ホモロジー代数入門（未完？）

源　泰幸

1　導入：環と加群のホモロジー代数

平面図形 S の面積 $|S|$、立体図形 T の体積 $|T|$ は皆さん小学生以来お馴染みですね。幾何学において重要な概念ですよね。幾何学ではない分野で面積・体積とは全く関係ないけれども "なんとなく面積・体積" っぽく振る舞う数学概念もあったりしますよね。例えば、ベクトル空間 V の次元 $\dim V$ です。和空間の次元を計算する公式[1]等を見ると面積・体積っぽい振舞いをするし、なにより次元というのはベクトル空間の大きさを測っていると思っていますよね。

位相空間 X から（コ）ホモロジー群 $\mathrm{H}(X)$ が定義されます。面積・体積の場合の様に、数多くの数学的対象にたいして定義される種々の群は、位相空間の（コ）ホモロジー群と同様（あるいは類似）の性質を持つので、それぞれの（コ）ホモロジー群と呼ばれます。例を挙げると、Ext 群、Tor 群、Hochschild （コ）ホモロジー群、cyclic ホモロジー群 等々。これらの（コ）ホモロジー群はそれぞれの数学的対象の研究に応用されています。あるいは、それぞれの（コ）ホモロジー群の性質自体が研究対象となっています。さらには、面積・体積に対するルベーグ積分論の様に、（コ）ホモロジー群の背後にある数学的構造も研究対象となっています。ホモロジー代数というのはこういった研究の総称です[2]。

1.1

この講義では主に環と加群のホモロジー代数をあつかいます。圏論を知っていれば、一般の圏やアーベル圏での議論に翻訳できる内容は多くあります。ただ、この講義では時間の都合もあり、圏論的な話題に注意することはあっても、きちんと圏論を説明しません。なので進んだ数学を勉強したいかたは圏論を自習することをお勧めします。

1.2

1.3　取り決め

未定義な用語は後々定義される（筈）。

- 環といえば単位元をもつ可換とは限らない環を意味する。（0 環（$1 = 0$ となる環）も排除しないでやりたいが、どこかで暗黙、環は 0 環でないと仮定するかも。）
- 環 R にたいし左 R 加群を単に R 加群と呼ぶ。右 R 加群は反対環 R^{op} 上の左加群と同一視する。
- $\mathbf{k}$ 代数 R 上の両側 R-R 加群は暗黙に $\mathbf{k}$ 中心的であることを課し、包絡代数 $R^{\mathrm{e}} := R \otimes_{\mathbf{k}} R^{\mathrm{op}}$ 上の加群と同一視する。

---

[1] $\dim(U+V) = \dim V + \dim U - \dim(U \cap V)$

[2] "代数" という言葉は色々な意味で用いられますが、ホモロジー代数というときの "代数" は線形代数というのときの "代数" と同じようなものだと個人的には感じています。

- 定義を補完することは演習問題とする。例えば、定義において写像 $\cdots\cdots$ が与えられて「R 加群準同型 $\cdots\cdots$ を定義する」とか書かれている場合、与えられている写像が R 準同型であることは演習問題とする。

2　環と加群

2.1　環と加群

2.1.1　環

環の定義を復習しておきましょう。

定義 2.1. 環 $(R, +, \times)$ とは集合 R と写像 $+, \times : R \times R \to R$ の三つ組で以下の公理を満たすものと定める：

(I) 二つ組 $(R, +)$ は可換群である。

(I-1) (和の結合法則)

$$r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3 \text{ for } \forall r_1, r_2, r_3 \in R.$$

(I-2) (ゼロ元の存在)

$$\exists 0 \in R \text{ s.t. } 0 + r = r, r + 0 = r \text{ for } \forall r \in R.$$

(I-3) (マイナス元の存在)

$$\text{For } \forall r \in R,\ \exists -r \in R \text{ s.t. } r + (-r) = 0, (-r) + r = 0.$$

