xf' - 2f.
$$

定義域 V には順序付き基底 $(1, X, X^2)$ を考え、値域 W には順序付き基底 $(1, 1+X, 1+2X+X^2)$ を考えた場合の F の表現行列 A を求めましょう：

$$
\begin{aligned}
F(1) &= -2 = (1, 1+X, 1+2X+X^2) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
F(X) &= -X = 1 \cdot 1 + (-1)(1+X) = (1, 1+X, 1+2X+X^2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
F(X^2) &= 0 = (1, 1+X, 1+2X+X^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

なので

$$
A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

A の像と核の基底と次元は

$$\mathrm{Im}\,A : \text{基底} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{次元} \quad \dim \mathrm{Im}\,A = 2.$$

$$\mathrm{Ker}\,A : \text{基底} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{次元}\dim \mathrm{Ker}\,A = 1.$$

F の像と核の基底と次元は

$$\mathrm{Im}\,F : \text{基底} \quad -2,\ -X, \quad \text{次元} \quad \dim \mathrm{Im}\,F = 2.$$

$$\mathrm{Ker}\,F : \text{基底} \quad X^2, \quad \text{次元} \quad \dim \mathrm{Ker}\,F = 1.$$

● とても良くある間違え!!

多項式ベクトル空間 P_n の要素は多項式です。なので、その部分空間である $\mathrm{Ker}\,F,\ \mathrm{Im}\,F$ の要素も、もちろん、多項式です。

それなのに基底を求めるという問題の答えを数ベクトルで書いてしまう人が毎年続出します。

頻繁に用いているたとえ話でいうと「最後に解答を書くときにはキチンと単位を付けましょうね。」ということです。なにかのグラム数を求める問題を解くのに、途中では数字の計算をしますが、最後には問題文の状況に即して導出した数値（それを x としましょう）にグラムって単位を付して解答を x**g**って書きますよね。

例 11.7. 次数が 2 次以下の実係数一変数多項式の成すベクトル空間 $V := P_2(\mathbb{R})$ からそれ自身への線形写像 $F : V \to V$ が次で与えられているとする。

$$F(f(X)) := (X+1)\frac{df}{dX}(X) - f(X) \qquad \text{for all } f(X) \in V$$

(1) 定義域の順序付きの基底 $(1, X, X^2)$ と値域の順序付きの基底 $(1, X, X^2)$ に関する F の表現行列 A を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 定義域の順序付きの基底 $(1, X+1, (X+1)^2)$ と値域の順序付きの基底 $(1, X+1, (X+1)^2)$ に関する F の表現行列 A' を求めよ。

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.4 基底の変換行列

定義 11.8. V をベクトル空間、$\underline{v}=(v_1,\cdots,v_n),\underline{v}'=(v_1',\cdots,v_n')$ を V の順序付き基底とする。このとき順序付き基底 $\underline{v}=(v_1,\cdots,v_n)$ から順序付き基底 $\underline{v}'=(v_1',\cdots,v_n')$ への変換行列 $P=(p_{ij})$ を以下の式を満たす n 次正方行列と定義する。

$$(v_1,\cdots,v_n)P=(v_1',\cdots,v_n'). \tag{11-33}$$

式 (11-33) にもいろいろな言い換えがあります。それを見つけるのは皆さんにお任せします。
写像を使ってまとめるとこうなります：

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rr, "T_P"] \arrow[dr, "\Phi_{\underline{v}'}"'] & & K^n \arrow[dl, "\Phi_{\underline{v}}"] \\ & V & \end{tikzcd} \tag{11-34}$$

この写像の図式でのベクトルの行き先を見ると次のようになっています：

$$\begin{tikzcd} \vec{x'} \arrow[rr, mapsto, "T_P"] \arrow[dr, mapsto, "\Phi_{\underline{v}'}"'] & & P\vec{x'} \arrow[dl, mapsto, "\Phi_{\underline{v}}"] \\ & (v_1',\cdots,v_n')\vec{x'}=(v_1,\cdots,v_n)P\vec{x'} & \end{tikzcd} \tag{11-35}$$

この図式を別の言い方をすると教科書 p162 定理 6.16 になります。
ただ、よく見てみると、基底の変換行列というのは表現行列であることがわかります。

命題 11.9. V をベクトル空間、$\underline{v}=(v_1,\cdots,v_n),\underline{v}'=(v_1',\cdots,v_n')$ を V の順序付き基底とする。このとき順序付き基底 $\underline{v}=(v_1,\cdots,v_n)$ から順序付き基底 $\underline{v}'=(v_1',\cdots,v_n')$ への変換行列 $P=(p_{ij})$ というのは、恒等写像 $\mathrm{id}_V:V\to V$ の定義域の順序付き基底 $\underline{v}'=(v_1',\cdots,v_n')$ と値域の順序付き基底 $\underline{v}=(v_1,\cdots,v_n)$ に関する表現行列である。

11.5 合成と表現行列

定理 11.10. 以下の状況を考える：

1. V,U,W:ベクトル空間
2. $f:V\to U,\ g:U\to W$: 線形写像
3. $(v_1,\cdots,v_n)$: V の順序付き基底
4. $(u_1,\cdots,u_m)$: U の順序付き基底
5. $(w_1,\cdots,w_k)$: W の順序付き基底

この状況で以下のように記号を定める：

(A) A: 定義域 V の順序付き基底 $(v_1,\cdots,v_n)$ と値域 U の順序付き基底 $(u_1,\cdots,u_m)$ とに関する f の表現行列。

(B) B: 定義域 U の順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ と値域 W の順序付き基底 $(w_1, \cdots, w_k)$ とに関する g の表現行列。

(C) C: 定義域 V の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ と値域 W の順序付き基底 $(w_1, \cdots, w_m)$ とに関する $g \circ f$ の表現行列。

このとき、次が成り立つ：

(11-36)
$$C = BA$$

長い状況設定と定理の主張は次の図式にスッキリとまとめられます：

(11-37)
$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "\Phi_{\underline{v}}"'] & K^m \arrow[r, "T_B"] \arrow[d, "\Phi_{\underline{u}}"'] & K^k \arrow[d, "\Phi_{\underline{w}}"] \\
V \arrow[r, "f"'] & U \arrow[r, "g"'] & W
\end{tikzcd}$$

Proof. 表現行列の定義より

$$\Phi_{\underline{w}} \circ T_{BA} = (g \circ f) \circ \Phi_{\underline{v}}$$

を示せばよい。

これは以下の様に導出できる：

$$\begin{aligned}
\Phi_{\underline{w}} \circ T_{BA} &= \Phi_{\underline{w}} \circ T_B \circ T_A \\
&= g \circ \Phi_{\underline{u}} \circ T_A \\
&= g \circ f \circ \Phi_{\underline{v}} \\
&= (g \circ f) \circ \Phi_{\underline{v}}.
\end{aligned}$$

□

11.6 表現行列の変換

定理 11.11. 以下の状況を考える：

1. V, U:ベクトル空間

2. $f : V \to U$: 線形写像

3. $(v_1, \cdots, v_n), (v'_1, \cdots, v'_n)$:$V$ の順序付き基底

4. $(u_1, \cdots, u_m), (u'_1, \cdots, u'_n)$ を U の順序付き基底

この状況で以下のように記号を定める：

(P) P: 順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ から順序付き基底 $(v'_1, \cdots, v'_n)$ への変換行列

(Q) Q: 順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ から順序付き基底 $(u'_1, \cdots, u'_m)$ への変換行列

(A) A: 定義域 V の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ と値域 U の順序付き基底 $(u_1, \cdots, u_m)$ とに関する f の表現行列。

(B) B: 定義域 V の順序付き基底 $(v'_1, \cdots, v'_n)$ と値域 U の順序付き基底 $(u'_1, \cdots, u'_m)$ とに関する f の表現行列。

このとき、次が成り立つ：

(11-38)
$$B = Q^{-1}AP$$

長い状況設定と定理の主張は次の図式にスッキリとまとめられます：

(11-39)
$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "T_A"] \arrow[dr, "\Phi_{(v_1,\cdots,v_n)}"] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_{(u_1,\cdots,u_m)}"'] \arrow[dd, "T_{Q^{-1}}"] \\
& V \arrow[r, "f"] & U & \\
K^n \arrow[uu, "T_P"] \arrow[ur, "\Phi_{(v'_1,\cdots,v'_n)}"'] \arrow[rrr, "T_B"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{(u'_1,\cdots,u'_m)}"]
\end{tikzcd}$$

この図式はいままで得られた図式をつなぎ合わせて出来たものであることを注意しておきます。

証明の仕方．等式
$$f = \mathrm{id}_U \circ f \circ \mathrm{id}_V$$
に合成写像と行列の積の関係と、基底の変換行列というのが恒等写像の表現行列だったことを用いればいい。 □

12 例：1 次元の場合の基底変換、座標変換、表現行列の変換

12.1 座標と基底：1 次元

基底と座標について論じてきました。1 次元の場合だと日常生活に具体例が潜んでいます。「基底と座標」は日常生活の言葉では「単位と単位ではかった値」です。そうすると「基底の取り換えによる座標変換」は「測定する単位の取り換えによる測定値の変化」ということになります。実は、基底の変換、座標の変換というのは小学生でやった単位と測定値の読み替えの問題なんです。それを「重量」の場合に具体的に見ていきましょう。

12.1.1　グラムとポンドの関係：重量のベクトル空間

質量の単位としてはグラム ($\mathbf{g}$) とポンド（$\mathbf{lb}$）を扱います。$1\mathbf{g}$ は $10/4536\mathbf{lb}$ です。結構面倒な値なのでこれを $p = 10/4536$ とおきましょう。すると次が成り立ちますね。

$$\mathbf{g} = \mathbf{lb}p \qquad (\text{ホントは } \mathbf{g} = p\mathbf{lb} \text{ と書くべきですね。}) \tag{12-40}$$

定義式 (11-33) からは 1×1 行列 p は順序付き基底 ($\mathbf{lb}$) から順序付き基底 ($\mathbf{g}$) への変換行列とみなすことができます。現時点ではあいまいな言明ですが、直ぐ後で、「質量」のベクトル空間を導入すれば、正確な主張になります。

普段、重さは数値で表現されますがそれには単位がついていました。つまり、あるものの重量 v はグラムで測れば $x\mathbf{g}$ だったり、ポンドで測れば $y\mathbf{lb}$ だったりします。典型的な問題は次ですね。

問題 12.1. あるものの重量 v はグラムで測れば $x\mathbf{g}$ であり、ポンドで測れば $y\mathbf{lb}$ であるとする。

$$v = \mathbf{g}x = \mathbf{lb}y \qquad (\text{ホントは } x\mathbf{g} = \mathbf{lb}y \text{ と書くべきですね。}) \tag{12-41}$$

このとき、x と y の関係をもとめよ。

小学生のときと違うのは文字式で表現してるだけです。答えはもちろん (12-40) の p を使えばすぐにわかります。

$$px = y \tag{12-42}$$

先に言ったように、この p は変換行列とみなすことができます。その為に、まず「重量」のなすベクトル空間を V とおきます[4]

$$V := \{\,\text{重量}\,\}.$$

重量は $\mathbf{g}$ の実数倍で表すことができます。同様に $\mathbf{lb}$ の実数倍で表すこともできます。これを模式的には次のように書いてもいいでしょう[5]。

$$V = \mathbf{g}\mathbb{R} = \mathbf{lb}\mathbb{R}. \tag{12-43}$$

座標を与える同型写像 $\Phi_{\mathbf{g}} : \mathbb{R} \to V$ は今の場合は $\Phi_{\mathbf{g}}(x) := x\mathbf{g}$ で与えられますね。これは単なる実数 x を $x\mathbf{g}$ という重さの値とみなすことを行っています。同じようにして実数 y をポンド数 $y\mathbf{lb}$ とおもうことは同型写像 $\Phi_{\mathbf{lb}} : \mathbb{R} \to V$ を与えます。下の図に状況を書きます。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{g}}} & \mathbf{g}\mathbb{R} = V = \mathbf{lb}\mathbb{R} & \xleftarrow{\Phi_{\mathbf{lb}}} & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \mathbf{g}x = v = \mathbf{lb}y & \longleftarrow\!\shortmid & y \end{array} \tag{12-44}$$

この図には重量 v のグラム数 x とポンド数 y の関係 $px = y$ (12-42) が表れていません。それも含めた状況を表してみましょう。ただし、T_p は実数を p 倍する写像です。

---

[4]「重量」のなすベクトル空間というのに数学的な定義はありません。いろいろなものの「重量」がなす集合をなんとなく思い描いてください。二つのものの「重量」を合わせて測ればそれぞれのものの「重量」の和になります。また、あるものを何倍かに増やせば「重量」も同じ比率で増えるので、その意味では（なんとなく）「重量」を集めればベクトル空間ができるのは納得できますよね。

[5]この講義独自の記号法なので他所で使うと恥をかくかもしれません。

(12-45)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "T_p"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathbf{g}}"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\Phi_{\mathbf{lb}}"] \\ & V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, mapsto, "T_p"] \arrow[dr, mapsto, "\Phi_{\mathbf{g}}"'] & & px \arrow[dl, mapsto, "\Phi_{\mathbf{lb}}"] \\ & \mathbf{g}x = \mathbf{lb}px & \end{tikzcd}$$

この図式はちょうど図式 (11-34), (11-35) に対応しています。

いろいろゴチャゴチャ書いていますが本質的には小学生の時に慣れ親しんだ単位の読み替えの問題です。その問題の解法[6]の構成要素を書き上げていったら上のようになる訳です。

12.1.2　円とドルの関係：お金（貨幣価値）のベクトル空間

単位と測定値の読み替え問題で典型的なものをもう一つ上げておきます。

円をドルに両替する、ドルを円に両替するという問題です。この場合でも 1 円が何ドルなのか分かれば、あとは自動的に解けますね。2019 年 11 月 25 日では 1 円は 0.0092 ドルです。これからは単位は円を **円**、ドルを ドル で表すことにしましょう。ついでに $q = 0.0092$ とおきます。すると次が成り立ちますね。

(12-46)
$$\text{円} = \text{ドル}\, q$$

これさえあれば円とドルの関係はわかるのでした。関係式 a **円** $= b$ ドル が成り立つための必要十分条件は以下ですね：

(12-47)
$$b = qa.$$

これを (12-45) と同様の模式図に表してみましょう。その為に「貨幣価値」[7]のなすベクトル空間を U とおきましょう。

(12-48)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "T_q"] \arrow[dr, "\Phi_{\text{円}}"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\Phi_{\text{ドル}}"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, mapsto, "T_q"] \arrow[dr, mapsto, "\Phi_{\text{円}}"'] & & qa \arrow[dl, mapsto, "\Phi_{\text{ドル}}"] \\ & \text{円}a = \text{ドル}\, qa & \end{tikzcd}$$

12.2　豚肉と表現行列の変換

表現行列の変換も実は皆さんが良く知ってる問題の言い換えなんですね。

豚肉を買いましょう[8]。グラムとポンド、円とドルの関係を知っている今の状況で基本的な問題は次です。

問題 12.2. 1 ポンド A ドルの豚肉を x グラム買ったときの値段（円）を求めよ。

[6]簡単すぎて「解法」という言葉で表すとしっくりこない人もいるでしょうが、、、、

[7]「貨幣価値」というのがなんなのか、考えてみるとよくわからなくなります。

[8]牛肉は高くて買えない

これはグラムとポンドの関係 (12-40), (12-42) と円とドルの関係 (12-46), (12-47) からすぐ解けますね。

答えは $q^{-1}Apx$ 円ですね。

特に豚肉 1 グラムの値段（円）は次で与えられます。

(12-49)
$$B = q^{-1}Ap$$

すると $x\mathbf{g}$ の豚肉の値段 (円）は次で計算できますね：

(12-50)
$$Bx = q^{-1}Apx.$$

この問題を解け、といわれたら皆さん容易に解けるでしょう。解法の模式図は次です：

(12-51)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, phantom] & \mathbb{R} \arrow[d, "T_{q^{-1}}"] \\
\mathbb{R} \arrow[u, "T_p"] \arrow[r, "T_B"'] & \mathbb{R},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
px \arrow[r, mapsto, "T_A"] & Apx \arrow[d, mapsto, "T_{q^{-1}}"] \\
x \arrow[u, mapsto, "T_p"] \arrow[r, mapsto, "T_B"'] & Bx = q^{-1}Apx
\end{tikzcd}$$

この図を解説しましょう。解法は次のステップに分かれますね。（図式は左下から出発します。）

1. グラムをポンドに換算する：$x \mapsto px$.

   図式では左縦の上向き矢印

2. ポンド数を A 倍する:$px \mapsto Apx$.

   図式では上段の水平矢印

3. ドルを円に換算する:$Apx \mapsto q^{-1}Apx$.

   図式では右縦の下向き矢印

問題はこれで解けたのですが、今回の目的は「解くこと」ではなく、解法を線形代数で学んだ概念を使って見直すことです。

12.2.1　豚肉を買うのも線形写像

豚肉を買います量り売りで重量に比例してお金がかかります。重量 v に対してそれだけ分の豚肉の金額を $f(v)$ と表しましょう。つまり、この f というのは「重量」の集合から「貨幣価値」の集合への写像といえます。

(12-52)
$$f : V = \{\,\text{重量}\,\} \xrightarrow{\text{豚肉の価値を対応させる}} \{\,\text{貨幣価値}\,\} = U$$

$1\mathbf{lb}$ の豚肉の値段を A ドル とおき、$1\mathbf{g}$ の豚肉の値段を B 円 とおいていました。これを数式で表すと次がえられます。

(12-53)
$$f(\mathbf{lb}) = \text{ドル}\,A, \quad f(\mathbf{g}) = \text{円}B$$

（少し分かりにくいですが、この式が表現行列の定義式 (11-28) なのです。）

うえで言った「重量に比例してお金がかかる」というのは、この写像が線形であるということを意味します。

注意：「比例する」というのは「スカラー倍を保つ」ということです：$f(cx) = cf(x)$. これだけでは本当は写像は線形とは呼ばないのですが、今の場合は 1 次元ベクトル空間をあつかっているので、これだけで写像 f は線形といえるのです。つまり、「和を保つ：$f(x+y) = f(x) + f(y)$」ことは証明できます。2 次元以上だと嘘になります。

12.2.2　豚肉を買う：ポンドとドル

実際に豚肉を売り買いするには、まず質量と貨幣価値の単位（基底）を決めなければいけません。ポンド **lb** とドル ドル を基準にしてみましょう。

y ポンドの豚肉の金額は Ay ドルですね。f との関係を模式図は次です。

(12-54)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "\Phi_{\mathbf{lb}}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\Phi_{\text{ドル}}"] \\ V \arrow[r, "f"'] & U, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, mapsto, "T_A"] \arrow[d, mapsto, "\Phi_{\mathbf{lb}}"'] & Ay \arrow[d, mapsto, "\Phi_{\text{ドル}}"] \\ \mathbf{lb}y \arrow[r, mapsto, "f"'] & f(\mathbf{lb}y) = \text{ドル}\ Ay. \end{tikzcd}$$

（この図式が表現行列の定義式 (11-31)）です。

12.2.3　豚肉を買う：グラムと円

ここではグラムと円でも同様です。

(12-55)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "T_B"] \arrow[d, "\Phi_{\mathbf{g}}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\Phi_{\text{円}}"] \\ V \arrow[r, "f"'] & U, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "T_B"] \arrow[d, mapsto, "\Phi_{\mathbf{g}}"'] & Bx \arrow[d, mapsto, "\Phi_{\text{円}}"] \\ \mathbf{g}x \arrow[r, mapsto, "f"'] & f(\mathbf{g}x) = \text{円}Bx. \end{tikzcd}$$