(I-4) (和の可換性)

$$r + s = s + r \quad \text{for all } r, s \in R.$$

(II) 二つ組 $(R, \times)$ はモノイドである。（群の公理から「逆元の存在」を除いた公理を満たすものをモノイドと呼びます）

(II-1) (積の結合法則)

$$r_1(r_2r_3) = (r_1r_2)r_3 \text{ for } \forall r_1, r_2, r_3 \in R.$$

(II-2) (単位元の存在)

$$\exists 1 \in R \text{ s.t. } 1r = r, r1 = r \text{ for } \forall r \in R.$$

(III) 分配法則

$$r(s + t) = rs + rt, (s + t)r = sr + tr \quad \text{for all } r, s, t \in R.$$

以降、環 $(R, +, \times)$ を下部集合 R の記号で代表させて R と書きます。

定義 2.2. 環 R が<u>可換</u>とは、積が可換であることをいう。

定義 2.3. 環 R の<u>部分環</u> S とは R の（空でない）部分集合であり和と積で閉じ、単位元を持つものをいう。

環 R の部分環 S は R の積と和を制限することで環になる。以降、部分環にはこの環構造を与える。

定義 2.4. 環 R の<u>中心</u> $Z(R)$ とは以下で定義される R の部分環のことをいう：

$$Z(R) := \{r \in R \mid \forall s \in R, sr = rs\}.$$

- 中心 $Z(R)$ は可換環である。

- 中心は R の部分環で可換なものの中で極大なもの、という訳では無い。(下の例で確かめよう。)

例 2.5. S を環とする。n を正整数とする。n 次行列環 $R := M_n(S)$ の中心 $Z(R)$ は以下で与えらえる:

$$Z(R) = \{sE_n \mid s \in Z(S)\}$$

ただし E_n は n 次単位行列である。よって、特に $Z(R)$ は S の中心 $Z(S)$ と同型な環である。
(注:これは森田理論からも従うことである。)

定義 2.6. 環 $R = (R, +, \times)$ の<u>**反対環 (opposite ring)**</u>$R^{\mathrm{op}} = (R, +, \times^{\mathrm{op}})$ とは、環 R と同じ下部集合と和をもち、積が

$$r \times^{\mathrm{op}} s := s \times r \qquad \text{for all } r, s \in R$$

と定義されたものをいう。

2.2 イデアル

環のイデアルを復習しましょう。可換環の場合と異なり右イデアル、左イデアル、(両側)イデアルがあります。

定義 2.7. • (両側)環 R の<u>イデアル</u>I とは下部集合 R の部分集合 I で次を満たすものと定める:

(I) $I \neq \emptyset$.

(II) 任意の $i, j \in I$ にたいして $i + j, -i \in I$ が成り立つ。

(III) 任意の $r \in R,\ i \in I$ にたいして $ri, ir \in I$ が成り立つ。

• (右) 環 R の<u>右イデアル</u>I とは下部集合 R の部分集合 I で上の (I)(II) に加えて次の条件を満たすものをいう:

任意の $r \in R,\ i \in I$ にたいして $ir \in I$ が成り立つ。

• (左) 環 R の<u>左イデアル</u>I とは下部集合 R の部分集合 I で上の (I)(II) に加えて次の条件を満たすものをいう:

任意の $r \in R,\ i \in I$ にたいして $ri \in I$ が成り立つ。

注意 2.8. イデアルの公理の最初の二つは I が R の加法群としての部分群であることを言っている。

イデアルの和と積を導入しておきます。

定義 2.9. 環 R のイデアル I, J にたいして R の部分集合を

$$I + J := \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}, \quad IJ := \{\sum_{a,b} i_a j_b \mid i_1, \ldots, i_p \in I,\ \ j_1, \ldots, j_q \in J\}$$