（この図式が表現行列の定義式 (11-31)）です。

12.2.4　豚肉の価格の比較

今までに得られている図式 (12-45), (12-48), (12-55), (12-54) をまとめると、問題 12.2 の解法の模式図 (12-51) が得られます。そしてそれが図式 (11-39) を今の場合に書いたものです。

(12-56)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rrr, "T_A"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathbf{lb}}"] & & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\Phi_{\text{ドル}}"'] \arrow[dd, "T_{q-1}"] \\ & V \arrow[r, "f"] & U & \\ \mathbb{R} \arrow[uu, "T_p"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathbf{g}}"'] \arrow[rrr, "T_B"'] & & & \mathbb{R} \arrow[ul, "\Phi_{\text{円}}"] \end{tikzcd}$$

13　線形写像はどのくらい簡単にできるか？

基底を取り換えて表現行列はどのくらい簡単にできるのか考えましょう。

13.1　正則行列=基底の変換行列

まず数ベクトル空間で話をします。

命題 13.1 (復習)**.** n 次正方行列 $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ が正則であるための必要十分条件は列ベクトル $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ が K^n の基底になることであった。

表現行列の話題に引き寄せると、この命題は正則行列というのは基底の変換行列に他ならない、ということを言っています。

命題 13.2. n 次正則行列 $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ を考える。

(1) P は標準順序付き基底 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ から順序付き基底 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ への変換行列である。

つまり、次がなりたつ：

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$$

(2) 写像の等式

$$\Phi_{\underline{v}} = T_P$$

がなりたつ。

つまり、次がなりたつ：

$$\Phi_{\underline{v}}(\vec{x}) = P\vec{x} \quad (\forall \vec{x} \in K^n)$$

Proof. (1) 問題の等式は $E_nP = P$ に他ならない。

(2) 計算してみよう。 □

13.2　行と列の基本変形で行列はどのくらい簡単できるか？

行基本変形により行列は被約階段行列の変形できました。では、さらに、列の基本変形も施すとどのくらい簡単にできるでしょうか？

命題 13.3. $m \times n$ 行列 A は行と列の基本変形により次の形に変形できる：

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし r は A の階数 $r = \mathsf{rank}\, A$ である。また $r = 0$ のばあいは上の行列はたんなる 0 行列をあらわす。

つまり、ある正則行列 P, Q が存在して：

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。

13.3　行列の掛け算写像はどのくらい簡単にできるか？

基底の変換公式（定理 11.11）と命題 13.2, 命題 13.3 を合わせると次が分かります：

命題 13.4. $m\times n$ 行列 A にたいして、K^n の順序付き基底 $(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)$ と K^m の順序付き基底 $(\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_m)$ が存在して、これらに関する線形写像 $T_A : K^n \to K^m$ の表現行列は次のかたちになる：

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし r は A の階数 $r = \mathsf{rank}\, A$ である。また $r = 0$ のばあいは上の行列はたんなる 0 行列をあらわす。

つまり、$m \times n$ 行列 A を掛けるという写像 $T_A : K^n \to K^m$ は、基底の変換を考えると階数 $\mathsf{rank}\, A$ 分の個性しかない、ということを主張しています。

13.4　線形写像はどのくらい簡単にできるか？

命題 13.5. 線形写像 $f : V \to U$ にたいして、V の順序付き基底 $(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)$ と U の順序付き基底 $(\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_m)$ が存在して、これらに関する線形写像 f の表現行列は次のかたちになる：

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし r は f の像の次元 $r = \dim \mathrm{Im}\, f$ である。また $r = 0$ のばあい（つまり $f = 0$ のばあい）は上の行列はたんなる 0 行列をあらわす。

折角なので用語を一つ導入しておきます。

定義 13.6. 線形写像 $f : V \to U$ の階数 $\mathsf{rank}\, f$ を像の次元として定める：

$$\mathsf{rank}\, f := \dim \mathrm{Im}\, f.$$

これは、表現行列の階数と一致する。

線形写像 $f : V \to U$ は、基底の変換を考えると階数 $\mathsf{rank}\, f$ 分の個性しかない、ということを主張しています。

14　対角化に向かって

14.1　なんかおかしい

命題 13.4 によれば、$m \times n$ 行列 A を掛けるという写像 $T_A : K^n \to K^m$ は、基底の変換を考えると階数 $\mathsf{rank}\, A$ 分の個性しかないのでした。

もうすこし詳しくいってみると、例えば、n 次正則行列 A というのは階数 n の n 次正方行列でした。命題 13.4 が主張するのは上手く基底を選べば掛け算写像 $T_A : K^n \to K^n$ は単位行列 E_n で表現される、ということです。

正則行列の掛け算は恒等変換であるということを意味するのでしょうか？

しかし、正則行列 A 掛け算写像は、平面に回転や対称移動、空間の回転を与えることをすでに見てきました。こういうものは恒等変換ではありません。

これはいったいどうしたことでしょうか？

この混乱の原因は、掛け算写像 $T_A : K^n \to K^n$ の命題 13.4 では、値域と定義域の値域と定義域との順序付き基底をバラバラに選んでいることにあります。

掛け算写像 $T_A : K^n \to K^n$ の値域と定義域が同じベクトル空間の場合は、これらに関して同じ順序付き基底を考えないと上で見たような変な現象が起こります。

例 14.1. 貨幣価値のベクトル空間 U から自分自身への線形写像 $g : U \to U$ を考えましょう。

例えば皆さんの 1 年後の貯金額の変動でもなんでもいいです。今年の貯金額に来年の貯金額を対応させる訳ですが、この時に定義域と値域とは同じ基準ではからないといけないですよね。今年は円で勘定してたのに、来年はドルで勘定してたりしたら、実際にどのくらい変化したのかわからないですよね。

順序付き基底というのがベクトル空間を調べる際に単位の役割を果たすことは、なんとなく理解していただいたと思います。そうすると、同じベクトル空間の変化を測るには変化の前後で同じ基準（つまり順序付き基底）を使わなければいけないことも納得していただけるでしょう。

14.2 あるベクトル空間 V から自分自身への線形写像 $f : V \to V$ はどのくらい簡単にできるか？

定理 11.11 の特別な場合として、次が得られますね。

定理 14.2. 以下の状況を考える：

1. V:ベクトル空間

2. $f : V \to V$: 線形写像

3. $(v_1, \cdots, v_n), (v'_1, \cdots, v'_n)$:$V$ の順序付き基底

この状況で以下のように記号を定める：

(P) P: 順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ から順序付き基底 $(v'_1, \cdots, v'_n)$ への変換行列

(A) A: 定義域 V の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ と値域 V の順序付き基底 $(v_1, \cdots, v_m)$ とに関する f の表現行列。

(B) B: 定義域 V の順序付き基底 $(v'_1, \cdots, v'_n)$ と値域 V の順序付き基底 $(v'_1, \cdots, v'_m)$ とに関する f の表現行列。

このとき、次が成り立つ：

$$B = P^{-1}AP \tag{14-57}$$

14.3 対角化というのは、

正方行列の対角化は後期線形代数の中心的なテーマです。扱う問題は、

問題 14.3. n 次正方行列 A が与えられているとする。このとき、ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるだろうか？

$$P^{-1}AP = (\text{対角行列})????$$

対角行列というのは行列の中で最も簡単なものです。対角化の問題というのは、同じベクトル空間の間の線形写像が簡単に表せるかとい問題といえます。応用上も理論上もとてもとても重要です。頑張って勉強していきましょう。

15　対角化

15.1　対角化可能行列

15.1.1　同値な正方行列

定義 15.1. n 次正方行列 A, A' が同値とはある正則行列 P が存在して $A' = P^{-1}AP$ を満たすことと定義する。

$$A' = P^{-1}AP \tag{15-58}$$

別の言い方をすれば A, A' はある一つの線形写像 $f : V \to V$ を別々の順序付き基底で測ったときの表現行列である。なので、同値な行列は本質的には同じものと思える。

15.1.2　対角化可能行列

n 次正方行列 A が対角化可能とは対角行列 D と同値なことと定める。より詳しくは、

定義 15.2. n 次正方行列 A が対角化可能とはある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列 D になることと定める。

$$P^{-1}AP = D. \tag{15-59}$$

講義のしばらくの目標は対角化可能性の判定と可能な場合は対角化すること。定義式 (15-59) をいいかえると次である。

$$AP = PD \tag{15-60}$$

さらに

$$P = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n), \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とおくと定義式は

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \text{ for all } i = 1, \cdots, n \tag{15-61}$$

となる。

復習 15.3. n 次正方行列 $P = (\vec{v}_i)$ が正則 $\Leftrightarrow$ 列ベクトル $\{\vec{v}_i\}$ が K^n の基底。

拠って次の命題をえる。

命題 15.4. n 次正方行列 A が対角化可能である為の必要十分条件は K^n の基底 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ とスカラー $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が存在して次を満たすことである。

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \text{ for all } i = 1, \ldots, n \tag{15-62}$$

この条件をさらに掘り下げていきます。その為にいくつか概念を導入します。

15.2 固有値、固有ベクトル

以下では数ベクトル $\vec{v} \in K^n$ を上に矢印を付けずに表す $v \in K^n$.

定義 15.5. A を n 次正方行列とする。

(1) n 次数ベクトル $v \in K^n$ が A の固有値 $\lambda \in K$ に属する固有ベクトルとは、以下の二条件を満たすことをいう：

$$v \neq 0, \quad Av = \lambda v.$$

(2) スカラー $\lambda \in K$ が A の固有値とは、λ を固有値とする A の固有ベクトル $v \in K^n$ が存在することをいう。

15.2.1 対角化可能性の言いかえ

固有ベクトルによる正方行列が対角化可能ということの言いかえが得られます。

補題 15.6. n 次正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は K^n の基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ で各 v_i が A の固有ベクトルであるものが存在することである。

このように定式化しなおすことに利点は、固有ベクトルや固有値の方が求めやすい点にあります。

15.2.2 固有ベクトルを線形変換 $T_A : K^n \to K^n$ から見ると

当たり前なことなのですが、固有ベクトルの条件の一つ

$$Av = \lambda v$$

を線形写像 $T_A : K^n \to K^n$ を使って言い換えると

$$T_A(v) = \lambda v$$

ですね。

これはつまり、n 次正方行列 A の固有ベクトル $v \in K^n$ というのは、
「線形変換 $T_A : K^n \to K^n$ で定数 λ 倍される 0 でないベクトル」
ということを言っています。

場合によってはこの見方はとても役に立ちます。

15.2.3 注意：固有値、固有ベクトルはとても大切

この講義では対角化にかこつけて固有値、固有ベクトルという概念を導入しました。けれども、これらは対角化以外の場面でも重要になってきます。
対角化できない行列にたいしても固有値、固有ベクトルは大事なのです。

そういえば前期の講義では連立一次方程式の解法にかこつけて行列を導入しました。後期のこれまでの講義で行列には連立一次方程式を解く以外にも重要な役割があるとわかっていただけたでしょう。

15.3 固有多項式、固有方程式

ところで、正方行列 A を固定したとき、その固有値ってどのくらい沢山あるんでしょうか？
固有値というのはとりとめがないように思えるかも知れないけれど、実は簡単に計算できます。

固有値と固有ベクトルを求める方法を考えていきましょう。
なので、n 次正方行列 A をひとつ固定しましょう。

n 次数ベクトル $v \in K^n$ とスカラー $\lambda \in K$ に関する方程式

$$Av = \lambda v,\ v \neq 0$$

を変形すると

$$(\lambda E_n - A)v = 0,\ v \neq 0$$

となりますね。

復習 15.7. n 次正方行列 B にたいして次の条件は同値：

(1) n 次数ベクトル v で $v \neq 0$ かつ $Bv = 0$ を満たすものが存在する。

(2) B は非正則。

(3) $\det B = 0$.

そこで、次の概念を導入することにします。

定義 15.8. (1) n 次正方行列 A の固有多項式 $F_A(t)$ を

$$F_A(t) := \det(tE_n - A)$$

で定義する。

(2) 方程式

$$F_A(t) = 0$$

を A の固有方程式とよぶ。

上で復習したことからつぎの補題が示せます。

補題 15.9. A を n 次正方行列とする。

(1) スカラー $\lambda \in K$ が A の固有値であるための必要十分条件は λ が固有方程式の解であることである。

(2) スカラー $\lambda \in K$ が A の固有値であるとする。

n 次数ベクトル $v \in K^n$ が A の固有値 λ に属する固有ベクトルであるための必要十分条件は次である：

(i) $v \neq 0.$

(ii) $v \in \ker(\lambda E - A).$

n 次多項式の根は高々 n 個なので次の系が導出できます。

系 15.10. n 次正方行列 A の固有値の個数は高々 n 個である。

15.4　例

簡単な例をまずみましょう。

例 15.11. 回転をつかさどる行列 $R(\theta)$ の固有値、固有ベクトルを求めましょう：

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

固有値を求めるには、固有方程式を解けばいいのでした：

$$F_{R(\theta)}(t) = \begin{vmatrix} t - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & t - \cos\theta \end{vmatrix} = t^2 - 2(\cos\theta)t + 1.$$

なんか、$K = \mathbb{R}$ か $K = \mathbb{C}$ かで場合分けした方がいいですね。

<u>$K = \mathbb{R}$ の場合：</u>

- $\theta = n\pi$　(for some $n \in \mathbb{Z}$) の場合。

$$F_{R(n\pi)}(t) = (t - (-1)^n)^2$$

なんだけれども、実は

$$R(n\pi) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

なので、任意の $v \in \mathbb{R}^2,\ \ v \neq 0$ は $R(n\pi)$ の固有値 $(-1)^n$ に属する固有ベクトル。

- $\theta \neq n\pi$ (for any $n \in \mathbb{Z}$) の場合。

  固有方程式 $F_{R(\theta)}(t) = 0$ は実数解をもたない。

  よって、特に（実数の範囲では）固有ベクトルも存在しない。

  いまの θ の条件下で、平面の角度 θ の回転 $T_{R(\theta)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で定数倍される 0 でないベクトルは存在しませんよね。

<u>$K = \mathbb{C}$ の場合：</u>

任意の $\theta \in \mathbb{R}$ にたいして次がなりたちます：

$$F_{R(\theta)}(t) = (t - e^{i\theta})(t - e^{-i\theta})$$

ただし、復習か予習かは不明だけれど、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

なので、$R(\theta)$ の複素数の範囲での固有値は

$$e^{i\theta}, \quad e^{-i\theta}$$

です。

各固有値 $e^{\pm i\theta}$ に属する固有ベクトルの例 $v_\pm$ は次であたえらます：

$$v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$$

15.5 固有空間

定義 15.12. A を n 次正方行列、λ をスカラーとする。

n 次正方行列 A のスカラー λ に属する固有空間 V_λ を以下で定義する：

$$V_\lambda := V(\lambda; A) := \ker(\lambda E_n - A)$$

補題 15.13. A を n 次正方行列、λ をスカラーとする。

(1) λ が A の固有値であるための必要十分条件は $V_\lambda \neq 0$ である。

(2) $v \in K^n$ が A の固有値 λ に属する固有ベクトルであるための必要十分条件は

$$v \neq 0 \quad \text{and} \quad v \in V_\lambda$$

である。

例 15.14. n 次対角行列 D を考えましょう：

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

（ただし、$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ は互いに相異なり、各 i にたいして対角成分 λ_i は k_i 回繰り返している）

次が成り立つ：

(1)

$$F_D(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_p)^{k_p}$$

根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ は互いに相異なり、各 i にたいして根 λ_i の重複度は k_i.

(2) $\dim V_{\lambda_i} = k_i$.

次の補題は重要です。

補題 15.15. A を n 次正方行列とし、スカラー $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ は A の相異なる固有値とする。
このとき、固有空間の和

$$\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$$

は直和である。

Proof. ベクトルの組 $v_i \in V_{\lambda_i} \quad \text{for } i = 1, \cdots, p$ が

(15-63) $$v_1 + \cdots + v_p = 0$$

をみたせば $v_i = 0 \quad (\forall i = 1, \cdots, p)$ であることを示す。

$p \geq 1$ に関する帰納法を用いる。

$p = 1$ の場合は明らか。

$p > 1$ とする。さらに $p - 1$ の場合は補題は示されていると仮定する。
等式 (15-63) に A を掛けると次を得る：

(15-64) $$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0.$$

この式から等式 (15-63) の λ_p 倍を引くと次の式を得る：

$$(\lambda_1 - \lambda_p)v_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)v_{p-1} = 0.$$

帰納法の仮定より、

$$(\lambda_1 - \lambda_p)v_1 = 0, \cdots, (\lambda_{p-1} - \lambda_p)v_{p-1} = 0$$

をえる。
さらに $\lambda_i \neq \lambda_p$ だったので、

$$v_1 = 0, \cdots, v_{p-1} = 0$$

をえる。
この結果を等式 (15-63) に代入して $v_p = 0$ を得る。 □

系 15.16. 相異なる固有値に属する固有ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_p\}$ は一次独立である。

　この系から対角化可能性の十分条件が得られますね。

系 15.17. n 次正方行列は n 個の相異なる固有値をもてば対角化可能である。

15.5.1　対角化可能性の言いかえ

　正方行列が対角化可能の言いかえが得られます。

補題 15.18. n 次正方行列 A にたいして次は同値：

(1) n 次正方行列 A は対角化可能。

(2) K^n の基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ で各 v_i が A の固有ベクトルであるものが存在することである。

(3) A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ で次を満たすものが存在する：

$$\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i} = K^n.$$

(4) A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ で次を満たすものが存在する：

$$\sum_{i=1}^{p} \dim V_{\lambda_i} = n.$$

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は補題 15.6.

　(3) $\Rightarrow$ (2)
　各固有空間 V_{λ_i} の基底 $\{v_1^{(i)}, \cdots, v_{d_i}^{(i)}\}$ は固有値 λ_i に属する固有ベクトルから構成されている。
　さらに、補題 15.15 より、この合併集合は和空間 $\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$ の基底を与える。

　(3) $\Leftrightarrow$ (4) は直和と次元の関係の帰結ですね。

$$\dim \left(\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim V_{\lambda_i}.$$

　(2) $\Rightarrow$ (4).
　固有ベクトルから構成される基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が存在したとする。これらの固有値か重複を除いたものを $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ とする。
　各 $i = 1, \cdots, p$ にたいして固有値 λ_i に属するものが $\{v_1, \cdots, v_n\}$ の中に s_i 個あるとします。
　すると次がなりたちます：

$$s_i \leq \dim V_{\lambda_i}, \quad s_1 + s_2 + \cdots + s_p = n.$$

これらを合わせると次が導出されます：

$$n \leq \sum_{i=1}^{p} \dim V_{\lambda_i}.$$

一方、直和と次元の関係を用いると、

$$\sum_{i=1}^{p} \dim V_{\lambda_i} = \dim \left(\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i} \right) \leq n$$

がわかるので (4) をえます。

□

15.6　対角化可能性の判定法

補題 15.19. n 次正方行列 A と n 次正則行列 P にたいして次が成り立つ：

$$\det P^{-1}AP = \det A$$

つまり、同値な正方行列の行列式は等しい。

Proof.

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P)^{-1}\det(P) = \det A$$

□

これを用いると同値な正方行列に関する次の命題がわかります。

命題 15.20. 同値な n 次正方行列 A, B とスカラー λ にたいして次がなりたつ。

(1) $\lambda E_n - A$ と $\lambda E_n - B$ も同値である。

(2) これらの核は同型

$$\ker \lambda E_n - A \cong \ker \lambda E_n - B.$$

(3) $F_A(t) = F_B(t)$.

対角化可能というのは対角行列と同値ということでした。

系 15.21. n 次正方行列 A は対角行列

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

（ただし、$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ は互いに相異なり、各 i にたいして対角成分 λ_i は k_i 回繰り返している）と同値とする（とくに、A は対角化可能であることに注意しておく）

次が成り立つ：

(1)

$$F_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_p)^{k_p}$$

根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ は互いに相異なり、各 i にたいして根 λ_i の重複度は k_i.

(2) $\dim V_{\lambda_i} = k_i$.

15.6.1 条件

次の条件を定めておきましょう：

条件 15.22. n 次正方行列 A の固有多項式 $F_A(t)$ は（K のなかで）一次式の積に表せる：

$$F_A(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}\cdots(t-\lambda_p)^{k_p}.$$

ただし、$\lambda_i \in \mathbb{C}\ \ (i=1,\cdots,r)$ は互いに相異なる複素数を表す
また、$k_i > 0\ \ (i=1,2,\cdots,r)$ は正の整数である。

この仮定と記号の下でつぎの用語を定める：

(1) $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ の組を A の無駄のない固有値とよぶ。

(2) 各 i に対して λ_i を固有値 λ_i の重複度と呼ぶ。

次の等式に注意しておく。

(15-65) $$k_1+\cdots+k_p = n.$$

補題 15.23. n 次行列 A は条件 *15.22* を満たすとする。$\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ を無駄を省いた A の固有値とする。
このとき和空間 $\sum_{i=1}^p V_{\lambda_i}$ は直和空間である。特に、つぎが成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{p}\dim V_{\lambda_i} = \dim\left(\sum V_{\lambda_i}\right) \le n = \dim K^n$$

注意 15.24. • $K=\mathbb{R}$ の場合には、条件 15.22 を満たさない正方行列は存在する。

• $K=\mathbb{C}$ の場合は任意の正方行列は条件 15.22 をみたす。
なので、複素数の範囲では任意の正方行列は少なくとも一つは固有値と固有ベクトルをもつ。

これは次の定理 15.25 の帰結である。

15.6.2 複素数上の多項式に関する定理

一般的に「多項式＝0」という方程式を解くときには、考察する数の範囲をどうするかが関わってきますね。
二次方程式でさえ実数の範囲では必ずしも解をもつとは限らないのでした。
また、二次方程式は複素数の範囲では（重根もふくめて）解を完全に求められました。

虚数単位 i というのは -1 の二乗根でした：$i=\sqrt{-1}$.
実数に虚数単位 i を付け加えた数の体系が複素数で、皆さんはこの範囲で二次式は

$$at^2+bt+c = a(t-\alpha)(t-\beta)$$

という風に、一次式の積で表せました。そして、上の表示で α,β が方程式 $f(t)=0$ の解なのでした。

もっと次数の高い多項式でも、一次式の積として表すのにこれ以上に数の体系を広げなくていいことを次の定理は教えてくれます。

定理 15.25. 複素数係数の多項式 $f(t)$ は複素数の範囲内で一次式の積に表せる。

$$f(t) = a(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\cdots(t-\lambda_p)^{k_p}$$

ただし、$\lambda_i \in \mathbb{C} \quad (i = 1, \cdots, r)$ は互いに相異なる複素数を表す
また、$k_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$ は正の整数である。

ご存じかもしれませんが用語を復習しておきます：

定義 15.26. 上の定理の状況で、

(1) 複素数 λ_i を多項式 $f(t)$ の根とよぶ。

(2) 正整数 k_i を根 λ_i の重複度とよぶ。

15.6.3 対角化可能性の判定法

定理 15.27. *n 次行列 A は条件 15.22 を満たすとする。$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ を無駄を省いた A の固有値とし、$k_1, \cdots, k_p$ を各固有値の重複度とする。*
このとき次の条件は同値：

(1) A は対角化可能。

(2) $\sum_{i=1}^{p} V_{\lambda_i} = K^n$.

(3) $\sum_{i=1}^{p} \dim V_{\lambda_i} = n$.

(4) $\dim V_{\lambda_i} = k_i$ for $\forall i = 1, 2, \cdots, p$. .

Proof. (1) ⇔ (2) ⇔ (3) は既に示している。

(4) ⇒ (3) 等式 (15-65) から直ちに従う。

(1) ⇒ (4) 系 15.21 から直ちに従う。

□

15.7 対角化可能性の判定と対角化をする手順

対角化可能性の判定と対角化をする手順はつぎです。

Step 1 固有多項式、固有値、重複度を求める。

Step 2 各固有値の固有空間の基底と次元を求める。

Step 3 対角化可能か否か判断する。

Step 4 可能な場合は対角化する。

注意：正則行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ の形を書いてください。

次の例で説明します。

例 15.28 (教科書 p204, 例題 8.2)**.** 行列

$$A = \begin{pmatrix} -16 & -7 & -7 \\ 21 & 12 & 7 \\ 21 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

が対角化可能か否か判定し、可能なときは対角化せよ。

Step 1 固有多項式、固有値、重複度を求める。

$$F_A(t) = \det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t+16 & 7 & 7 \\ -21 & t-12 & -7 \\ -21 & -7 & t-12 \end{vmatrix} = (t+2)(t-5)^2$$

<u>固有値 -2(重複度 1)、固有値 5(重複度 2)</u>

Step 2 各固有値の固有空間の基底と次元を求める。

- 固有値 -2 の固有空間 V_{-2} の基底と次元

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} -2+16 & 7 & 7 \\ -21 & -2-12 & -7 \\ -21 & -7 & -2-12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基底としては

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。次元は $\dim V_{-2} = 1$.

- 固有値 5 の固有空間 V_5 の基底と次元

$$5E_3 - A = \begin{pmatrix} 5+16 & 7 & 7 \\ -21 & 5-12 & -7 \\ -21 & -7 & 5-12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基底としては

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

がとれる。次元は $\dim V_5 = 2$.

Step 3 対角化可能か否か判断する。

（二種類判定方法を書きます。皆さんはどちらか片一方を書けばいいです。）

- 各固有値 $-2, 5$ にたいしてそれぞれに属する固有空間の次元と重複度が等しいので行列 A は対角化可能である。
- 固有空間の次元の総和が正方行列 A のサイズ 3 と等しいので、行列 A は対角化可能である。

Step 4 可能な場合は対角化する。

正方行列 P を以下の様に定める：

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

すると、P は正則であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

例 15.29. $a \in K$ にたいして定まる行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

が対角化可能か否か判定し、可能なときは対角化せよ。

Step 1 固有多項式、固有値、重複度を求める。

$$F_A(t) = \det(tE_2 - A) = (t-a)^2$$

固有値 a（重複度 2）

Step 2 各固有値の固有空間の基底と次元を求める。

- 固有値 a の固有空間 V_a の基底と次元

$$aE_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基底としては

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。次元は $\dim V_a = 1$.

Step 3 対角化可能か否か判断する。

固有値 a に属する固有空間の次元と重複度がことなるので、行列 A は対角化可能ではない。

Step 4 可能な場合は対角化する。

（このステップはなし。みなさんはいちいち step 4 とか書かなくていいです。）

16　対角化の応用：冪の計算

16.1　冪の計算

対角行列 D のべき乗 D^N の計算は簡単ですね。それぞれの対角成分を N 乗すればいいだけなので。対角化可能行列のべき乗も計算できます。

補題 16.1. N を自然数とする。n 次正方行列 A と n 次正則行列 P にたいして次が成り立つ：

$$P^{-1}A^N P = (P^{-1}AP)^N, \quad A^N = P(P^{-1}AP)^N P^{-1}.$$

16.2　例：人口の推移問題

教科書 p28 もご覧ください。

行列を用いると固定された複数のグループの間の一定期間毎のメンバーの推移をモデル化できます。X 国と Y 国があってある年から人口を測り始めます。あり得ない仮定だけれど、一年ごとの人口の推移は実数定数 p, q を使って次の様に表せるとします。毎年 X 国の国民の $100(1-p)\%$ は Y 国に移住し、毎年 Y 国の国民の $100(1-q)\%$ は Y 国に移住する。つまり、n 年目の人口を x_n 人 y_n 人とすると

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

n 年後の人口 x_n, y_n を初年度の人口 x_1, y_1 から求めるというのが問題になりますが、これは行列 A のべき A^n を求める問題になります。

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}.$$

答えは次です。

$$A^n = \frac{1}{p+q-2}\begin{pmatrix}(p+q-1)^n(p-1)+q-1 & (1-(p+q-1)^n)(q-1)\\ (1-(p+q-1)^n)(p-1) & (p+q-1)^n(q-1)+p-1\end{pmatrix}$$

ただし $p+q\neq 2$ としている。

これを計算するためにまずは A を対角化可能か判定します。
固有多項式を計算しましょう：

$$F_A(t) = t^2 - 2(p+q)t + (p+q-1).$$

なので固有値は

$$\lambda_{\pm} = \frac{p+q\pm(p+q-2)}{2}.$$

つぎのことに注意しておきます：

$$\lambda_+ \neq \lambda_- \Leftrightarrow p+q\neq 2.$$

.

このことから $p+q\neq 2$ のときは A は相異なる固有値を正方行列のサイズ 2 個もつので対角化可能である。

固有値と固有ベクトルは以下ですね：

$$\lambda_+ = p+q-1, \lambda_- = 1, \quad v_+ = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, v_- = \begin{pmatrix}q-1\\p-1\end{pmatrix}$$

P をしたのように定義します。

$$P := (v_+, v_-) = \begin{pmatrix}1 & q-1\\ -1 & p-1\end{pmatrix}.$$

逆行列を計算しておきます：

$$P^{-1} = \frac{1}{p+q-2}\begin{pmatrix}p-1 & -q+1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

対角化の理論から、次が得られます：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}p+q-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

n 乗を計算すると以下の様になります：

$$\begin{aligned}A^n &= P\begin{pmatrix}(p+q-1)^n & 0\\ 0 & 1^n\end{pmatrix}P^{-1}\\ &= \frac{1}{p+q-2}\begin{pmatrix}(p+q-1)^n(p-1)+q-1 & (1-(p+q-1)^n)(q-1)\\ (1-(p+q-1)^n)(p-1) & (p+q-1)^n(q-1)+p-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これで答えはでました。もう少し考察を続けると次がわかります。

- $p+q=1$ ならば任意の $n \geq 1$ にたいして $A^n = A$ がなりたつ。
- もし、不等式 $0 < p+q < 2$ がなりたつならば極限が計算できます：

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{p+q-2}\begin{pmatrix} q-1 & q-1 \\ p-1 & p-1 \end{pmatrix}.$$

17 自己線形写像の行列式、対角化

抽象ベクトル空間 V から自分自身への線形写像 $f : V \to V$ を V の自己線形写像と呼びましょう。
これは、抽象的なものですが行列式を定義することができます。
さらに、固有値、固有ベクトル、固有多項式というのも定義出来て、対角化可能性を論じることが出来ます。

といっても、V の順序付き基底をなにか決めて数ベクトル空間と同一視すること、つまり、同型写像

$$\Phi_{\underline{v}} : K^n \xrightarrow{\cong} V$$

を決めることで、線形写像 $f : V \to V$ にかんする考察を表現行列 A に還元することで、これらのことは達成されます。

17.1 自己線形写像の行列式、固有多項式

定義 17.1. V をベクトル空間、$\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底とする。$f : V \to V$ を V の自己線形写像とし、定義域と値域とに $\underline{v}$ を備え付けたときの f の表現行列を A とする。
このとき、次のように定義する：

(1) f の行列式を A の行列式として定義する：

$$\det f := \det A$$

(2) f の固有多項式を A の固有多項式として定義する：

$$F_f(t) := F_A(t).$$

こういう場合に大事なことは、この定義が表現行列の選び方に依らずに元々の自己線形写像 $f : V \to V$ のみから決定されているか、ということですね。

補題 17.2. 上の定義は表現行列 A の取り方に依らない。

Proof. 表現行列の変換公式と $\det(P^{-1}AP) = \det A$ をもちいればいいですね。 □

17.2 自己線形写像の対角化

17.2.1 自己線形写像の固有値、固有ベクトル。

定義 17.3. V をベクトル空間、$\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ を V の順序付き基底とする。$f : V \to V$ を V の自己線形写像とし、定義域と値域とに $\underline{v}$ を備え付けたときの f の表現行列を A とする。

このとき、次のように定義する：

(1) スカラー λ に属する f の固有ベクトルとは次を満たすベクトル $v \in V$ のことをいう：

$$f(v) = \lambda v, \quad v \neq 0$$

(2) f の固有値とはそれに属する固有ベクトルが存在するものをいう。

(3) スカラー λ に属する f の固有空間 $V_\lambda = V(\lambda; f)$ を以下で定める：

$$V_\lambda := \mathrm{Ker}(\lambda\, \mathrm{id}_V - f).$$

表現行列に帰着すればいいので正方行列の場合と同様の命題がなりたちます。

とくに押さえておきたいのは次のことです。（あとで、ちょこっと使います。）

命題 17.4. スカラー λ が $f : V \to V$ の固有値であるための必要十分条件は固有方程式 $F_\lambda(t) = 0$ の解であることである。

系 17.5. $K = \mathbb{C}$ とする。このとき、任意の自己線形写像 $f : V \to V$ は固有値と固有ベクトルを少なくとも一つは持つ。

つまり、複素数の範囲で考えると、どんな自己線形写像 $f : V \to V$ にたいしても、それによって定数 λ 倍だけされるノンゼロベクトル $v \in V$ が存在する、ということです。

実数の範囲ではこれが成り立たないことは、例えば、平面の回転を考えればわかりますね。

実数と複素数の違いですが、僕にはどうしてこういうことが起こるのか直感的には理解できません。不思議ですね。

17.2.2 自己線形写像の対角化

定義 17.6. V をベクトル空間とする。V の自己線形写像 $f : V \to V$ を V が対角化可能とはある V の順序付き基底 $\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ が存在して、定義域と値域とに $\underline{v}$ を備え付けたときの f の表現行列が対角行列になることと定める。

対角化可能性の判定法も正方行列の場合と同様の命題が成り立ちます。皆さん自身で書いてみましょう。

18　計量ベクトル空間（抽象ベクトル空間と抽象内積の組）

ここから、ガラッと内容が変わります。

これまで、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の性質を抽象化することで（抽象）ベクトル空間を導入し、その性質を調べてきました。
しかし、最初の段階で抽象化されなかった数ベクトル空間の性質があります。ベクトルの長さ、二本のベクトルの挟角や内積です。これらは大事なものですが、抽象ベクトル空間の公理から導出されるものではないので、公理として内積を追加してやるしかないんですね。

抽象ベクトル空間にさらに抽象内積を備え付けたものを計量ベクトル空間と呼びます。
大切なのは正規直交基底という概念と、その存在を保証するグラム-シュミット正規直交化法です。

ともかく、スタート。まず、数ベクトル空間 K^n の性質を取り出して抽象ベクトル空間を定義したように、数ベクトル空間の内積の性質をとりだして、抽象ベクトル空間のうえの抽象内積を定義しましょう。

18.1　計量ベクトル空間の定義

といっても、皆さんが知っているのは $K=\mathbb{R}$ の場合の内積ですね。

内積は $K=\mathbb{R}$ の場合と $K=\mathbb{C}$ の場合で定義が変わります。

18.1.1　計量ベクトル空間の定義：実数の場合

まずは $K=\mathbb{R}$ の場合をやりましょう。

定義 18.1 ($K=\mathbb{R}$)**.** 実数上のベクトル空間 V の抽象内積 $\langle -,+\rangle$ とは写像

$$\langle -,+\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$

で次の条件を満たすものと定める：

(1) $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle \quad (\forall u,v,w\in V)$.

(2) $\langle cu,v\rangle=c\langle u,v\rangle \quad (\forall u,v\in V,\quad c\in\mathbb{R})$.

(3) $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle \quad (\forall u,v\in V)$.

(4) $\langle u,u\rangle\geq 0 \quad (\forall u\in V)$
　しかも、$\langle u,u\rangle=0$ がなりたつのは $u=0$ の場合に限る。

定義 18.2. ベクトル空間 V と内積 $\langle -,+\rangle$ の組 $(V,\langle -,+\rangle)$ を計量ベクトル空間とよぶ。

18.1.2　計量ベクトル空間の定義：複素数の場合

次は $K = \mathbb{C}$ の場合をやりましょう。

定義 18.3 ($K = \mathbb{C}$)**.** 複素数上のベクトル空間 V の抽象（エルミート）内積 $\langle -, + \rangle$ とは写像

$$\langle -, + \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

で次の条件を満たすものと定める：

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (\forall u, v, w \in V)$.

(2) $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle \quad (\forall u, v \in V, \quad c \in \mathbb{C})$.

(3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad (\forall u, v \in V)$.
ただし、$\overline{(-)}$ は複素共役である。

- この条件より、任意の $u \in V$ にたいして複素数 $\langle u, u \rangle$ は実数である。

(4) $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad (\forall u \in V)$
しかも、$\langle u, u \rangle = 0$ がなりたつのは $u = 0$ の場合に限る。

定義 18.4. ベクトル空間 V と内積 $\langle -, + \rangle$ の組 $(V, \langle -, + \rangle)$ を計量ベクトル空間とよぶ。

18.2　例：標準内積

18.2.1　実数の場合

例 18.5. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積を次で定義する：

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n).$$

以下、$\mathbb{R}^n$ を計量ベクトル空間と呼ぶときは標準内積との組を考える。

18.2.2　複素数の場合

例 18.6. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の標準内積を次で定義する：

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n} \quad (\forall x, y \in \mathbb{C}^n).$$

以下、$\mathbb{C}^n$ を計量ベクトル空間と呼ぶときは標準内積との組を考える。

18.3　例：多項式ベクトル空間

18.3.1　実数の場合

例 18.7. $P_n(\mathbb{R})$ の内積を次で定義することができる：

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 fg dX \quad (\forall f, g \in P_n(\mathbb{R})).$$

変種はいくらでも考えられますね：

例 18.8. $P_n(\mathbb{R})$ の内積を次で定義することができる：

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} fg e^{-X^2} dX \quad (\forall f, g \in P_n(\mathbb{R})).$$

18.3.2　複素数の場合

例 18.9. $P_n(\mathbb{C})$ の内積を次で定義することができる：

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f\overline{g} dX \quad (\forall f, g \in P_n(\mathbb{C})).$$

変種はいくらでも考えられますね：

例 18.10. $P_n(\mathbb{C})$ の内積を次で定義することができる：

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g} e^{-X^2} dX \quad (\forall f, g \in P_n(\mathbb{C})).$$

18.4　計量ベクトル空間の部分空間

例 18.11. 計量ベクトル空間 $V = (V, \langle -, +\rangle)$ を考える。下部ベクトル空間 V の部分空間 U に内積 $\langle -, +\rangle$ を制限したものは U の内積である。

以下、計量ベクトル空間 $V = (V, \langle -, +\rangle)$ の部分空間といえば下部ベクトル空間 V の部分空間 U とこのように得られる内積の組をいう。

18.5　内積の基本性質

複素数 $z \in \mathbb{C}$ の実部を $\Re z$ であらわし、虚部を $\Im z$ であらわします。

$$\Re z := \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \Im z := \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

定義 18.12. 計量ベクトル空間 V を考える。　以下を定義する。

(1) 要素 $u \in V$ の長さを以下で定める：

$$||u|| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

。

(2) 長さが 1 のベクトルを単位ベクトルとよぶ。

(3) ベクトル $u, v \in V$ が直交するとは $\langle u, v \rangle = 0$ が成り立つことをいう。
直交することを $u \perp v$ とあらわす。

(4) ベクトル $v \in V$ と部分空間 U が直交するとは、任意の $u \in U$ と v が直交することをいう：

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad (\forall u \in U).$$

次の命題は普通の内積ではよく知ってることですね。

命題 18.13. 計量ベクトル空間 V のベクトル u, v にたいして次がなりたつ：

(1) $||u|| \geq 0$ であり、等号成立条件は $u = 0$ である。

(2) $||cu|| = |c|||u|| \quad (\forall c \in K)$.