と定める。これらは R のイデアルである。

要素の生成するイデアルも復習しておきます。

定義 2.10. 環 R の部分集合 $X \subset R$ にたいして、これの生成するイデアル $\langle X \rangle$ を以下で定める:

$$\langle X \rangle := \{a_1x_1b_1 + a_2x_2b_2 + \cdots + a_nx_nb_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in R\}$$

これは X を含むイデアルの中で最小のものである。
環 R の(有限個の)要素 $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$ にたいしては

$$\langle r_1, r_2, \cdots, r_n \rangle := \{a_1r_1b_1 + a_2r_2b_2 + \cdots + a_nr_nb_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in R\}$$

である。

2.2.1　剰余環

剰余環の復習をします。この講義では頻出するのでボチボチでいいので慣れていきましょう。

定義 2.11. 環 R とそのイデアル I から以下の手続きで可換環を構成する。それを環 R のイデアル I による剰余環と呼び、R/I と記す。

（下部集合）

下部集合は加法群としての商集合 R/I と定める。

要素 r に対応する R/I の要素を $[r]$ または $r+I$ とあらわす：

$$[r] := r + I := \{r + i \mid i \in I\}.$$

（加法）

$$[r] + [s] := [r + s].$$

（乗法）

$$[r][s] := [rs].$$

注意 2.12. 構成から、剰余環 R/I は加法群としては加法群としての剰余群 R/I と一致していますね。ポイントは剰余群 R/I に上の様に定義して積が定まるということです。つまり、次がなりたつというのが大切です：

要素 $r, r', s, s' \in R$ が $[r] = [r'],\ [s] = [s']$ を満たせば $[rs] = [r's']$ が成り立つ。

2.3　環の（準）同型写像

定義 2.13. R, S を環とする。

(1) （下部集合の間の）写像 $f : R \to S$ が環の準同型写像とは次が成り立つことをいう：

(I)

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) \qquad \text{for all } r_1, r_2$$

(II)

$$f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2) \qquad \text{for all } r_1, r_2$$

(III)

$$f(1) = 1$$

(2) 全単射である環準同型写像を環同型写像という。

注意 2.14. 環の準同型写像 $f : R \to S$ は下部の加法群の準同型写像 $f : (R, +) \to (S, +)$ をあたえる。なので、群準同型の一般的な補題より $f(0) = 0$ が従う。証明の鍵は逆元の存在でしたね。

可換環の準同型写像 $f : R \to S$ は下部の乗法半群の準同型写像 $f : (R, \times) \to (S, \times)$ もあたえる。しかし、乗法の可逆元の存在を仮定していないので、公理 (2) だけからは $f(1) = 1$ は導出されない。よって、単位元が単位元に写されるということは仮定する必要がある。

定義 2.15. 環の準同型写像 $f : R \to S$ の核と像を以下で定める：

$$\operatorname{Ker} f := \{r \in R \mid f(r) = 0\},$$
$$\operatorname{Im} f := \{f(r) \in S \mid r \in R\}.$$

補題 2.16. 環の準同型写像 $f : R \to S$ を考える。$S \neq 0$ とする。

(1) 核 $\operatorname{Ker} f$ は R の真のイデアルである。

(2) 像 $\operatorname{Im} f$ は S の部分環である。
（注意：$\operatorname{Im} f$ は S のイデアルとは限らない。）

次の系は体論で当たり前に使います。覚えておいてください。

系 2.17. 体 K から（ゼロでない）環 R への準同型写像 $f : K \to R$ は単射である。

Proof. 核 $\operatorname{Ker} f$ は K の真のイデアルである。体の真のイデアルは 0 イデアルのみなので $\operatorname{Ker} f = 0$ を結論する。 □

補題 2.18. 環 R とイデアル I を考える。商写像 $\pi : R \to R/I$ は環の全射準同型であり、$\operatorname{Ker} \pi = I$ がなりたつ。

定理 2.19 (環の準同型定理)**.** 環の準同型写像 $f : R \to S$ を考える。
下の要素の対応は（キチンと写像になり、そしてしかも）環の同型写像である：

$$\overline{f} : R/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f, \quad \overline{f}([r]) = f(r).$$