(3)

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v \rangle \quad K = \mathbb{R},$$
$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re\langle u, v \rangle \quad K = \mathbb{C}.$$

(4) もし u, v が直交するならば, 次がなりたつ

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Proof. (3) を $K = \mathbb{C}$ の場合に示す。

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= ||u||^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + ||v||^2 \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

□

18.6 垂線を下ろそう

18.6.1 3 次元の標準計量ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ で考えてみる

ベクトル $u \in \mathbb{R}^3,\ u \neq 0$ が張る直線を $\ell := \langle u \rangle$ とおく。
ベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ から ℓ におろした垂線と ℓ の交点（垂線の足）を v' とおく。

問題：垂線の足 v' を u, v と内積を使ってあらわせ。

観察：

$$v' \text{の長さ} = ||v|| \cos\theta$$
$$v' \text{の方向}' = u.$$

u の方向の単位ベクトル u' は次で与えられる：

$$u' = \frac{u}{||u||}$$

なので、つぎがなりたつ：

$$\begin{aligned} v' = (||v|| \cos\theta)u' &= \frac{||v|| \cos\theta}{||u||} u \\ &= \frac{||v|| ||u|| \cos\theta}{||u||^2} u \\ &= \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \end{aligned}$$

これで問題は解けました。垂線の足については次のことを知っていますね：

(1) $v'' := v - v'$ とおくと、次が成り立つ：

$$v = v' + v'', \quad v'' \perp \ell.$$

(2) v' は ℓ のなかで v に一番近い唯一の点である。

(3) 不等式 $||v|| \geq ||v'||$ が成り立つ。等号成立条件は $v \in \ell$.
この条件は $v'' = 0$ と同値。

(4) 部分空間の等号 $\langle u, v \rangle_{\text{空間}} = \langle u, v'' \rangle_{\text{空間}}$ がなりたつ。
つまり、

- $v \notin \ell$ のときは、u と v の張る平面と u と v'' の張る平面は等しい。
- $v \in \ell$ のときは、$\langle u, v \rangle_{\text{空間}} = \langle u, v'' \rangle_{\text{空間}} = \ell$ である。

実は、これらのことは抽象的な計量ベクトル空間でもなりたつ。
また、性質 (1) から他の性質は導出される。

18.6.2 抽象的な計量ベクトル空間に戻って、垂線を下ろす

補題 18.14. V を計量ベクトル空間とする。ベクトル $u, \in V \ u \neq 0$ を選び、$\ell := \langle u \rangle$ とおく。

ベクトル $v \in V$ にたいして $v', \ v'' \in V$ を以下で定める：

$$v' := \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \quad \text{and} \quad v'' := v - v'.$$

このとき次がなりたつ：

(1) $v = v' + v''$.

(2) $v' \in \ell$.

(3) $v'' \perp \ell$.

(4) v' は ℓ のなかで v に一番近い唯一の点である。

(5) 不等式 $||v|| \geq ||v'||$ が成り立つ。等号成立条件は $v \in \ell$.
この条件は $v'' = 0$ と同値。

(6) 部分空間の等号 $\langle u, v\rangle_{\text{空間}} = \langle u, v''\rangle_{\text{空間}}$ がなりたつ。

証明の見どころの一つは (1)(2)(3) から他の性質は形式的に導出されることである。

Proof. (1)(2) は明らか。

(3) $w \in \ell$ をとってくる。等式 $\langle v'', w\rangle = 0$ を示せばよい。ところが、w にたいしてあるスカラー $c \in K$ が存在して $w = cu$ を満たす。なので

$$\langle v'', w\rangle = \overline{c}\langle v'', u\rangle$$

が成り立つ。よって、等号 $\langle v'', u\rangle = 0$ を示せばよい。

次の計算で $\langle v', u\rangle = \langle v, u\rangle$ を得る：

$$\langle v', u\rangle = \left\langle \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u, u \right\rangle = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\langle u, u\rangle = \langle v, u\rangle.$$

この準備計算を使って、目的の結果を得る：

$$\langle v'', u\rangle = \langle v - v', u\rangle = \langle v, u\rangle - \langle v', u\rangle = 0.$$

(4) ベクトル $w \in \ell$ にたいして次の不等式成り立ちます：

$$\begin{aligned} ||v - w||^2 &= ||(v - v') + (v' - w)||^2 \\ &= ||v - v'||^2 + ||v' - w||^2 \\ &\geq ||v - v'||^2 \end{aligned}$$

２番目の等号の説明：ℓ は部分空間なので $v' - w \in \ell$ が成り立ちます。一方で $v'' \perp \ell$ でした。なので、三平方の定理より問題の等号が導出されます。

等号成立条件は $||v' - w|| = 0$ であり、これは $w = v'$ と同値である。

(5) $v' \in \ell$ なので v' と v'' は直交する。よって、三平方の定理より、次をえる：

$$||v||^2 = ||v'||^2 + ||v''||^2 \geq ||v'||^2.$$

等号成立条件は $||v''|| = 0$ であり、これは $v'' = 0$ と同値である。この条件は $v \in \ell$ と同値である。

(6) $v = v' + v''$ であり $v' \in \langle u\rangle_{\text{空間}}$ なので $v \in \langle v'', u\rangle_{\text{空間}}$ である。ゆえに $\langle v'', u\rangle_{\text{空間}} = \langle v, v'', u\rangle_{\text{空間}}$
$v'' = v - v'$ であり $v' \in \langle u\rangle_{\text{空間}}$ なので $v'' \in \langle v, u\rangle_{\text{空間}}$ である。ゆえに $\langle v, u\rangle_{\text{空間}} = \langle v, v'', u\rangle_{\text{空間}}$
よって、

$$\langle v, u\rangle_{\text{空間}} = \langle v, v'', u\rangle_{\text{空間}} = \langle v'', u\rangle_{\text{空間}}$$

□

18.7 シュワルツの不等式、三角不等式

命題 18.15 (Schwartz inequality)**.**

$$|\langle u, v\rangle| \le ||u||||v||$$

等号成立は u, v が一次従属であること。

Proof. The case $u \neq 0$.

$$||v|| \ge ||v'|| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{|\langle u, u\rangle|}||u|| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{||u||}.$$

The case $u = 0$ is clear. □

系 18.16 (三角不等式)**.**

$$||u+v|| \le ||u|| + ||v||$$

等号成立はある実数 $c \ge 0$ が存在して $u = cv$ あるいは $v = cu$ を満たすことである。

Proof. 複素数の場合 $K = \mathbb{C}$ のみを示す。

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re\langle u, v\rangle \\ &\le ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||||v|| \\ &= (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

等号成立条件を確かめるには次を用いる：
複素数 c が $\Re c = |c|$ を満たすための必要十分条件は c が実数で $c \ge 0$ であること。 □

19 正規直交基底

19.1 直交系、正規直交系

定義 19.1. (1) 計量ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が直交系とは以下の条件が成り立つことをいう：

(a) $v_i \neq 0 \ \ (\forall i = 1, 2, \cdots, r)$.

(b) 相異なる i, j にたいして v_i, v_j は直交する。

(2) 計量ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が正規直交系とは以下の条件が成り立つことをいう：

(a) $v_i \neq 0 \ \ (\forall i = 1, 2, \cdots, r)$.

(b) 相異なる i, j にたいして v_i, v_j は直交する。

(c) $||v_i|| = 1 \ \ (\forall i = 1, 2, \cdots, r)$.

補題 19.2. 直交系は一次独立である。

Proof. $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ を直交系とする。

スカラー $c_1, c_2, \cdots, c_r \in K$ が存在して

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r = 0 \tag{19-66}$$

を満たすとする。

$i = 1, 2, \cdots, r$ を一つ選ぶ。

$j \neq i$ にたいして $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ なので、等式 (19-66) にたいして内積 $\langle -, v_i \rangle$ をとると

$$(\text{左辺}) = \langle c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_rv_r, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{r} c_j \langle v_j, v_i \rangle = c_i ||v_i||^2, \quad (\text{右辺}) = 0$$

をえる。よって、$c_i||v_i||^2 = 0$ である。

直交系の定義から $v_i \neq 0$ したがって $||v_i|| \neq 0$ である。ゆえに、$c_i = 0$ が導かれる。

いま、i は任意だったので、$c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_r = 0$ を結論する。

よって、直交系 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ は一次独立である。 □

19.1.1 正規直交基底

定義 19.3. V を計量ベクトル空間とする。

1. 計量ベクトル空間 V の直交基底とは基底かつ直交系であるものをいう。
2. 計量ベクトル空間 V の正規直交基底とは基底かつ正規直交系であるものをいう。

次の補題はとても大切です。

補題 19.4. V を計量ベクトル空間とし、$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を V の順序付き直交基底とする。

ベクトル $u \in V$ の $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に関する座標 $\vec{x}$ は

$$\vec{x} = \left(\frac{\langle u, v_i \rangle}{||v_i||^2} \right)_{i=1}^{n}$$

である。

別の言い方をすると、次がなりたつ：

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{||v_2||^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{||v_n||^2} v_n.$$

次の系の方がよく使います。

系 19.5. V を計量ベクトル空間とし、$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を V の順序付き正規直交基底とする。

ベクトル $u \in V$ の $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に関する座標 $\vec{x}$ は

$$\vec{x} = (\langle u, v_i \rangle)_{i=1}^{n}$$

である。

別の言い方をすると、次がなりたつ：

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

補題 *19.4* の証明. $u \in V$ の $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に関する座標を $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n$ とおく。つまり、次が成り立つとする

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

$i = 1, 2, \cdots, n$ を任意に選び、上の式と内積 $\langle -, v_i \rangle$ をとることで次の等式をえる

$$\langle u, v_i \rangle = x_i \langle v_i, v_i \rangle.$$

よって、目的の等号を得る。 □

19.1.2 正規直交基底は存在する

次の定理が大事です。証明は次節で与えます。

定理 19.6. 計量ベクトル空間 V には直交基底、正規直交基底が存在する。

「存在する」と主張していますが、実際は、グラム-シュミットの正規直交化法という構成法により、任意の基底から、（正規）直交基底を構成できることを示します。

19.1.3 実は標準計量ベクトル空間だった

任意の n 次元（抽象）ベクトル空間 V は n 次元数ベクトル空間 K^n と同型（実質的に同じとみなしていいの）でした。

実は、任意の n 次元（抽象）計量ベクトル空間 V は n 次元標準計量ベクトル空間 K^n と "計量ベクトル空間として同型"（実質的に同じとみなしていい）ということが分かります。

定理 19.7. n 次元計量ベクトル空間 $V = (V, \langle -, + \rangle_V)$ にたいして次を満たす同型写像 $\Phi : K^n \to V$ が存在する

$$\langle \Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y}) \rangle_V = \langle \vec{x}.\vec{y} \rangle_{K^n}.$$

抽象ベクトル空間と数ベクトル空間との同型を構成するには順序付き基底を使いました。今回は、順序付き正規直交基底をつかいます。

Proof. $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を V の順序付き正規直交基底とする。これの定める同型写像 $\Phi : K^n \to V$ は目的の性質を満たす。

$\vec{x}, \vec{y} \in K^n$ をとってくる。次の計算で目標の等式を示せる：

$$\begin{aligned}\langle \Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y}) \rangle_V &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_i v_i \right\rangle_V = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \langle v_i, v_j \rangle_V \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{K^n}.\end{aligned}$$

ただし、三つ目の等号では次を用いた：

$$\langle v_i, v_j \rangle_V = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

□

20　直交補空間、垂線の足（直交射影）

定義 20.1 (直交補空間)**.** V を計量ベクトル空間、U を部分空間とする。部分集合 $U^{\perp}$ を次で定めると、これは部分空間になる。これを U の**直交補空間**とよぶ。

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0 \text{ for all } u \in U\}.$$

定義する条件は任意の $u \in U$ にたいして直交するということです。このままだと、条件をチェックするのは難しいですね。

ところが、例えば、3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ で考えてみると、あるベクトル v とある平面 U が直交しているかどうか確かめるには平面 U を張っているベクトルとの直交性を確かめればよかったのでした。

補題 20.2. 部分空間 $U = \langle u_1, \cdots, u_m\rangle$ を考える。このとき $v \in V$ に対して次の命題は同値：

(1) $v \in U^{\perp}$. つまり $\langle v, u\rangle = 0$ *for all* $u \in U$.

(2) $\langle v, u_i\rangle = 0$ *for all* $i = 1, \cdots, m$.

Proof. (1) ⇒ (2) は明らか。

(2) ⇒ (1) を示す。つまり、いま大前提として選んできている $v \in V$ が (2)「$\langle v, u_i\rangle = 0$ for all $i = 1, \cdots, m$.」を満たすと仮定して、(1)「$\langle v, u\rangle = 0$ for all $u \in U$.」が成りたつことをしめす。

$u \in U$ を任意にとってくる。いま $U = \langle u_1, \cdots, u_m\rangle$ なので、スカラー $c_1, c_2, \cdots, c_m$ が存在して $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$ を満たす。よって、

$$\langle v, u\rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{m} c_iu_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{c}\langle v, u_i\rangle = 0.$$

□

補題 20.3. 和空間 $U + U^{\perp}$ は直和空間。

とくに $u_1, u_2 \in U,\ w_1, w_2 \in U^{\perp}$ が $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ を満たせば $u_1 = u_2,\ w_1 = w_2$ が成り立つ。

注意 20.4. 直交補空間 $U^{\perp}$ が U の補空間である、つまり $U \oplus U^{\perp} = V$ が成り立つことは後で示します。

Proof. 同値条件の一つである $U \cap U^{\perp} = 0$ を示す。そのためには任意に $u \in U \cap U^{\perp}$ をとってきたとして $u = 0$ が成り立つことを示せばよい。

$u \in U \cap U^{\perp}$ を任意にとってくる。$u \in U^{\perp}$ なので U の任意の要素 $w \in U$ と直交する。とくに $u \in U$ と直交する。ゆえに $||u||^2 = \langle u, u\rangle = 0$ が成り立つ。よって、$u = 0$ である。□

ベクトル v から部分空間 U への垂線が下ろせるということを定式化しましょう。

定義 20.5 (垂線の足)**.** ベクトル $v \in V$ の部分空間 U への<u>垂線の足（直交射影）</u>v' を以下を満たすものと定める：

(1) $v' \in U$.

（場合によっては $v' = \mathrm{pr}_U\, v$ とあらわす。）

(2) $v'' = v - v'$ とおくとき、$v'' \in U^{\perp}$.

条件は

$$v = v' + v'' \quad (v' \in U,\ v'' \in U^{\perp})$$

という表示を v がもつ、ということを言っています。これはつまり、$v \in U \oplus U^{\perp}$ ということですね。

補題 20.3 からつぎが導出できます。

系 20.6. ベクトル $v \in V$ の部分空間 U への垂線の足は存在すれば一意的である。

例 20.7. ベクトル $u \in V,\ u \neq 0$ にたいして $U = \langle u \rangle$ とする。ベクトル v の U への直交射影は以前に導入したものである：

$$v' = \frac{\langle v, u \rangle}{||u||^2} u.$$

いぜんやったのと同様に、直交射影の定義から次の命題が導出できます。

命題 20.8. v' をベクトル $v \in V$ の U におろした垂線の足とする。次がなりたつ：

(1) $v' \in U$ は U の中で v に最も近い唯一の点である。

(2) $||v|| \geq ||v'||$ であり。等号成立は $v \in U$.

(3) $\langle v \rangle + U = \langle v'' \rangle + U$.

20.0.1 垂線の足の構成

命題 20.9. 部分空間 U が直交基底 $u_1, \cdots, u_m$ を持つと仮定する。すると $v \in V$ にたいしてベクトル

$$v' = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{||u_2||^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle v, u_m \rangle}{||u_m||^2} u_m.$$

と定めれば、これは v から U におろした垂線の足である。

例 20.7 は $m = 1$ の場合ですね。

Proof. $v' \in U$ は明らか。

$v'' \in U^{\perp}$ を示すには、$\langle v'', u_i \rangle = 0 \quad (\forall i = 1, 2, \cdots, m)$ を示せばよい。これは $m = 1$ の場合と同様の計算で示せる（ので略）。 □

21 グラム-シュミットの正規直交化法

定理 21.1 (グラム-シュミットの正規直交化法)**.** 計量ベクトル空間 V の基底 $v_1, \cdots v_n$ を考える。

$U_i := \langle v_1, \cdots, v_i \rangle$ とおく。

帰納的に

$$u_1 := v_1,\ u_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{||u_j||^2} u_j \tag{21-67}$$

と定める。次が成り立つ：

(1) $u_1, \cdots, u_n$ は直交基底である。

(2) さらに $w_i := u_i/||u_i||$ と定めれば、$w_1, \cdots, w_n$ は正規直交基底である。

(3) さらに各 $i = 1, \cdots, n$ にたいして

$$U_i = \langle v_1, \cdots, v_i \rangle = \langle u_1, \cdots, u_i \rangle = \langle w_1, \cdots, w_i \rangle.$$

が成り立つ。

Proof. $i = 1, 2, \cdots, n$ にたいして次のように命題を定める：

(1') $u_1, \cdots, u_i$ は直交系である。

(2') $w_1, \cdots, w_i$ は正規直交系である。

$i = 1, 2, \cdots, n$ に関して帰納的に (1')(2')(3) をまとめて示します。

$i = 1$ の場合は明らか。

$i \geq 2$ とする。$i - 1$ までは、(1')(2')(3) が示されたと仮定し、i の場合を示しましょう。
構成 21-67 をみると次がわかりますね：

$$u_1 = v_1, \quad u_i = v_i - \mathrm{pr}_{U_{i-1}}(v_i).$$

つまり、部分空間 U_{i-1} を念頭におくことにして、ここへの直交射影を考えることにすると、u_i の構成というのは v_i'' と書かれたものであるということです。
なので、$u_i \in U_{i-1}^{\perp}$ が成り立ちます。また、$v_i \notin U_{i-1}$ なので、$u_i \neq 0$ です。
(3) が $i - 1$ にたいして成り立つので、$u_1, \cdots, u_{i-1} \in U_{i-1}$ です。よって、$\langle u_j, u_i \rangle = 0 \quad (\forall j = 1, 2, \cdots, i-1)$ がなりたちます。
(1') が $i - 1$ にたいしてなりたっていたことと合わせると、(1') が i にたいしても成り立つことがわかります。

(2') はあきらか。

(3) は命題 20.8(3) から従う。 □

これで任意の計量ベクトル空間には正規直交基底が存在することも示せました。

21.0.1　例

4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + z + w = 0 \right\}$$

を考えましょう。これは 1×4 行列 $(1, 1, 1, 1)$ の核です。つぎのベクトルの組が基底と分かります：

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このベクトルの組は直交系ではありません。グラム-シュミットの正規直交化法を適用して H の正規直交基底を構成しましょう。

まず $u_1 := v_1$ とおく。

次に

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 = \cdots = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

そして

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{||u_2||^2} u_2 = \cdots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（直交しているか検算しよう。）

最後に正規化して終わり：

$$w_1 = \frac{1}{||u_1||} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \frac{1}{||u_2||} u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \frac{1}{||u_3||} u_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

22　直交補空間は補空間

命題 22.1. 計量ベクトル空間 V と部分空間 $U \subset V$ にたいして次が成り立つ：

(1) $V = U \oplus U^{\perp}$.

つまり、$U^{\perp}$ は U の補空間である。

(2) $\dim U^{\perp} + \dim U = \dim V$.

(3) $U^{\perp\perp} = U$.

Proof. (1) 計量ベクトル空間 U の正規直交基底 $u_1, \cdots, u_m$ から、命題 20.9 の構成で任意の $v \in V$ にたいして直交射影 $\mathrm{pr}_U(v)$ を構成できる。よって、$v = \mathrm{pr}_U(v) + (v - \mathrm{pr}_U(v)) \in U \oplus U^{\perp}$ である。
　つまり、任意の $v \in V$ は $U \oplus U^{\perp}$ に属することが示せた。

　(2) は (1) から従う。

　(3) 包含関係 $U \subset U^{\perp\perp}$ を示す。
　ベクトル $v \in V$ が $U^{\perp\perp} = (U^{\perp})^{\perp}$ に属するための必要十分条件は

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad (\forall w \in U^{\perp})$$

である。なので、任意の $u \in U$ が上の条件を満たすことを確かめればよい。

　（復習：しかし、そもそも $w \in V$ が $U^{\perp}$ に属する必要十分条件は

$$\langle w, s \rangle = 0 \quad (\forall s \in U)$$

だった。なので、）

　任意の $u \in U$ をとってくる。すると $U^{\perp}$ の定義（上の復習）から任意の $w \in W$ にたいして $\langle u, w \rangle = 0$ がなりたつ。よって $u \in U^{\perp\perp}$ である。
　これにて包含関係 $U \subset U^{\perp\perp}$ が示された。

　以下の計算で $\dim U^{\perp\perp} = \dim U$ が示される。

$$\dim U^{\perp\perp} = \dim V - \dim U^{\perp} = \dim U.$$

よって $U^{\perp\perp} = U$ がなりたつ。 □

注意 22.2. 直交射影の存在や、この命題には有限次元性を密かに用いています。無限次元では一般には成り立ちません。しかし、$U^{\perp} = U^{\perp\perp\perp}$ は無限次元でも成り立ちます。

注意 22.3. 上の (1) の証明の鍵は「任意のベクトル $v \in V$ にたいして部分空間 U への直交射影 $\mathrm{pr}_U v$ が存在する」ことですね。
　ここでは講義ですでに示している以下の二つの命題から導出しました：

(i) 部分空間 U に直交基底が存在する。

(ii) 直交基底をもつ部分空間への直交射影が存在する。

　しかし、実は、これらを使わなくても、部分空間への直交射影が存在することがわかります。
　命題 (ii) では実際には、直交基底を用いて直交射影 $\mathrm{pr}_U v$ を構成する公式を与えましたが、（直交とは限らない）基底を用いて直交射影 $\mathrm{pr}_U v$ を構成する公式があります。

23　おまけ：直交してない基底で直交射影を作る方法

命題 20.9 では、部分空間 U の直交基底をもちいて直交射影を記述する方法を与えました。直交するとは限らない基底で直交射影を記述する方法を紹介します。

計量ベクトル空間 V が 3 次元実数計量ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ で、部分空間 U が平面の場合にこの問題を書き直してみると、センター試験にでも出題されそうな問題とわかりますね。

「一次独立なベクトル $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ が与えられたとして、それが生成する平面を U とする。ベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ から平面 U に垂線を下ろした時の交点 v' を u_1, u_2, v とこれらの内積を用いて表せ。」

みなさん、このくらいの問題なら解けそうにおもいますよね。

23.1　はじまり、はじまり

計量ベクトル空間 V のベクトルの組 $u_1, \cdots, u_m \in V$ を考えます。線形写像 $\Phi : K^m \to V$ というのは $\Phi(x) = \sum_{i=1}^m x_i u_i$ と定義されるのでした。あらたに線形写像 $\Psi : V \to K^m$ を以下で定めます：

$$\Psi(v) := \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \langle v, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_m \rangle \end{pmatrix}.$$

直交補空間の条件をチェックする補題を言い換えるとつぎを得ます。

補題 23.1. 部分空間 $U = \langle u_1, \cdots, u_m \rangle$ を考える。このとき $U^\perp = \ker \Psi$ がなりたつ。

m 次正方行列 G を $G := {}^t(\langle u_i, u_j \rangle)$ で定義します。つまり、第 (i, j) 成分が $\langle u_j, u_i \rangle$ である行列です。

補題 23.2. 次が成り立つ：

(1) $\langle v, \Phi(x) \rangle_V = \langle \Psi(v), x \rangle_{K^m}$ *for all* $x \in K^m,\ v \in V$.

(2) $\Psi(\Phi(x)) = Gx$ *for all* $x \in K^m$. つまり、写像の等式 $\Psi \circ \Phi = T_G$ が成り立つ。

注意 23.3. 上の補題.1 の関係にあるような線形写像 Φ, Ψ を互いに随伴であるという。

証明.

$$(1)\ \langle v, \Phi(x) \rangle_V = \sum_{i=1}^m \overline{x}_i \langle v, u_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle \overline{x}_i = \langle \Psi(v), x \rangle_{K^m}.$$

$$(2)\ \Psi(\Phi(x)) \text{ の第 } j \text{ 成分} = \Psi(\sum_{i=1}^m x_i u_i) \text{ の第 } j \text{ 成分} = \sum_{i=1}^m \langle u_i, u_j \rangle x_i = Gx \text{ の第 } j \text{ 成分}.$$

□

命題 23.4.

$$\ker \Phi = \ker G.$$

証明. 包含関係 $\ker\Phi \subset \ker G$ の証明：$x \in \ker\Phi$ を持ってくる。$Gx = \Psi(\Phi(x)) = 0$ なので $x \in \ker G$ である。

包含関係 $\ker\Phi \supset \ker G$ の証明：$x \in \ker G$ を持ってくる。すると以下の式変形により $||\Phi(x)|| = 0$ が分かる。

$$||\Phi(x)||^2 = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = \langle \Psi(\Phi(x)), x \rangle = \langle Gx, x \rangle = 0$$

よって、$\Phi(x) = 0$ であり、つまり、$x \in \ker\Phi$ が示された。 □

次の系が大事です。

系 23.5. 計量ベクトル空間 V のベクトルの組 $u_1, \cdots, u_m \in V$ が一次独立である為の必要十分条件は m 次正方行列 $G = {}^t(\langle u_i, u_j \rangle)$ が正則であることである。

証明. $u_1, \cdots, u_m \in V$ が一次独立 $\Leftrightarrow$ Φ が単射 $\Leftrightarrow$ $\ker\Phi = 0 \Leftrightarrow \ker G = 0 \Leftrightarrow$ 正方行列 G は正則 □

部分空間 U の直交とは限らない基底を用いて直交射影を記述する方法は次で得られます。

命題 23.6. 上の設定で $u_1, \cdots, u_m$ が部分空間 U の基底である場合を考える。このとき、直交射影 $\mathrm{pr}_U\, v$ は次の式で与えられる：

$$\mathrm{pr}_U\, v = \Phi(G^{-1}(\Psi(v))).$$

証明. $v' := \Phi(G^{-1}(\Psi(v)))$ とおきます。$v' \in \mathrm{Im}\,\Phi = U$ は明らかなので、$v - v' \in U^{\perp} = \ker\Psi$ を示せばよい。準備計算をします：$\Psi(v') = \Psi(\Phi(G^{-1}(\Psi(v)))) = GG^{-1}\Psi(v) = \Psi(v)$. よって $\Psi(v - v') = \Psi v - \Psi v' = 0.$ □

$u_1, \cdots, u_m$ が直交系の時には G は第 (i,i) 成分が $\langle u_i, u_i \rangle$ である対角行列であり、G^{-1} は同じく対角行列でその第 (i,i) 成分は $\langle u_i, u_i \rangle^{-1}$ ですね。そのことから上の公式が命題 20.9 で与えている直交射影と一致することがわかります。

24　ここからの目標

また、少し話は変わって、正方行列の対角化に戻ります。

ここからの目標の一つは「($K=\mathbb{R}$ の場合は) 実対称行列の直交行列による対角化」です。
直交行列というのは正方行列 P で線形変換 $T_P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の距離を保つものを言います。
直交行列は正則であり、正規直交基底を並べて得られる正方行列が直交行列です。
対角化というのは座標変換によって線形写像 $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が対角行列として表現できるかを問うことでした。
直交行列による対角化というのは、

許される座標変換を距離を保つ座標変換に制限する、

ということです。
応用上の重要性は察せられますよね。

転置というのは行列の行と列を入れ替える操作でした。
対称行列 A というのは転置を施しても変わらない、つまり、等式 ${}^tA=A$ がなりたつものでした。
行列の成分で定義される具体的な性質ですが、
実は、実数上で考える場合は、転置行列をとるという操作や対称行列という性質が、
標準計量ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を使って理解することが出来ます。
そのことが、対角化を論じる際の鍵になります。

ただ、対角化は複素数上で考える方が上手くいったので、複素数の場合を主に扱います。
複素数の場合の目標は「($K=\mathbb{C}$ の場合は) 正規行列のユニタリー行列による対角化」です。
ここに現れた用語はボチボチ説明していきます。

25　随伴行列

25.1　随伴行列

以下では数ベクトルでも上に矢印を付けないことにします。

定義 25.1. $n\times m$ 行列 A の随伴行列 A^* を以下で定義する。

$$A^*:={}^t\overline{A}$$

つまり、各成分の複素共役を取ってから転置した行列です。サイズは $m\times n$ ですね。

単純な操作ですが、これから大活躍を見せます。基本的な性質を挙げます：

補題 25.2. *次が成り立つ。*

(1) $A^{**}=A.$

(2) $(AB)^*=B^*A^*.$

(3) $E_n^*=E_n.$

(4) A *は正方行列とする。*

(i) $\det A^* = \overline{\det A}$.

(ii) A が正則行列 $\Leftrightarrow$ A^* が正則行列。
この条件が成り立つとき $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(5) $\mathsf{rank}\, A^* = \mathsf{rank}\, A$.

(5)の証明. まず $n \times m$ 行列 $F_{n,m,r} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考えます（0 は適切なサイズの 0 行列を表し、r の値によってはない場合もあります。例.$F_{n,n,n} = E_n$.)。$n \times m$ 行列 A の階数が r であるというのは正則行列 P, Q が存在して $A = PF_{n,m,r}Q$ を満たすことでした。$F^*_{n,m,r} = F_{m,n,r}$ なので、$A^* = Q^* F_{m,n,r} P^*$ が成り立ち、(4) より Q^*, P^* は正則なので A^* の階数は A のそれと一致するとわかります。 $\square$

随伴をとる操作と（エルミート）内積との関係が大切です。

補題 25.3. n 次数ベクトル $u, v \in \mathbb{C}^n$, m 次数ベクトル $x \in \mathbb{C}^m$, $n \times m$ 行列 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $n \times k$ 行列 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ に対して次が成り立つ：

(1) $\langle u, v \rangle = v^* u$.

(2) $\langle Au, x \rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle u, A^* x \rangle_{\mathbb{C}^n}$.

(3) $A^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_m^* \end{pmatrix}$ （行ベクトル表示.）

(4) $A^* u = \begin{pmatrix} a_1^* u \\ a_2^* u \\ \vdots \\ a_m^* u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, a_1 \rangle \\ \langle u, a_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, a_m \rangle \end{pmatrix}$ （m 次数ベクトル）

(5) $A^* B = {}^t(\langle b_i, a_j \rangle)$ （$m \times k$ 行列）

(6) $A^* A = {}^t(\langle a_i, a_j \rangle)$ （m 次正方行列）

注意 25.4. 性質 (2) は抽象的な状況での随伴写像の定義として用いられます。

25.2 ユニタリー行列

系 25.5. n 次正方行列 A にたいして次は同値：

(1) $A^* A = E_n$.

(2) $AA^* = E_n$.

(3) A は正則であり、逆行列は A^* と一致する：

$$A^{-1} = A^*.$$

(4) A の列ベクトル $a_1, \ldots, a_n$ は K^n の正規直交基底である。

(5) A の行ベクトルを転置したものは K^n の正規直交基底である。

定義 25.6. 上の系の同値条件を満たす行列を $K = \mathbb{C}$ の場合はユニタリー行列、$K = \mathbb{R}$ の場合は直交行列とよぶ。

これは重要な概念です。詳しい性質はしばらく後に論じます。

25.3 諸性質

命題 25.7. $m \times n$ 行列 A に対して次が成り立つ：

(1) $\ker A = \ker A^* A$.

(2) $\mathsf{rank}\, A = \mathsf{rank}\, A^* A$.

Proof. (1) $u \in \mathbb{C}^n$ にたいして二条件

1. $Au = 0$.
2. $A^* Au = 0$

が同値と示せばよい。

$1 \Rightarrow 2$ は明らか。
$2 \Rightarrow 1$ は次で示される：

$$A^* Au = 0 \Rightarrow 0 = \langle A^* Au, u\rangle = \langle Au, Au\rangle \Rightarrow Au = 0.$$

(2) 次元公式 $\mathsf{rank}\, A = \dim \operatorname{Im} A = n - \dim \ker A$ より従う。

$\square$

系 25.8. n 次数ベクトルの組 $u_1, \cdots, u_m \in \mathbb{C}^n$ に対して $n \times m$ 行列 $A = (u_1, \cdots, u_m)$ とおくとき次は同値：

(1) $u_1, \cdots, u_m$ は一次独立。 (2) m 次正方行列 $A^* A$ は正則。

命題 25.9. $n \times m$ 行列 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ に対して次が成り立つ：

(1) $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*,\ (\operatorname{Im} A^*)^\perp = \ker A$.

(2) $\mathbb{C}^n = \ker A^* \oplus \operatorname{Im} A,\ \mathbb{C}^m = \ker A \oplus \operatorname{Im} A^*$.

(3) 写像 $f : \operatorname{Im} A^* \to \operatorname{Im} A,\ f(u) = Au, \quad g : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} A^*,\ g(x) = A^* x$ は同型写像。（注意：これらは互いに逆写像ではありません。）

証明の前に内積の非退化性と呼ばれる性質を注意しておきます。それはベクトル $v \in V$ に対する次の同値性です：

$$v = 0 \Longleftrightarrow \langle w, v\rangle = 0 \text{ for all } w \in V.$$

Proof. (1). $v \in V$ に対して次の同値性が成り立つことから (1) は従う：

$$v \in \ker A^* \Leftrightarrow A^*v = 0 \Leftrightarrow \langle w, A^*v\rangle = 0 \text{ for all } w \in V \Leftrightarrow \langle Aw, v\rangle = 0 \text{ for all } w \in V \Leftrightarrow v \in (\operatorname{Im} A)^\perp$$

(2) は直交補空間の性質です。

(3) g に関してのみ証明する。
値域と定義域の次元が等しい $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^*$ なので、線形写像 g が単射と示せばよい。そのためには $\ker g = 0$ を示せばよい。

$x \in \ker g$ をとってくる。$x \in \operatorname{Im} A$ なので、ある $u \in \mathbb{C}^n$ が存在して $x = Au$ を満たす。
次の様に $A^*Au = 0$ が導出できる：

$$A^*Au = A^*x = g(x) = 0.$$

つまり、$u \in \ker A^*A$ である。
上の命題より、$\ker A^*A = \ker A$ だったので、$u \in \ker A$ をえる。よって、$x = Au = 0$ をえる。
ゆえに $\ker g = 0$ を結論する。 □

命題 25.10. 部分空間 $U \subset \mathbb{C}^n$ とその基底 $u_1, \cdots, u_m$、さらに $n \times m$ 行列 $A = (u_1, \cdots, u_m)$ を考える。このとき U への直交射影 pr_U は次で与えられる。

$$\mathrm{pr}_U(v) = A(A^*A)^{-1}A^*v.$$

Proof. $v' := A(A^*A)^{-1}A^*v$ とおきます。$v' \in \operatorname{Im} A = U$ は明らかなので、$v - v' \in U^\perp = \ker A^*$ を示せばよい。準備計算をします: $A^*v' = (A^*A)(A^*A)^{-1}A^*v = A^*v$. よって $A^*(v-v') = A^*v - A^*v' = 0$. □

命題 25.9.3 の同型写像 g の逆写像 g^{-1} を与えておきます。$m \times n$ 行列 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ を行基本変形で被約階段行列 B に変形したとします。$r = \mathsf{rank}\, A$ とおきます。そして B の第 1 行から第 r 行までだけを集めた行列を C とおき、さらに $m \times r$ 行列を $P = (a_{j(1)}, \cdots, a_{j(r)})$ と定めると、$A = PC$ が成り立つのでした。さらにある $m \times r$ 行列 D が存在して $CD = E_r$ を満たします。ベクトルの組 $a_{j(1)}, \cdots, a_{j(r)}$ は $\operatorname{Im} A = \langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ の基底でした。よって $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P$ であることに注意しておきます。また、上の系より P^*P は r 次正則行列であることにも注意します。逆写像 $g^{-1} : \operatorname{Im} A^* \to \operatorname{Im} A$ は $g^{-1}(u) := P(P^*P)^{-1}D^*$ により与えられます。証明は合成 $gg^{-1}, g^{-1}g$ を計算するだけですが、すこし難しいかも知れません。興味のある人はやってみてください。定義域を制限していることがポイントです。

26　随伴写像

定義 26.1. V, X を計量ベクトル空間 $f : V \to X$ を線形写像とする。線形写像 $f^* : X \to V$ が f の随伴であるとは、次が成り立つことと定める：

$$\langle f(v), x\rangle_X = \langle v, f^*(x)\rangle_V \text{ for all } v \in V, x \in X$$

線形写像 $f : V \to X$ に随伴する写像は存在すれば一意的であることは、内積の非退化性を使えばわかります。この講義では有限次元の計量ベクトル空間のみを扱っていました。この仮定の下では随伴写像は任意の線形写像に対して存在します。それは例えば正規直交基底に関する f の表現行列 A を考えれば、その随伴行列 A^* に対応する線形写像が随伴写像であることが示せます。
上の節で行列 A とその随伴行列 A^* に対して示した命題は、ほぼ、そのまま線形写像 f とその随伴写像 f^* に対して成り立ちます。証明も同じです。

27　ユニタリー行列、直交行列と等距離写像

n 次正方行列 A の誘導する線形写像 $T_A : K^n \to K^n$ が距離を保つのはどんな時か考えてみましょう。

27.1　準備：内積と行列

内積を使って行列の成分を取り出すことが出来ます。

補題 27.1. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ にたいして次が成り立つ：

$$\langle Ae_j, e_i \rangle_{K^m} = a_{ij}$$

ただし、左側にいる e_j は K^n の第 j 基本ベクトルであり、右側の e_i は K^m の第 i 基本ベクトルです。

次が従います。（注意：これは内積の非退化性からも証明することができます。）

系 27.2. *(1)* 二つの $m \times n$ 行列 A, B が $A = B$ を満たすための必要十分条件は等式

$$\langle Au, x \rangle = \langle Bu, x \rangle$$

が任意の $u \in K^n, x \in K^m$ に対して成り立つことである。

(2) $m \times n$ 行列 A に対して $n \times m$ 行列 A' が A の随伴である為の必要十分条件は等式

$$\langle Au, x \rangle = \langle u, A'x \rangle$$

が任意の $u \in K^n, x \in K^m$ に対して成り立つことである。

(3) n 次正方行列 A が単位行列である為の必要十分条件は等式

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

が任意の $u, v \in K^n$ に対して成り立つことである。

27.2　ユニタリー行列と等距離写像

$K = \mathbb{C}$ の場合を考えましょう。$K = \mathbb{R}$ の場合はもっと簡単です。（あるいは、複素共役 $\overline{A}$ は何もしない操作ということにして、随伴 A^* は転置 ${}^tA$ と読み替えればそのまま議論はとおります。）

補題 27.3. n 次正方行列 A に対して次は同値：

(1) 線形写像 $T_A : K^n \to K^n$ は距離を保つ。つまり、次が成り立つ：
$||Au - Av|| = ||u - v||$ *for all* $u, v \in K^n$.

(2) $||Au|| = ||u||$ *for all* $u \in K^n$.

(3) $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ *for all* $u, v \in K^n$.

(4) $\langle A^*Au, v \rangle = \langle u, v \rangle$ *for all* $u, v \in K^n$.

(5) $A^*A = E_n$.