2.4 k 代数

定義 2.20. $\mathbf{k}$ を可換環とする。

(1) $\mathbf{k}$ 代数 $R = (R, i)$ とは、環 R と環準同型写像 $i : \mathbf{k} \to R$ で像が中心に含まれているものの組をいう。

- $\mathbf{k}$ 代数構造 $i : \mathbf{k}R$ は単射とは限らないが i を省略して $a \in \mathbf{k}$ を R の要素の様に書くことがおおい。

$$ar := i(a)r.$$

ただし $a \in \mathbf{k},\ r \in R.$

(2) $R = (R, i),\ S = (S, j)$ を $\mathbf{k}$ 代数とする。下部集合の間の写像 $f : R \to S$ が $\mathbf{k}$ 代数準同型写像とは、f は環準同型写像であり、$j = f \circ i$ がなりたつことをいう。
つまり、環準同型写像に次が成り立つことを条件として課している：

$$f(ar) = af(r)$$

ただし、$a \in \mathbf{k},\ r \in R$ であり、上の略記法に従い i, j を省略している。

(3) $\mathbf{k}$ 代数 R の部分 $\mathbf{k}$ 代数 S とは環 R の部分環で $i(\mathbf{k}) \subset S$ が成り立つものをいう。
自然に S を $\mathbf{k}$ 代数とみなせる（のでそうする）。

2.5 （左、右、両側）R 加群

体 K 上のベクトル空間 V とは K の作用をもつアーベル群のことでした。環 R の作用をもつアーベル群のことです。なので、R 加群の公理はベクトル空間の公理そのままです。

2.5.1 R 加群

定義 2.21. 左 R 加群 $M = (M, +, \cdot)$ とは、

- 集合 M.
- 写像 $+ : M \times M \to M$
- 写像 $\cdot : R \times M \to M$

の三つ組で次の条件を満たすものである：

(1) $(M, +)$ は加法群。

(2) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$ for all $r \in R$ and $m, n \in M$.

(3) $1_R \cdot m = m$ for all $m \in M$.

(4) $(sr) \cdot m = s \cdot (r \cdot m)$ for all $s, r \in R$ and $m \in M$.

(5) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$ for all $r, s \in R$ and $m \in M$.

左 R 加群のことを環 R 上の左加群と呼んだりする。
同様に右 R 加群、両側 R 加群も定義されます。

以降、この講義では左 R 加群と単に R 加群とか加群とか呼びます。

例 2.22. 体 K 上の加群とは K ベクトル空間に他なりません。

例 2.23. 整数環 $\mathbb{Z}$ を考えましょう。実は $\mathbb{Z}$ 加群とはアーベル群に他ならないことが分かります。$\mathbb{Z}$ 加群 $M = (M, +, \cdot)$ というのはアーベル群 $M = (M, +)$ にさらに $\mathbb{Z}$ の作用 $\cdot : \mathbb{Z} \times M \to M$ を付加したものなので、一見すると別のものです。しかし、公理をみたす $\mathbb{Z}$ の作用はアーベル群の構造から一意的に定まることがわかります。例えば $2 \cdot m$ は公理 (3)(5) を用いて次の様に計算できますね：

$$2 \cdot m = (1 + 1) \cdot m = 1 \cdot m + 1 \cdot m = m + m = 2m$$

最右辺は群論を勉強したときの記法です。同様に考えると、$\mathbb{Z}$ 加群 $M = (M, +, \cdot)$ における $\mathbb{Z}$ の作用 $\cdot : \mathbb{Z} \times M \to M$ はアーベル群における（演算を積の形で書いた場合の）ベキ指数になる意外ないことがわかります。

2.5.2 両側加群

定義 2.24. R と S を環とする。R-S 両側加群 $M = (M, \lambda, \rho)$ とは

- アーベル群 M,
- 左 R 加群構造 $\lambda : R \times M \to M$,
- 右 S 加群構造 $\rho : M \times S \to M$