(6) A は正則であり、逆行列は A^* と一致する：

$$A^{-1} = A^*.$$

(7) A の列ベクトル $a_1, \ldots, a_n$ は K^n の正規直交基底である。

(8) A の行ベクトルを転置したものは K^n の正規直交基底である。

(2) から (3) を示すためには長さから内積を復元する次の補題を用います。といっても、余弦定理を変形しただけです。

補題 27.4. *(1)* $K = \mathbb{R}$

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2).$$

(2) $K = \mathbb{C}$

$$\Re\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2), \quad \Im\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(||-iu+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2).$$

Proof. (1) と (2) の一つ目の等式は余弦定理の変形。

複素数 z にたいして次が成り立つ：

$$\Im z = \Re(-iz).$$

この事実に注意すれば、(2) の二つ目の等式は一つ目の等式の u に $-iu$ を代入することで得られる。 □

27.3 ユニタリー行列、直交行列

上の命題の条件を満たす行列をユニタリー行列と呼びます。

定義 27.5 (ユニタリー行列)**.** 複素係数 n 次正方行列 A が**ユニタリー行列**とは正則かつ $A^{-1} = A^*$ が成り立つことをいう。$\det A = 1$ を満たすユニタリー行列を**特殊ユニタリー行列**と呼ぶ。

補題 27.6. ユニタリー行列 A の固有値 λ の絶対値は 1.

実係数の場合にはユニタリー行列は直交行列と呼ばれます。

定義 27.7 (直交行列)**.** 実数係数 n 次正方行列 A が**直交行列**とは正則かつ $A^{-1} = {}^tA$ が成り立つことをいう。$\det A = 1$ を満たす直交行列を**特殊直交行列**と呼ぶ。

例 27.8. n 次直交行列 A は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を並べることで得られます。

2 次直交行列なら $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を並べることで得られるのですが、これは簡単に実行できます。結果としては 2 次直交行列は以下の形をしてることが分かります：

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

27.4　おまけ：等距離写像の実線形性

上の命題では線型性を仮定しましたが、実数上ならばその距離を保つことから線形性は従います。

定理 27.9. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が距離を保ち、原点を原点に移すならば実数上の線形写像である。

Proof. 仮定は f が次の二つの性質を満たすことをいっています:

$$(1)\ f(0) = 0 \text{ and } (2)\ ||f(u) - f(v)|| = ||u - v|| \text{ for all } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

(2) に $v = 0$ を代入すると (1) より $||f(u)|| = ||u||$ を得ます。これを用いて f が内積を保つことが以下の様にして示せます：

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v)\rangle &= \frac{1}{2}(||f(u)||^2 + ||f(v)||^2 - ||f(u) - f(v)||^2)\\ &= \frac{1}{2}(||u||^2 + ||v||^2 - ||u - v||^2)\\ &= \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

これを使って頑張って計算すると次を得ます：

$$||f(cu + dv) - cf(u) - df(v)||^2 = \cdots\cdots = 0 \text{ for all } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ and } c, d \in \mathbb{R}.$$

故に $f(cu + dv) = cf(u) + df(v)$ が成り立つことが分かり、故に f は線形と示されました。 □

注意 27.10. 複素数の場合にはこの定理は成り立ちません。例えば複素共役を対応させる写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \overline{z}$ は距離を保ちますが複素数上線形ではありません。

28　ユニタリー行列による対角化と正規行列

n 次正則行列 P の一つの見方は n 次元数ベクトル空間 K^n の座標変換行列でした。その見方からすると n 次正方行列 A に対して作られる新たな n 次正方行列 $P^{-1}AP$ というのは A を掛けるという線形写像 $T_A : K^n \to K^n$ を P によって変換された座標から測った表現行列なのでした。なので、n 次正方行列 A が対角化可能というのはある座標系から測定すれば A は対角行列であるということです。

正則行列全部を考えることは線型な座標変換を全て考えることに対応します。ところが線型な座標変換の中にはいろいろなものがあり、応用問題を考える上では、線型な座標変換全てを考えてはいけない場合も出てきます。

応用上重要なものとして二点間の距離を変えない線型な座標変換があります。勝手な座標変換というのは二点間の距離を保たないものもあるので、そういうものは除外しようという訳です。

二点間の距離を変えない座標変換のみを考えた場合に対角行列に見える様な行列がどんなものであるのかを調べるのがこれからの目標です。

復習しておくと二点間の距離を変えない座標変換に対応するのは $K = \mathbb{C}$ ならユニタリー行列、$K = \mathbb{R}$ なら直交行列でした。

28.1　ユニタリー行列により対角化可能

取り敢えず $K = \mathbb{C}$ の場合に話しを限ることにします。今まで説明してきたことから次の定義をするのは自然ですね。

定義 28.1. n 次正方行列 A が**ユニタリー行列により対角化可能**とはユニタリー行列 U と対角行列 D が存在して次を満たすことと定める：

$$U^*AU = D.$$

先にも言ったように、これはある正規直交基底に基いた座標によって線形写像 $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が対角行列として表現されるということです。

補題 28.2. n 次正方行列 A がユニタリー行列により対角化されるための必要十分条件は固有ベクトルから構成される正規直交基底が存在することである。

注意 28.3. 正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は固有ベクトルから構成される基底をもつことでした。

固有ベクトルから構成される基底にたいしてグラム-シュミットの正規直交化法を用いれば、いつでもユニタリー行列で対角化できる、と結論できそうです。が、しかし、グラム-シュミットの正規直交化法が固有ベクトルという性質を保つとは限らないので、そうは上手くいきません。

28.2　正規行列

定義 28.4. n 次正方行列 A が**正規**とは $AA^* = A^*A$ が成り立つことをいう。

補題 28.5. *(1)* ユニタリー行列 U, エルミート行列 A, 歪エルミート行列 Y, 対角行列 D は正規行列。

(2) ユニタリー行列 U と正規行列 A に対して U^*AU は正規行列である。

つまり、正規行列であるという性質は線形等距離座標変換によって保たれる。

(3) ユニタリー行列 U と対角行列 D に対して U^*DU は正規行列.

最後のことからユニタリー行列により対角化可能な行列は正規行列であることがわかります。つまり、ユニタリー行列により対角化可能であるための必要条件は正規行列であること、がわかりました。

この条件が十分条件であることを示すのがこれからの目標です。

その為に、正規行列の性質を調べましょう。

補題 28.6. 正規行列 A に対して次が成り立つ。

(1) $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,A^*$.

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda E_n - A$ も正規行列であり、$(\lambda E_n - A)^* = \overline{\lambda} E_n - A^*$.

(3) A の固有値 λ に属する固有空間は A^* の固有値 $\overline{\lambda}$ に属する固有空間と一致する：

$$V(\lambda; A) = V(\overline{\lambda}; A^*).$$

(4) 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値であるための必要十分条件は $\overline{\lambda}$ が A^* の固有値であることである。

Proof. (1) 正規性 $(A^*A = AA^*)$ を用いた次の式変形で導出できる：

$$\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,A^*A = \mathrm{Ker}\,AA^* = \mathrm{Ker}\,A^*$$

(2) $B = \lambda E_n - A$ とおく。$B^* = \overline{\lambda} E_n - A^*$ である。次の計算で $B^*B = BB^*$ が導出できる：

$$\begin{aligned}
B^*B &= (\overline{\lambda} E_n - A)(\lambda E_n - A) \\
&= \overline{\lambda}\lambda E_n - A^* - A + A^*A \\
&= \lambda\overline{\lambda} E_n - A^* - A + AA^* \\
&= (\lambda E_n - A)(\overline{\lambda} E_n - A) \\
&= BB^*
\end{aligned}$$

ただし、三つ目の等号で A の正規性を用いている。

(3) 定義 $V(A; \lambda) := \mathrm{Ker}(\lambda E_n - A)$ を思い出せば、これは (2) の帰結。

(4) は (3) の帰結ですね。 □

次が大事です。

命題 28.7. 正規行列 A の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

つまり、$v, v' \in \mathbb{C}^n$ を相異なる固有値 λ, λ' に属する固有ベクトルとする。すると $\langle v, v' \rangle = 0$.

Proof. 以下の式変形により等号 $\lambda\langle v.v' \rangle = \lambda' \langle v, v' \rangle$ が導出できる：

$$\lambda\langle v, v' \rangle = \langle Av, v' \rangle = \langle v, A^*v' \rangle = \langle v, \overline{\lambda}' v' \rangle = \lambda' \langle v, v' \rangle.$$

この式を変形して $(\lambda - \lambda')\langle v, v' \rangle = 0$ をえる。仮定より $\lambda \neq \lambda'$ なので、目的の等式 $\langle v, v' \rangle = 0$ を得る。

□

28.3 ユニタリー行列による対角化

定理 28.8. n 次正方行列 A がユニタリー行列により対角化可能である為の必要十分条件は A が正規行列であることである。

必要条件であることは既に述べました[9]。十分条件であること、つまり正規行列 A はユニタリー行列により対角化可能であることを示しましょう。

証明のためには以下の二つの補題が必要です。これらは正規性とは無関係になりたちます。

補題 28.9 (A の正規性は関係ない命題)**.** $U \subset \mathbb{C}^n$ を部分空間とする。任意の $u \in U$ が $A^*u \in U$ を満たすとする。すると、任意の $w \in U^\perp$ は $Aw \in U^\perp$ を満たす。

補題 28.10. ベクトル空間 $W \neq 0$ から自分自身への線形写像 $f : W \to W$ は固有ベクトルを一つはもつ。つまり、$w \in W, w \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $f(w) = \lambda w$ を満たす。

十分性の証明. $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ を A の無駄のない固有値とする。

固有ベクトルから構成される正規直交基底が存在することを示せばよい。そのために、まず、次を示しましょう：

主張 28.11.

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_p} = \mathbb{C}^n.$$

主張の証明. $U = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_p}$ とおく。直和分解 $U \oplus U^\perp = \mathbb{C}^n$ があるのだったから、$U^\perp = 0$ を示せばよい。

背理法を用いる。

$U^\perp \neq 0$ と仮定する。A の固有ベクトルは A^* の固有ベクトルでもあったから、任意の $u \in U$ に対して $A^*u \in U$ が成り立つ。よって、任意の $w \in U^\perp$ に対して $Aw \in U^\perp$ が成り立つ。

故に $U^\perp$ のベクトル w に対して $U^\perp$ のベクトル Aw を対応させるという規則は写像 $f : U^\perp \to U^\perp$ である。

この写像は線形である。よって、$U^\perp \neq 0$ という仮定から f の固有ベクトル w が $U^\perp$ に存在する。これの固有値を μ とする。

すると $U^\perp$ の中の等号 $f(w) = \mu w$ が成り立つ。これは $\mathbb{C}^n$ の中の等号 $Aw = \mu w$ に他ならない。つまり、w は行列 A の固有値 μ に属する固有ベクトルである。

しかし、A の固有ベクトルは全て U に属していたのであるから矛盾である。

□

[9]必要条件と十分条件との区別は出来ますか？先にユニタリー行列により対角化可能である行列は正規であると示していますね。ユニタリー行列により対角化可能である為には A は正規行列であることが「必要」ですね（そうでなければ不可能なのだから）。なので「A が正規行列であることは A がユニタリー行列により対角化可能である為の「必要条件」である。」と言うことになる訳です。

これで主張が証明されました。

計量ベクトル空間に正規直交基底が存在することは既に示しました。各 $i = 1, 2, \cdot, p$ にたいして V_{λ_i} の正規直交基底 $\{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \cdots, v_{k_i}^{(i)}\}$ を選んできます。主張から、この正規直交基底の合併集合

$$\bigcup_{i=1}^{p}\{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \cdots, v_{k_i}^{(i)}\}$$

が $\mathbb{C}^n$ の基底であることが従います。また、各要素は A の固有ベクトルです。なので、あとは、これが正規直交系であることを示せば証明は完了します。

直交系であることを示しましょう。つまり、$v_s^{(i)}, v_t^{(j)}$ $(v_s^{(i)} \neq v_t^{(j)}$ が任意の $i, j \in \{1, 2, \cdots, p\},\ 1 \leq s \leq k_i,\ 1 \leq t \leq k_j$ にたいして直交することを示しましょう。
$i = j$ のときは、$v_s^{(i)}, v_t^{(i)}$ は V_{λ_i} の正規直交基底の構成要素なので、直交しています。
$i \neq j$ のときは、命題 28.7 から従います。

正規であることは明らかですね。
これで証明が完了しました。 □

系 28.12. 正規行列 A がユニタリー行列である為の必要十分条件は固有値の絶対値が全て 1 であることである。

29　エルミート行列

定義 29.1. (1) n 次正方行列 A が**エルミート**とは $A^* = A$ が成り立つことをいう。

(2) n 次正方行列 A が**歪エルミート**とは $A^* = -A$ が成り立つことをいう。

補題 29.2. *(1)* エルミート行列 A の固有値 λ は実数。

(2) 歪エルミート行列 A の固有値 λ は純虚数。

Proof. (1) A をエルミート行列、v を A の固有値 λ に属する固有ベクトルとする。すると、等式 $\lambda\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$ が以下の様に導出できる：

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

固有ベクトルの定義から $v \neq 0$ なので、よって $\langle v, v\rangle \neq 0$ である。ゆえに、上の等式から $\lambda = \overline{\lambda}$ が導出できる。
よって、エルミート行列 A の固有値 λ は実数であると結論をえる。

(2) は同じようにできるので省略。やってみよう。 □

エルミート行列、歪エルミート行列が正規行列であることはすぐわかります。
なので、エルミート行列は固有値がすべて実数の正規行列である、といえるんですが、じつは逆も成り立つんですね。

系 29.3. *(1)* 正規行列 A がエルミート行列である為の必要十分条件は固有値が全て実数であることである。

(2) 正規行列 A が歪エルミート行列である為の必要十分条件は固有値が全て純虚数であることである。

Proof. (1) 必要条件であることは既に示している。
十分条件であることを示す。つまり、「固有値がすべて実数である正規行列はエルミート行列である」ことを示す。

A を固有値がすべて実数の正規行列とします。ユニタリー行列で対角化してやると、対角成分がすべて実数である対角行列 D が得られますね。
つまり、対角行列 D で対角成分がすべて実数なものと、ユニタリー行列 U がそんざいして、

$$A = UDU^*$$

をみたします。
鍵は等式 $D^* = D$ が成り立つということです。（つまり、対角成分がすべて実数である対角行列 D はエルミートなんですね）。
あとは、以下の様に式変形することで A のエルミート性 $A^* = A$ が確認できます：

$$A^* = (UDU^*)^* = U^{**}D^*U^* = UDU^* = A.$$

(2) も同様なので省略。やってみよう。 □

30 実対称行列の直交行列による対角化

この節では $K = \mathbb{R}$ とします。

定義 30.1. n 次（実）正方行列 A が**直交行列により対角化可能**とは直交行列行列 T と（実）対角行列 D が存在して次を満たすことと定める：

$${}^tTAT = D.$$

定理 30.2. n 次実正方行列に対して次は同値：

(1) A は実対称行列である。

(2) A は直交行列で対角化可能である。

(3) A は固有値が全て実数である実正規行列。

Proof. (2)$\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) は簡単に確認できます。

(1)$\Rightarrow$ (2) の証明の筋道は二通り考えられます。

(I) 一つは「正規行列がユニタリー行列により対角化可能である」という定理の証明をなぞることです。

実対称行列 A はエルミート行列なので固有値は全て実数です。問題の行列 A の成分は全て実数なので固有ベクトルも固有空間も実数の中でとることができて、正規行列にたいする定理の証明がそのまま実数のなかで機能します。

(II) 二つ目の証明方法は実対称行列 A を複素数 $\mathbb{C}$ 上で考えてユニタリー行列により対角化してから、各固有空間 V_λ に実数ベクトルから構成される基底が存在することを示す、というものです。

固有空間は核として得られるのでした：$V_\lambda = \ker(\lambda E_n - A)$. なので基底を求めるには $\lambda E_n - A$ を行基本変形すればいいのですが、これは実行列なので得られる被約階段行列もそして核の基底も実数のなかでとることが出来るのです。

詳細は確かめてみてください。

$\square$

30.1 例と応用

例 30.3. 以下で与えられる対称行列 A の直交行列による対角化を考えましょう：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Step 1. 固有多項式を計算して固有値を求める：

$$F_A(t) = \det(tE_3 - A) = \cdots = (t-1)^2(t-4)$$

固有値は $\lambda = 1, 4$. （今回は不要だけれど念のために述べておくと) 重複度は順に $2, 1$ ですね。

Step 2. 固有空間の基底を求める：

- $\lambda = 1$ の場合：

$$1E_3 - A \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって、固有空間 V_1 の基底としては

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

が得らべる。

- $\lambda = 4$ の場合：

$$4E_3 - A \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって、固有空間 V_4 の基底としては

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得らべる。

Step 3. 固有空間ごとに上で得られた基底を正規直交化する。

- $\lambda = 1$ の場合：

$$u_1 := v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$w_1 = \frac{1}{||u_1||} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{||u_2||} u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 4$ の場合：

$$u_3 := v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{1}{||u_3||} u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Step 4. 上で得られた正規直交基底を並べて正規直交基底をつくり、A を対角化する：

3 次正方行列 T を以下で定める：

$$T = (w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

すると、この行列 T は直交行列であり

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

30.1.1　二次形式の標準形

例 30.4. 突然ですが、次の関数を考えましょう：

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

ここでは $x \in \mathbb{R}^3$ の座標を x_1, x_2, x_3 であらわしています：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

この関数をこのまま見てたのでは良く分からないけれど、じつは、座標変換で簡単な形に直せることがわかります：

$$f(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \xrightarrow{\text{座標変換}} g(y) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

こういうことは高校のときも二次曲線を扱うときにやってましたね。じつは、これも対角化なんです

上の例から A, T, D をとってきます。つまり、以下で行列 A, T, D を定めます：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

すると、対角化の結果から次が成り立ちますね：

$${}^tTAT = D.$$

ポイントは関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は A をつかって以下の様に与えられるということです：

$$f(x) = {}^txAx.$$

直交行列 T による座標変換 $\Phi := T_T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ y \mapsto Ty$ を考えましょう。合成関数 $g := f \circ \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が上で示したものであることが、対角化の結果から従います：

$$g(y) = f(Ty) = {}^t(Ty)A(Ty) = ({}^ty)({}^tTAT)y = {}^tyDy = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

30.2　二次形式の標準形

この例で示したことは一般的には次の様にまとめられますね：

定理 30.5. 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が次の形をしているとする：

$$f(x) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

すると、ある直交行列 T による座標変換 $\Phi = T_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ によって f はつぎの形に直せる：

$$g(y) = \sum_{1 \le i \le n} b_i y_i^2.$$

31　実正規行列の標準形

実数でない固有値をもつ場合には実正規行列を実数の範囲内で対角化することは出来ませんが、ある程度いい形には直せます。

31.1　実正方行列と複素固有値

補題 31.1. n 次元実ベクトル $x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$ に対して n 次複素ベクトル $u, v \in \mathbb{C}^n$ を

$$u = x + iy,\ v = z + iw$$

で定める。次が成り立つ：

(1) $\overline{\langle u, v\rangle} = \langle \overline{u}, \overline{v}\rangle$. 特に $u \perp v \Leftrightarrow \overline{u} \perp \overline{v}$.

(2) $\langle u, v\rangle = (\langle x, z\rangle + \langle y, w\rangle) + i(\langle y, z\rangle - \langle x, w\rangle)$.

(3) $\langle u, \overline{u}\rangle = (||x||^2 - ||y||^2) + 2i\langle x, y\rangle$.