の三つ組みで条件

$$(rm)s = r(ms) \qquad \text{for all } r \in R, s \in S, m \in M$$

を満たすものをいう。

- 以降、$rms = r(ms) = (rm)s$ と括弧を省略する。

- $R = S$ の場合は R 両側加群と呼んだりする。

定義 2.25. $\mathbf{k}$ を可換環、R と S を $\mathbf{k}$ 代数とする。R-S 両側加群 M が $\mathbf{k}$ 中心的とは条件

$$am = ma \qquad \text{for all } a \in \mathbf{k}, m \in M$$

を満たすものをいう。
　（ただし、左辺では $\mathbf{k}$ を R の要素とみなし、右辺では S の要素とみなしている。）

- $\mathbf{k}$ を固定している文脈では両側加群といえば $\mathbf{k}$ 中心的であることを仮定することが多い。

例 2.26. 環は $\mathbb{Z}$ 代数と見做せるのであった。
　任意の R-S 両側加群 M は $\mathbb{Z}$ 中心的である。

注意 2.27. 後で $\mathbf{k}$ 代数のテンソル積を導入することで、両側加群を左加群と見做すことができる。
　大雑把に書くと

「$\mathbf{k}$ 中心的 R-S 両側加群＝ $R \otimes_{\mathbf{k}} S^{\mathrm{op}}$ 加群。」

　という同値関係がなりたちます。
　なので、両側加群に関する諸概念も左加群に帰着されます。（個別に定式化するのも難しくはないですが、、、、）

2.5.3　R 両側加群 M の中心 $Z(M)$

定義 2.28. R 両側加群 M の<u>中心</u>$Z(M)$ とは以下で定義される M の部分 $\mathbb{Z}$ 加群である：

$$Z(M) := \{m \in M \mid rm = mr \ \ \text{for all } r \in R\}$$

例 2.29. R 自身を R 両側加群と見做した場合の中心 $Z(R)$ は定義 2.4 で与えた環の中心と（部分集合としては）一致する。

2.5.4　可換環上の左、右、両側加群

可換環の文脈では加群は右とか左とか言わないことがおおい。
　可換環 R 上の定義は左加群でなされるが、可換性のお陰で $R = R^{\mathrm{op}}$ がなりたつので、左加群を自然に右加群と見做せ、さらには自然に R 中心的な R 両側加群と見做せる。可換環上で加群を扱う際には暗黙にこの構造を使っていることはある。典型的なのは R 加群 M, N にたいして $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ に R 加群構造が入ることであろう。（可換とは限らない）環では上手くいかない[3]。
　しかし、もちろん可換環 R 上の両側加群で R 中心的でないものも存在するの注意が必要である。

2.6　R 加群にまつわる諸概念

2.6.1　部分 R 加群

定義 2.30. R を環、M を左 R 加群とする。M の<u>部分左 R 加群</u>N とは、M の下部集合の部分集合で以下を満たすものをいう：

(1) $N \neq \emptyset$.

(2) $n, m \in N \quad \Rightarrow \quad n + m, -n \in N.$

(3) $n \in N,\ r \in R \quad \Rightarrow \quad rn \in N$

　つまり、R の作用で閉じた部分加法群を部分加群と呼んでいます。

例 2.31. R 加群 M にたいして M 自身は部分 R 加群です。また、0 のみから構成される部分集合 $\{0\}$ も部分 R 加群です。これらの部分 R 加群を<u>自明な部分 R 加群</u>と呼びます。

[3] 可換環上の加群しか知らなかった自分が環上の加群を勉強し始めて戸惑ったのはことの一つである。左作用、右作用の区別になれるまで所謂「右も左も分からない」状態だった。