(4) $||u||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

(5) 「$u \perp \overline{u}$」$\Leftrightarrow$「$x \perp y$ *and* $||x|| = ||y||$」$\Leftrightarrow$「$x \perp y$ *and* $||x|| = \frac{1}{\sqrt{2}}||u||.$」

先ずは正規とは限らない実正方行列 A について考えましょう。

補題 31.2. 実 n 次正方行列 A にたいして次が成り立つ：

(1) 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値であるための必要十分条件は複素共役 $\overline{\lambda}$ が A の固有値であること。

(2) $u \in \mathbb{C}^n$ が固有値 λ に属する固有ベクトルならば、$\overline{u} \in \mathbb{C}^n$ は固有値 $\overline{\lambda}$ に属する固有ベクトルである。

31.2　実正規行列の標準形

補題 31.3. A を実正規行列、$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を A の固有値、$u_1, u_2, \ldots, u_m$ を固有空間 V_λ の正規直交基底とする。

このとき、$\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}$ は固有値 $\overline{\lambda}$ に属する固有空間 $V_{\overline{\lambda}}$ の正規直交基底である。

さらに、次のようにベクトル $x_1, \ldots, x_m, y_1, \cdots, y_m$ を定義する：

$$x_i = \sqrt{2}\Re u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_i + \overline{u_i}),\ y_i = \sqrt{2}\Im u_i = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_i - \overline{u_i}).$$

すると $x_1, \ldots, x_m, y_1, \cdots, y_m$ は実ベクトルであり、直和空間 $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$ の正規直交基底である。

うえで構成したベクトル $x_1, \ldots, y_m$ は A の固有ベクトルではありませんが Ax_a, Ay_a を計算することはできます。まず $\lambda = \alpha - i\beta,\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とおきます。（**注意**：虚部のマイナス倍を β とおいています。）すると、次が成り立ちます：

$$Ax_a = \alpha x_a + \beta y_a,\quad Ay_a = -\beta x_a + \alpha y_a.$$

別の書き方をすると次の様になりますね：

$$(Ax_a, Ay_a) = (x_a, y_a)\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

これで実正規行列の標準形が求められます。

命題 31.4. 実正規行列 A に対して直交行列 T が存在して $T^{-1}AT$ は次の形をしている：
$T^{-1}AT$ は実数 λ と実 2 次正方行列 $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ が対角に並んだ行列である。

31.2.1 2 次実正規行列

A を 2 次の実正規行列とします。固有値は次の 2 パターンに分かれます。

1. 二つの実固有値 λ_1, λ_2 をもつ。ただし $\lambda_1 = \lambda_2$ かもしれない。
2. 実数でない固有値 $\lambda, \overline{\lambda}$ をもつ。固有値の重複度はそれぞれ 1 であることに注意しておきましょう。

パターン 1 の場合は A は直交行列で対角化出来ます。
パターン 2 の場合を考えましょう。固有空間 V_λ の次元は 1 ですね。この正規直交基底 u とおきます。そして $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \overline{u}), y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u - \overline{u})$ とおくと $x, y \in \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底です。なので 2 次正方行列 $T = (x, y)$ は直交行列であり、次が成り立ちます：

$${}^tTAT = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

ただし $\lambda = \alpha - \beta i.$

31.2.2 3 次実正規行列

A を 3 次の実正規行列とします。固有値は次の 2 パターンに分かれます。

1. 三つの実固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ。ただし重複があるかもしれない。
2. 一つの実固有値 μ と実数でない固有値 $\lambda, \overline{\lambda}$ をもつ。固有値の重複度はそれぞれ 1 であることに注意しておきましょう。

パターン 1．の場合は A は直交行列で対角化出来ます。
パターン 2．の場合を考えましょう。先ず実固有値 μ の固有空間 V_μ は 1 次元で、実ベクトルである正規直交基底 v をもちます。固有空間 V_λ の次元は 1 ですね。この正規直交基底 u とおきます。そして $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \overline{u}), y = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u - \overline{u})$ とおくと $v, x, y \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底です。なので 3 次正方行列 $T = (v, x, y)$ は直交行列であり、次が成り立ちます：

$${}^tTAT = \begin{pmatrix}\mu & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

ただし $\lambda = \alpha - \beta i.$

32　対角化する行列の行列式を調整する。

　はじめ対角化というものを考えたときには正則行列全般での対角化を考えていました。最近はユニタリー行列による対角化もやって、さらに実数の場合は直交行列による対角化を考えていました。簡単な考察で、さらに行列式がいじれることがわかります。

32.0.1　正則行列による対角化（いわゆるフツーの対角化）

命題 32.1. n 次正方行列 A が対角化可能ならば行列式 $\det P = 1$ をみたす正則行列により対角化可能である。

Proof. A を対角化する正則行列を $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とします。つまり、Q は各 q_i が A の固有ベクトルである正則行列です。固有ベクトルの定数倍は固有ベクトルなので、行列式 $d := \det Q$ とおき、$P = (d^{-1}q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とすると、これは列ベクトルが A の固有ベクトルである正則行列で $\det P = d^{-1} \det Q = 1$ をみたす。 □

32.0.2　ユニタリー行列、直交行列による対角化

　行列式が 1 のユニタリー行列を特殊ユニタリー行列と呼ぶのでした。行列式が 1 の直交行列を特殊直交行列と呼ぶのでした。

　次の二つの命題は上とほぼ同様に証明できます。

命題 32.2. n 次正規行列 A は特殊ユニタリー行列により対角化可能である。

　ポイントはユニタリー行列の行列式の絶対値は 1 であることです。

命題 32.3. n 次実対称行列 A は特殊直交行列により対角化可能である。

　ポイントは直交行列の行列式は ± 1 であることです。

32.0.3　実正規行列の標準形

　実正規行列を標準形になおすのも特殊直交行列で事足ります。

命題 32.4. n 次実正規行列 A は特殊直交行列により標準形に直せる。つまり、特殊直交行列 T が存在して $T^{-1}AT$ は対角に実固有値 λ か次の形の 2 次実行列が並んでいる：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

α, β は $\alpha - \beta i$ が A の複素固有値である。

Proof. A が実固有値を持つ場合はそれに属する固有ベクトル v をマイナス倍 $-v$ でおきかえればよい。

　A が実固有値を持たない場合。$\mu = \alpha - \beta i$ を A の固有値とすると、実ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ が存在して下の左側の等式を満たす。このとき $x' := -x$ とおくと右側が成り立つ。

$$(Ax, Ay) = (x, y) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (Ax', Ay) = (x', y) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

複素共役 $\overline{\mu} = \alpha - i(-\beta)$ も A の固有値なので、x の代わりに x' を考えて標準化すればよい。 □

33 直交行列の標準形

直交行列とは実ユニタリー行列のことでした。

定義 33.1 (直交行列（再録）)**.** 実数係数 n 次正方行列 A が**直交行列**とは正則かつ $A^{-1} = {}^tA$ が成り立つことをいう。$\det A = 1$ を満たす直交行列を**特殊直交行列**と呼ぶ。

また、以前やったことですが、

補題 33.2. n 次正方行列 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して次は同値：

(1) A は直交行列。

(2) 写像 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は二点間の距離を保つ。

(3) 列ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。

33.1 （特殊）直交行列の標準形

直交行列は実正規行列なのでその標準形は先のことから計算できます。大事になってくるのはユニタリー行列の固有値 λ の絶対値は 1 になるということです。

直交行列 A の特殊直交行列 T による座標変換 ${}^tTAT$ を考えたときの標準形には次のものが対角成分に出てきます：

$$1,\ -1,\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ (\theta \text{は} \pi \text{の整数倍ではない。}).$$

最初の二つは固有値 λ が実数である場合です。λ は長さが 1 の実数なので $\lambda = \pm 1$ となるわけです。長さが 1 の実数ではない複素数 λ は $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta,\ \ (\theta \notin \pi\mathbb{Z})$ という形をしているので、最後の 2 次正方行列がでてきます。

表示を簡単にするためにもう少しだけ頭を使います。行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は次を満たします：

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

なので固有値に 1 または -1 が二つ出てきている場合はまとめることで $R(\theta)$ の形に表せるわけです。

（特殊）直交行列の標準形をまとめておきましょう。次数の偶奇によって形が違います。

命題 33.3. *(1)* 特殊直交行列の標準形：

- *(a)* $n = 2m$ 次特殊直交行列 A の特殊直交行列 T による座標変換 ${}^tTAT$ を考えたときの標準形といというのは、$R(\theta)$ が m 個対角成分にならんだ行列である。
- *(b)* $n = 2m - 1$ 次特殊直交行列 A の特殊直交行列 T による座標変換 ${}^tTAT$ を考えたときの標準形といというのは、1 が一つと $R(\theta)$ が $m - 1$ 個対角成分にならんだ行列である。

(2) 行列式 -1 の直交行列の標準形：

(a) $n = 2m$ 次直交行列 A, $\det A = -1$ の特殊直交行列 T による座標変換 ${}^tTAT$ を考えたときの標準形といというのは、$R(\theta)$ が $m-1$ 個としたのものが対角成分にならんだ行列である：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $n = 2m-1$ 次直交行列 A, $\det A = -1$ の特殊直交行列 T による座標変換 ${}^tTAT$ を考えたときの標準形といというのは、-1 が一つと $R(\theta)$ が $m-1$ 個対角成分にならんだ行列である。

行列 $R(\theta)$ は平面 $\mathbb{R}^2$ の回転を表していたので、上の命題から特殊直交行列 A を掛けるというのは直交している平面で $\mathbb{R}^n$ を直和分解して書く平面を回転させる変換です。

$\det A = -1$ の場合は -1 倍が入っています。これは回転させてる空間に直交してる空間への -1 倍なので、適当な意味で対称移動と分かります。

直交行列の掛け算は幾何学的に重要なことを次の節でみましょう。

33.2 実数空間 $\mathbb{R}^n$ の等距離変換

直交行列 A の掛け算 $T_A(x) := Ax$ も二点間の距離を変えないのでした。また、ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ を足してやるという操作 $x \mapsto x + v$ は $\mathbb{R}^n$ の平行移動ですが、これは任意の二点間の距離を変えません。

任意の二点間の距離をまたったく変えないような写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ はこの二つの合成であることが分かります。

補題 33.4.

1. n 次元実数空間の写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が二点間の距離を保つとする。すると、直交行列 A とベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ が存在して次を満たす：

$$f(x) = T_A(x) + v \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. n 次元実数空間の写像 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が二点間の距離を保ち原点を原点に移すとする。すると、直交行列 A が存在して次を満たす：

$$g(x) = T_A(x) \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

1 の証明は $v := f(0), g(x) := f(x) - v$ と置くことで 2 に帰着されます。 2 の証明は以前紹介しました。

直交行列を掛けるという操作は回転と対称移動の合成だったので、次が分かります。

系 33.5. n 次元実数空間の二点間の距離を保つ写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、まず回転と対称移動を施してから、平行移動をして得られる。

33.3 2 次直交行列

n 次直交行列 A は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を並べることで得られました。これを使って 2 次直交行列を求めましょう。

2 次直交行列なら $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を並べることで得られるのですが、これは簡単に実行できます。結果としては 2 次直交行列は以下の形をしてることが分かります：

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

回転を表す行列 $R(\theta)$ は標準形になっています。対称変換を表す行列 $S(\theta)$ は標準形ではありません、しかし、以前説明した通り図形的に考えるとこの行列の固有値が $1, -1$ なことは納得できます[10]。

行列式を計算しましょう：

$$\det R(\theta) = 1,\ \det S(\theta) = -1.$$

$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を並べたものという観点からは $R(\theta)$ は標準的な基底 (e_1, e_2) を連続的に動かして得られる正規直交基底全体です。標準的な基底 (e_1, e_2) を角度 θ 回転させれば $R(\theta)$（に対応する正規直交基底）が得られますね。一方で $S(\theta)$（に対応する正規直交基底）を (e_1, e_2) から連続的な変換で得ることは不可能です。

このことから次が分かります：

$$\{\text{特殊直交行列}\} = \{\text{標準的な基底}\ (e_1, e_2)\ \text{を連続的に動かして得られる正規直交基底}\}.$$

33.4 3 次直交行列

3 次の場合の標準形をまとめておきます。

命題 33.6. 3 次直交行列 A に対してある 3 次特殊直交行列 $T = (u_1, u_2, u_3)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して次を満たす：

1. 特殊直交行列（$\det A = 1$）の場合

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} T^{-1}$$

この時、A を掛けることは直線 $\langle u_1 \rangle$ を軸とした角度 θ の回転である。

2. $\det A = -1$ の場合

$$A = T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} T^{-1}$$

この時、A を掛けることは直線 $\langle u_1 \rangle$ を軸とした角度 θ の回転をしてからそれと直交する平面 $\langle u_2, u_3 \rangle$ で対称移動したものである。

直交行列 A の標準形を求めるのに別の直交行列 T を持ちだしてるのでなんだか不徹底な気もしますが、兎も角、お蔭で写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ がどんなものであるのかを知ることができます。

[10] 対称変換の軸が固有値 1 に属する固有空間です。それは対称変換により軸上の点は動かされないということの言い換えです。固有値 -1 に属する固有空間は対称変換の軸と直交する原点を通る直線です。

33.4.1

直交行列 T の列ベクトル $T=(u_1,u_2,u_3)$ を考えましょう。先ずパターン 1 の場合に写像 T_A を調べましょう。すると u_1 は A の固有値 1 に属する固有ベクトルです。

図形的に考えるには u_1 の張る直線 $\ell=\langle u_1\rangle$ を導入すると見易くなります。

写像 T_A は直線 ℓ には 1 倍で作用します。平たく言えば、写像 T_A は ℓ の点を動かしません。ベクトル u_2,u_3 は T_A の固有ベクトルではありませんが、平面 $H=\langle u_2,u_3\rangle$ は写像 T_A で保たれます。行列表示から T_A は角度 θ の回転として H に作用すると分かりますね[11] u_1,u_2,u_3 は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底だったので直線 ℓ と平面 H は互いの直交補空間になっています。今までの考察をまとめるとパターン 1 のとき写像 T_A は直線 ℓ を軸とした角度 θ の回転であるとわかります。

パターン 2 はパターン 1 から一つ目の固有値が -1 になってるだけなので、写像 T_A は直線 ℓ を軸とした角度 θ の回転したあとで平面 H に関して対称変換を引き起こすことがわかります。

以上のことから次が分かります。

命題 33.7. 実 3 次元空間の写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ で二点間の距離を保つものは次のどちらかである：

1. ある直線 ℓ を軸とした角度 θ の回転してから平行移動する。
2. ある直線 ℓ を軸とした角度 θ の回転したあとで軸と直交する平面 $H=\ell^{\perp}$ に関して対称変換を施して、平行移動する。

33.4.2 二つの回転を施す順番

3 次特殊直交行列 A,B とそれぞれを標準化する特殊直交行列 $S=(u_1,u_2,u_3),T=(v_1,v_2,v_3)$ を考えましょう。A を掛けることは 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に直線 $\ell_A=\langle u_1\rangle$ を軸とした角度 θ_A の回転を引き起こし、B だと直線 $\ell_B=\langle u_1\rangle$ を軸とした角度 θ_B の回転を引き起こすとしましょう。二つの行列の積 AB を掛けるというのは、先ず B の回転を施し、次に A の回転を施すということです。もちろん、逆順の積 BA を掛けるというのは逆順の操作、つまり、先ず A の回転を施し、次に B の回転を施すことになります。

では、これらの操作が一致するのはどんなときでしょうか？A の回転と B の回転のどちらを先にして残りを後にしても同じ結果が得られるのはどんなときでしょうか？これは図形的な問題であり、図形的な方法で解けるでしょうが、行列の問題とおもうと簡単に解けます。

行列の言葉でいえば問題は $AB=BA$ が成り立つ条件を探すということですね。

命題 33.8. 上の状況で $AB=BA$ が成り立つための必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである：

1. $A=E_3$ または $B=E_3$.（これはどちらかが実は何もしない操作である場合です。）
2. $\ell_A=\ell_B$.（これは回転の軸が一致している場合です。）

---

[11] 平面 H に順序付き基底 (u_2,u_3) を使って座標を入れましょう。ベクトル $v\in H$ の座標を $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ としましょう。つまり、$v=xu_2+yu_3$ を満たす様に x,y を定めます。

すると Av の座標は $R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と計算できます。

3. ℓ_A と ℓ_B は互いに直交し $\theta_A = \pi, \theta_B = \pi$.（これのモデルケースは A が x 軸による π の回転、B が y 軸による π の回転の場合です。このときは AB, BA ともに z 軸による π の回転となり一致します。一般の場合も特殊直交行列でこの場合に帰着します。）

条件 $A \neq E_3$ と $\theta_A \neq \pi$ の使い方を解説します。

条件 $A \neq E_3$ の下では A の固有値は 1 に属する固有空間 V_1 が回転の軸 ℓ_A に他ならない：$\ell_A = V_1$. 特に V_1 は 1 次元であり、A の固有値 1 に属する固有ベクトルは u_1 の定数倍である。

条件 $A \neq E_3, \theta_A \neq \pi$ の下では A の実固有値は 1 しかありません。なので、実ベクトル $w \in \mathbb{R}^3$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が $Aw = \lambda w$ を満たせば、$\lambda = 1$ であり、かつ $w \in \ell_A$ です。

Proof. 1.2.3 のいずれかが成り立てば $AB = BA$ であることは簡単に示せます。図形的に考えても明らかです。

必要条件であることを示しましょう。$AB = BA$が成り立とします。以下では常に $A \neq E_3, B =\neq E_3$ を仮定します。

u_1 は A の固有値 1 に属する固有ベクトルでした。なので $ABu_1 = BAu_1 = Bu_1$ が成り立ちます。この式をみると Bu_1 も A の固有値 1 に属する固有ベクトルと分かります。証明の前の解説から、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $Bu_1 = \lambda u_1$ が成り立ちます。つまり u_1 は B の固有ベクトルでもあると分かりました。なので $\lambda = \pm 1$ の可能性があり、ただし $\lambda = -1$ がありえるのは $\theta_B = \pi$ の場合のみです。

先ず $\lambda = 1$ であるとしましょう。このとき $u_1 \in \ell_B$ ですから、このとき回転の軸 ℓ_A, ℓ_B は一致してしまいます。これは 2 が起こることをいっています。

ここまでで、$\theta_B \neq \pi$ ならば $\ell_A = \ell_B$ が示せています。仮定は A, B に対して対称的なので、$\theta_A \neq \pi$ ならば $\ell_A = \ell_B$ も示されています。対偶をとることで、$\ell_A \neq \ell_B$ ならば $\theta_A = \pi, \theta_B = \pi$ であることが示されます。

さて $\lambda = -1$ の場合を考えましょう。このとき $\ell_A \neq \ell_B$ なので $\theta_A = \pi, \theta_B = \pi$ です。u_1 は B の固有値 -1 に属する固有値なので固有値 1 に属する固有空間 ℓ_B と直交しています。よって直線 $\ell_A = \langle u_1 \rangle$ と ℓ_B は直交します。 □

33.5 特殊直交行列になる正規直交基底。$\mathbb{R}^n$ の “向き”

33.5.1 なぜ特殊直交行列による座標変換を考えたのか？

特殊直交行列 $A = (u_1, \cdots, u_n)$ を構成している順序付き正規直交基底 $(u_1, \cdots, u_n)$ の幾何学的な意味は次の命題で与えられます。特殊直交行列による座標変換を考えるのが自然であると納得していただけるでしょう。

命題 33.9. n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ の順序付き正規直交基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ に対して次は同値：

1. 対応する行列 $A = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ は特殊直交行列。

2. 順序付き正規直交基底であることを保ったまま標準的な正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ から連続的に変形できる。

Proof. $1 \Rightarrow 2$. 行列 $R(\theta)$ は平面 $\mathbb{R}^2$ の回転を表していたので、上の命題から特殊直交行列 A というのは回転の組合せだと分かります。

平面の回転は角度を小さくしていく平面の恒等変換になる、つまり $\lim_{\theta \to 0} R(\theta) = E_2$ が成り立ちますね。このことから特殊直交行列 A というのは直交行列のなかで連続的に単位行列 E_n に変形する

ことができます。正規直交基底という観点からはこのことは次の様に言い換えられます。順序付き正規直交基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ で特殊直交行列の列ベクトルになっているものは、順序付き正規直交基底であることを保ったまま標準的な正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ に連続的に変形できる。