2.6.2 剰余 R 加群

定義 2.32. R を環、M を R 加群、$N \subset M$ を部分 R 加群とする。この設定のもとで剰余 R 加群 M/N を以下で定める：

- （下部アーベル群）M/N.
- （環 R の作用）

$$r[m] := [rm] \qquad \text{for } r \in R, \;\; m \in M$$

- つまり、アーベル群としての剰余加群に自然な方法で R の作用を導入したもの。

2.6.3 部分集合が生成する部分加群と生成系

定義 2.33. R 加群 M の空でない部分集合 $X \subset M$ にたいして、<u>X の生成する部分 R 加群</u>$\langle X \rangle$ を

$$\langle X \rangle := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \; r_1, \ldots, r_n \in R, \; x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

と定める。空部分集合 $\emptyset \subset M$ にたいしては

$$\langle \emptyset \rangle := 0$$

と定める。

補題 2.34. R 加群 M の部分集合 $X \subset M$ にたいして、X の生成する部分加群 $\langle X \rangle$ は X を含む M の部分 R 加群のなかで最小のものである。

定義 2.35. <u>R 加群 M の生成系</u>X とは M の部分集合 $X \subset M$ で $\langle X \rangle = M$ を満たすものをいう。

R 加群 M 自身は M の生成系です。なので、次がなりたちます。

補題 2.36. R 加群 M は生成系を持つ。

定義 2.37. (1) 要素の個数が有限な生成系をもつ R 加群を<u>有限生成</u>とよぶ。

(2) 一つの要素から構成される生成系を持つ R 加群を<u>巡回 R 加群</u>と呼ぶ。

- R 加群の準同型定理より、R 加群 M が巡回的であるための必要十分条件は左イデアル I による剰余加群 R/I と同型なことである。

2.6.4 部分加群の和

定義 2.38. (1) R 加群の部分加群の集合 $\{N_i\}_{i \in I}$ の和 $\sum_{i \in I} N_i$ を $\sum_{i \in I} N_i := \langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle$ と定める。これは次の様にも表せる：

$$\sum_{i \in I} N_i := \{\sum_{i \in I} n_i \mid (n_i) \in \prod_{i \in I} N_i \text{有限個の } i \text{ を除いて } n_i = 0\}$$

(2) 和 $\sum_{i \in I} N_i$ が直和とは要素の和による表示が一意的であることを指す。より詳しくいうと次がなりたつ：

$$\sum_{i \in I} n_i = \sum_{i \in I} n'_i \quad \Rightarrow \quad \forall i \in I, \; n_i = n'_i.$$

直和を $\bigoplus_{i \in I} N_i$ と表す。

- I が有限集合の場合には

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_r, \quad N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$$

とか表す。

補題 2.39. 和 $\sum_{i \in I} N_i$ が直和であるための必要十分条件は任意の $i \in I$ にたいして

$$N_i \cap (\sum_{j \neq i} N_j) = 0$$

が成り立つ事である。

例 2.40. R 加群の M の部分加群 $L, N \subset M$ にたいして次は同値：

(1) $M = L \oplus N$.

(2) $M = L + N,\ L \cap N = 0$.

(3) 任意の $m \in M$ にたいして $l \in L,\ n \in N$ が一意的に存在して $m = l + n$ を満たす。

(4) 標準的な射影 $\pi : M \to M/N$ の L への制限写像 $\pi|_L : L \to M/N$ が同型写像である。

2.7 R 加群の準同型写像、同型写像

定義 2.41. (1) M, N を R 加群とする。

R 加群準同型 $f : M \to N$ とは（下部集合の間の）写像 $f : M \to N$ で以下の二条件を満たすものをいう：

(a) $f(m + m') = f(m) + f(m') \quad$ for all $m, m' \in M$.

(b) $f(rm) = rf(m) \quad$ for all $r \in R,\ m \in M$.