$2 \Rightarrow 1$. 順序付き正規直交基底であることを保ったまま標準的な正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ に連続的に変形できる順序付き正規直交基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は特殊直交行列の列ベクトルになっていることも分かります。証明の鍵は三つあって、行列式 $\det A$ は n 次正方行列全体の上の連続関数[12]であること、一直交行列の上では ± 1 という値しかとらないこと、三つ目は $\det E_n = 1$ です。正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ に正規直交基底であることを保ったまま連続的に変形して得られる順序付き正規直交基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ に対応する行列 A を考えます。すると $\det A$ は $\det E_n = 1$ から連続的に変化してたどり着けるのですが、途中が全て正規直交基底という仮定から途中の行列式の値は全て ± 1 でなくてはなりません。しかし、1 からその中間の値をすっ飛ばして -1 に変化するのは連続的ではないので、対応する行列式の値 $\det A$ は常に 1 であり続けるしかない訳です。 □

33.5.2 n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ の "向き"

一変数関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 上の積分では密かに区間に向き "$a < b$" を考えていました。下端を $x = b$、上端を $x = a$ として積分する場合は区間を逆向きに積分してるとおもってマイナスを付けるのでした。二変数関数 $f(x, y)$ の積分でも平面領域に密かに向きを定めていて、逆向きの積分を考える際にはマイナスをつけることになります。区間や平面領域なら "' 向き" が二種類（一次元なら前と後、二次元なら表と裏）しかないことは直感的に納得できますが、変数が多い場合、つまり、高次元の図形の上での積分を考えるとどうなるのでしょうか？もっと次元が高くなると直感が働きません[13]。しかし、実は次元が高くても $\mathbb{R}^n$ の向きは二種類しかありません。

そもそも "向き" とはなんなのでしょうか？ここでは "向き" とは「最初に固定した座標系から連続的な変化で移り変わっていける座標系全体」を一つの "向き" ということにしましょう。一次元なら「前と後」二次元なら「表と裏」の二種類しかありませんが。これは最初の座標系から連続的に変化していける座標系（「前」「表」）ではない座標系はお互いに連続的な変形で移りあえることを言っています。次元が高くなると "向き" の個数は増えてもおかしくないですが、実はそうはなりません。

命題 33.10. n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ の順序付き基底 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ に対して次は同値：

1. 対応する行列 $A = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ は $\det A > 0$ を満たす。
2. 順序付き基底であることを保ったまま標準的な正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ から連続的に変形できる。

Proof. $2 \Rightarrow 1$ を示すのは命題 33.9 と同様。$1 \Rightarrow 2$ を示しましょう。

命題 33.9 から、正則行列 A を行列式の符号を変えずに直交行列に連続的に変形できることを示せば十分です。

グラム-シュミットの正規直交化法を思い出します。まず、$u_1 := v_1$ であり、$i = 2, \ldots, n$ にたいして帰納的に

$$u_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, u_i \rangle}{||u_i||^2} u_i \tag{33-68}$$

[12] n 次正方行列全体を n^2 次元の実数空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ と見なすことができて、そうすると $\det A$ というのはその上の多項式関数になります。よって連続です。

[13] 少なくとも僕には。

と定めれば直交基底 $\{u_1,\ldots,u_n\}$ が得られるのでした。

各 $i=1,\cdot,j-1$ にたいして u_i は $v_1,\ldots,v_{i-1}$ の一次結合であらわせるので、その式を上の等式 33-68 に代入することで次のことが分かります：自然数 $j=2,\ldots,n$ と $i=1,\ldots,j-1$ にたいして、ある実数 b_{ij} が存在して次の式を満たす。

$$u_j = v_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij}u_i. \tag{33-69}$$

$i \geq j$ にたいして $b_{ij}=0$ と定めることで n 次正方行列 $B=(b_{ij})$ を定義します。

$$b_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & (i<j), \\ 0 & (i \geq j). \end{cases}$$

等式 (33-69) より、$A(E_n+B)=(u_1,\cdots,u_n)$ が従います。

更に n 次正方行列 $C=(c_{ij})$ を次で定めます。

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\langle u_i,u_i\rangle} - 1 & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

グラム-シュミット正規直交化法より $A(E_n+B)(E_n+C)$ は直交行列です。そこで変数 t に対して $A_t := A(E_n+tB)(E_n+tC)$ と定めることにします。すると $A_0=A$ であり $A_1=A(E_n+B)(E_n+C)$ なので、A_t は A から直交行列への連続的な変形を与えます。行列式を計算すると $\det A_t = \det A \det(E_n+tC)$ であり、$0 \leq t \leq 1$ の範囲では $\det(E_n+tC)>0$ なので、これで求めていたものが出来ました。 □

33.5.3 一点を固定された剛体の運動の配位空間

応用上では 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の標準的な基底 (e_1,e_2,e_3) の位置関係を替えないで連続的に動かして得られる正規直交基底全体を考えることが大事です。何故かというと、それは一点を固定された剛体の運動の配位空間だからです。実はそれが 3 次元特殊直交行列全体であることを説明するのがこの節の目標です。

まず、**配位空間**というのは何でしょうか？

例えば、実数直線 $\mathbb{R}$ 上で二点 P,Q が運動してる状況を思い描いてください。ゴチャゴチャしますね。けれど、この運動を考えるのは 2 次元実数空間 $\mathbb{R}^2$ 上の一点 (P,Q) の運動を考えるのと同等ですよね。このことを「実数直線 $\mathbb{R}$ 上で二点 $P.Q$ が運動してる状況の配位空間は $\mathbb{R}^2$ である。」と言い表します。

一般的な定義をいうと、ある物理系の配位空間 X というのは、物理系の各状態が X の一点に対応する空間のことです。研究したい物理状態の変化というのは配位空間 X 内の一点の運動とみなせるのです。

上の例だと、直線上の二点の運動が二次元空間の中の一点の運動とみなせました、同じように考えると「n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ 上での m 点 $P_1.P_2,\cdots,P_m$ が運動してる状況の配位空間は $\mathbb{R}^{nm}$ である。」と言えますね。

次に、**剛体**ですが、これは「構成部分の間の距離が絶対に変らない仮想的な物体」のことです（ブリタニカ国際大百科事典 小項目事典)。剛体の運動というのは、例えば、直方体 (箱、黒板消し）が形を全く変えないで動くことです。一点を固定された剛体の運動というのは、例えば、ある頂点の位

置を固定して直方体を動かすことです。もう少し、現実的な例だとコマの運動ですね、軸の接地点が変化しないコマの運動が一点を固定された剛体の運動の例です。

では、さて、「一点を固定された剛体の運動の配位空間」とはどんなものでしょうか？ある頂点の位置を固定して直方体を動かすことを考えましょう。選んだ頂点を原点として、その頂点を通る直方体の辺を x 軸、y 軸、z 軸としてみなすと、問題の運動は標準的な正規直交基底 (e_1, e_2, e_3) を連続的に動かすことと同等であると分かるでしょう。つまり、「一点を固定された剛体の運動の配位空間」というのは「標準的な正規直交基底 (e_1, e_2, e_3) を連続的に動かして得られる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底の集合」なのです。

先に示したことからこれはさらに 3 次特殊直交行列全体と一致します。

一点を固定された剛体の運動の配位空間
$= \{$ 標準的な正規直交基底 (e_1, e_2, e_3) を連続的に動かして得られる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\}$
$= \{3$ 次特殊直交行列全体 $\}$.

34　ケーリー-ハミルトンの定理

定理 34.1 (ケーリー-ハミルトンの定理)**.** n 次正方行列 A は $F_A(A) = 0$ を満たす。

例えば二次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式は $F_A(t) = t^2 - (a+d)t + \det A$ なので、定理は以下の等式を主張します：

$$A^2 - (a+d)A + (\det A)E_2 = 0.$$

Proof. $F_A(t) = \sum a_i t^i$ とおきます。

行列 $tE_n - A$ の余因子行列 $\widetilde{tE_n - A}$ を考えます。これは $n-1$ 次の正方行列の行列式を成分とする行列だったので次が分かります。ある n 次正方行列 $B_0, \cdots, B_{n-1}$ が存在してつぎをみたす：

$$\widetilde{tE_n - A} = t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + B_0.$$

一方で、余因子行列の性質より次が成り立ちます：

$$F_A(t)E_n = \det(tE_n - A)E_n = (\widetilde{tE - A})(tE - A).$$

これを展開して t^i の係数を比較して次の等式を得ます：

$$B_{n-1} = E_n,\ a_{n-1}E_n = B_{n-2} - B_{n-1}A,\ \cdots,\ a_1E_n = B_0 - B_1A,\ a_0E_n = B_0A.$$

この関係式を使って計算すれば定理が示せます：

$$\begin{aligned} F_A(A) &= \sum a_iA^i = \sum a_iE_nA^i \\ &= A^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)A^{n-1} + (B_{n-3} - B_{n-2}A)A^{n-2} + \cdots + (B_0 - B_1A)A + B_0A = 0 \end{aligned}$$

□

35　ジョルダン標準形

全ての正方行列が対角化できるわけではありませんが、ある程度はいいかたちに直せることが分かります。その時の基本単位は次の**ジョルダン細胞**と呼ばれる行列です。

$$J(\lambda;\ell)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.\ \text{例.}\ J(\lambda;1)=\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix},\ J(\lambda;2)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\ J(\lambda;3)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

n 次正方行列 A はジョルダン細胞を対角に並べたものと同値であることが分かります。

定理 35.1. *A を n 次正方行列、$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ を無駄のない固有値、$k_1,k_2,\cdots,k_p$ をそれぞれの重複度とする。このとき、ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ はジョルダン細胞 $J(\lambda_q;\ell_{q,s})$ を対角に並べたものである。ただし、$\ell_{q,s}$ は自然数で、s の動く範囲 $1\le s\le t_q$ は q ごと（つまり固有値 λ_q ごと）にきまる。そして各 q ごとに等式 $\sum_{s=1}^{t_q}\ell_{q,s}=k_q$ を満たす。*

サイズ 1 のジョルダン細胞は単なるスカラーなので、すべての $\ell_{q,s}$ が 1 の場合というのが対角行列です。

35.1　ジョルダン細胞と広義固有空間

35.1.1　ジョルダン細胞のでき方

対角化は固有ベクトルを見つけることで達成されました。ジョルダン細胞はどういうベクトルからでてくるのでしょうか？アイデアを紹介します。

スカラー $\lambda\in K$ と自然数 ℓ を固定します。ベクトル $v\in K^n$ が $(A-\lambda E_n)^\ell v=0,\ (A-\lambda E_n)^{\ell-1}\neq 0$ をみたすとしましょう。$\ell=1$ の場合この条件は v が固有値 λ に属する固有ベクトルであることに他ならないですね[14]。

この状況で次が分かります。簡単のために $v_i=(A-\lambda E_n)^{i-1}v$ とおきます。

補題 35.2. *1. ベクトルの組 $v_1,v_2,\cdots,v_\ell$ は一次独立である。*

2.

$$Av_1=\lambda v_1+v_2, Av_2=\lambda v_2+v_3,\cdots,Av_{\ell-1}=\lambda v_{\ell-1}+v_\ell, Av_\ell=\lambda v_\ell$$

2 の証明のカギとなる式変形は $A=\lambda E_n+(A-\lambda E_n)$ です。2 の式を順序付き基底の形で書くとジョルダン細胞がでてくるのです。

$$(Av_1,Av_2,\cdots,Av_\ell)=(v_1,v_2,\cdots,v_\ell)J(\lambda;\ell).$$

ジョルダン標準形のためには $(A-\lambda E_n)^\ell v=0$ を満たす v を得ることが課題になります。

[14] ベクトル $v\in K^n$ が固有値 λ に属する固有ベクトルであるというのは $v\neq 0,(A-\lambda E_n)v=0$ を満たすベクトルと定義されました。

35.1.2　広義固有空間

スカラー λ に対して**広義固有空間** $\tilde{V}_\lambda$ を以下で定める。

$$\tilde{V}_\lambda = \{v \in K^n \mid (A - \lambda E_n)^\ell v = 0 \text{ for some } \ell\}.$$

次が基本的です。

補題 35.3. スカラー λ が A の固有値である為の必要十分条件は $\tilde{V}_\lambda \neq 0$ である。この時、ある自然数 $\ell \geq 1$ が存在して $\tilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda E_n)^\ell$ を満たす。

上で観察したことことから、次が成り立つことはなんとなくわかりますね。

命題 35.4. λ が A の固有値とする。このとき広義固有空間 $\tilde{V}_\lambda$ の基底を適切に選ぶと A はジョルダン細胞 $J(\lambda; r)$ を対角に並べた形に表現される。
さらに、ジョルダン細胞のサイズの最大値 ℓ は $\tilde{V}_\lambda = \ker(A - \lambda E_n)^\ell$ を満たす最小の自然数である。ジョルダン細胞の個数 t は固有空間 $V_\lambda = \ker(A - \lambda E_n)$ の次元と一致する。

なんとなくわかるけれど、キチンと示すのはちょっと大変です。

35.2　広義固有空間による直和分解

命題 35.4 のお陰で定理 35.1 を示すには次を示せばいいことがわかります。

命題 35.5. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ を A の無駄のない固有値とする。このとき、直和分解 $K^n = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{V}_{\lambda_p}$ が成り立つ。

35.2.1　多項式に関する補題

N は自然数とします。（ホントは考察の対象にする多項式が先にあります。その場合には N は十分大きくとります。）N 次以下の多項式 $f \in P_N$ に対して、f の倍多項式のなす部分空間を Pf と書くことにします。
以前に示している命題を再録。

補題 35.6. f, g を多項式、d を f, g の最大公約多項式、m を f, g の最小公倍多項式とする。m の次数は N 以下と仮定する。このとき、次が成り立つ：

1. $Pf \cap Pg = Pm$.
2. $Pf + Pg = Pd$.

これを帰納的に用いて次が示せます。

命題 35.7. 多項式 $f_1, \cdots, f_p$ の最大公約多項式を d とするとある多項式 $g_1, \cdots, g_p$ が存在して次が成り立つ：

$$g_1 f_1 + \cdots + g_p f_p = d.$$

使いたいのは次の系です。

系 35.8. 多項式 $f_1, \cdots, f_p$ は互いに素（つまり、最大公約多項式が 1）とします。このとき、ある多項式 $g_1, \cdots, g_p$ が存在して次が成り立つ：

$$g_1 f_1 + \cdots + g_p f_p = 1 \tag{35-70}$$

35.2.2　命題 35.5 の証明

次の補題は（広義では無い）固有空間に対しては簡単でした。

補題 35.9. $i \neq j$ ならば $\tilde{V}_{\lambda_i} \cap \tilde{V}_{\lambda_j} = 0$.

Proof. $v \in \tilde{V}_{\lambda_i} \cap \tilde{V}_{\lambda_j}$ をとります。自然数 l を $(A-\lambda_i)^l v = 0, (A-\lambda_j)^l v = 0$ を満たすようにとります。二つの多項式 $f_1 := (t-\lambda_i)^l, f_2 := (t-\lambda_j)^l$ は互いに素なので、多項式 g_1, g_2 が存在して (35-70) を満たします。よって、n 次行列 $P_1 := g_1(A)f_1(A), P_2 := g_2(A)f_2(A)$ は $P_1 + P_2 = E_n$ を満たします。$P_1 v = 0, P_2 v = 0$ なので $v = E_n v = P_1 v + P_2 v = 0$ が結論されます。 □

一変数多項式 $f_1, \cdots, f_p$ を次で定めます。

$$f_i(t) = F_A(t)/(t-\lambda_i)^{k_i} = (t-\lambda_1)^{k_1} \cdots (t-\lambda_{i-1})^{k_{i-1}} (t-\lambda_{i+1})^{k_{i+1}} \cdots (t-\lambda_p)^{k_p}$$

これらは互いに素なので、上の系より多項式 $g_1, \cdots, g_p$ が存在して (35-70) を満たします。各 i に対して $g_i f_i$ に $t = A$ を代入した n 次正方行列 $P_i := g_i(A) f_i(A)$ は次を満たします。

1. $P_1 + \cdot + P_p = E_n$.
2. $P_i P_j = 0$ for $i \neq j$
3. $P_i P_i = P_i$

1 が成り立つことは明らかです。2 は $f_i f_j$ が固有多項式 F_A を因子に持つので、ケーリー-ハミルトンの定理 $F_A(A)$ から従います。3 は 1 の両辺に P_i を掛ければ得られます。次がカギになります。

補題 35.10.

$$\operatorname{Im} P_i = \tilde{V}_{\lambda_i}$$

Proof. $(A-\lambda_i)^{k_i} P_i = 0$ より包含関係 $\operatorname{Im} P_i \subset \tilde{V}_{\lambda_i}$ が従います。

反対向きの包含関係を示しましょう。$v \in \tilde{V}_{\lambda_i}$ をとります。$i \neq j$ に対して $P_j v \in \tilde{V}_{\lambda_i} \cap \tilde{V}_{\lambda_j} = 0$ より、$P_j v = 0$ に注意します。上の 1 より $v = \sum_{j=1}^{p} P_j v = P_i v$ となり、$v \in \operatorname{Im} P_i$ が分かります。 □

この補題より $v \in \tilde{V}_{\lambda_i}$ に対して $P_i v = v, P_j v = 0 \ \ (j \neq i)$ が成り立ちます。

命題の証明. 和空間 $\tilde{V}_{\lambda_1} + \cdots + \tilde{V}_{\lambda_p}$ が直和であること。各広義固有空間からベクトル $v_i \in \tilde{V}_{\lambda_i}$ をとってきます。これが $v_1 + \cdots + v_p = 0$ を満たしたとします。

何か $i = 1, \cdots, p$ を一つ決めます。P_i を上の式に掛ければ証明の前の注意より $v_i = P_i v_i = 0$ が成り立ちます。よって、全て i に対して $v_i = 0$ と結論されます。

和空間 $\tilde{V}_{\lambda_1} + \cdots + \tilde{V}_{\lambda_p}$ が全体に一致すること。$v \in \mathbb{C}$ を取って来ます。上の 1 より、$v = P_1 v + \cdots + P_p v$ となり、各 i に対して $P_i v \in \tilde{V}_{\lambda_i}$ なので、v は問題の和空間に属することが示されました。 □

35.2.3　最小多項式と対角化可能性の判定法

n 次正方行列 A にたいして $f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(t)$ を考えましょう。そういうものの中で次の 2 条件を満たすものを A の最小多項式 $f_A(t)$ と呼びます：(1)　$f(A) = 0$ を満たす多項式で一番次数が低く, (2)　最高次の係数が 1.

命題 35.11. A の無駄のない固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ とし、それぞれの重複度を $k_1, \cdots, k_p$ とおきます。さらに各 $i = 1, \cdots, p$ に対して ℓ_i を $\tilde{V}_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i E_n)^\ell$ を満たす最小の自然数とします。すると次が成り立つ：

1. $\dim \tilde{V}_{\lambda_i} = k_i$ *for* $i = 1, \cdots, p$.

2. ℓ_i は λ_i に属するジョルダン細胞のサイズの最大値。

3. $f_A(t) = (t - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (t - \lambda_p)^{\ell_p}$.

ジョルダン細胞のサイズの最大値が 1 の時が対角行列だったので、次が成り立ちます。

系 35.12. n 次正方行列 A が対角化可能である為の必要十分条件は最小多項式 $f_A(t)$ が重根を持たないことである。

最小多項式を見つけるのは難しいのですが、次の補題が助けになります。

補題 35.13. $f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(t)$ は最小多項式 $f_A(t)$ で割り切れる。

このことから、特に A が重根を持たない多項式 $f(t)$ に対して $f(A) = 0$ を満たすならば A は対角化可能であることが分かります。

例 35.14. n 次正方行列 A がある自然数 m に対して $A^m = E_n$ を満たせば対角化可能である。