(2) R 加群 M から N への R 加群準同型の集合を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ と表す。

(3) 全単射な R 加群準同型のことを同型とよぶ。

同型写像であることを $f : M \xrightarrow{\cong} N$ と表したりする。

(4) 二つの R 加群 M, N が同型とは R 加群同型写像 $f : M \to N$ が存在することをいう。

二つの R 加群が同型であることを $M \cong N$ と表したりする。R 加群であることをあらわすには $M \cong_R N$ と表したりする。

(5) R 準同型 $f : M \to N$ の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ と余核 $\mathrm{Cok}\, f$ を以下で定める：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &:= \{m \in M \mid f(m) = 0\}, \\ \mathrm{Im}\, f &:= \{f(m) \in N \mid m \in M\}, \\ \mathrm{Cok}\, f &:= N / \mathrm{Im}\, f. \end{aligned}$$

それぞれに標準的に R 加群の構造が入る。

2.7.1　両側加群の準同型写像

書かなくても良いかも知れないが、一応両側加群の準同型写像の定義を与えておく。

定義 2.42. R-S 両側加群 M, N の間の両側加群準同型 $f : M \to N$ とは左 R 加群準同型かつ右 S 加群準同型であるものをいう。つまり、次が成り立つものをいう：

$$f(rms) = rf(m)s \qquad \text{for all } r \in R,\ s \in S, m \in M.$$

- 両側加群に $\mathbf{k}$ 中心的という条件がついても準同型を考えるときには気にしなくてよい。
  $\mathbf{k}$ 中心的両側加群の圏は両側加群の圏の充満部分圏として定義される、と言ってもいい。

2.7.2　加群準同型定理

定理 2.43 (準同型定理)**.** R 加群の準同型写像 $f : M \to N$ にたいして、$\pi : M \to M/\operatorname{Ker} f$ を標準的な全射準同型写像とする。次がなりたつ：

(1) 写像

$$\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \to N, \quad [m] \mapsto f(m)$$

は *well-defined* であり、単射 R 加群準同型写像であり、$f = \overline{f} \circ \pi$ がなりたつ。

さらに $\operatorname{Im} \overline{f} = \operatorname{Im} f$ がなりたつ。よって、値域を制限することで R 加群同型写像

$$\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f$$

がなりたつ。

(2) R 加群準同型写像 $g : M/\operatorname{Ker} f \to N$ が $f = g \circ \pi$ を満たせば $g = \overline{f}$ がなりたつ。

2.7.3　核、余核の普遍性

命題 2.44. R 加群準同型写像 $f : M \to N$ を考える。標準的な準同型写像 $i : \operatorname{Ker} f \to M,\ p : N \to \operatorname{Cok} f$ をこの様に記す。このとき、次がなりたつ：

(1) R 準同型写像 $g : L \to M$ が $f \circ g = 0$ を満たせば R 準同型写像 $h : L \to \operatorname{Ker} f$ が一意的に存在して $i \circ h = g$ を満たす。

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "0"] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

(2) *(1)* の性質をもつ様な準同型写像は一意的な同型を除いて一意的である。R 準同型写像 $j : K \to M$ が *(1)* の性質を持てば R 同型写像 $s : K \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ker} f$ が一意的に存在して $i \circ s = j$ を満たす。

(3) R 準同型写像 $g : N \to L$ が $g \circ f = 0$ を満たせば R 準同型写像 $h : \operatorname{Cok} f \to L$ が一意的に存在して $h \circ p = g$ を満たす。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"] & \operatorname{Cok} f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & 0 \\
 & & L &
\end{tikzcd}$$

(4) *(1)* の性質をもつ様な準同型写像は一意的な同型を除いて一意的である。R 準同型写像 $q : N \to C$ が *(1)* の性質を持てば R 同型写像 $s : \operatorname{Cok} f \xrightarrow{\cong} C$ が一意的に存在して $s \circ p = q$ を満たす。

2.8 Hom 加群

2.8.1 Hom 加群

定義 2.45. M, N を R 加群とする。R 加群準同型の集合 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ に次の様にアーベル群の構造を定めることができる：

[加法] $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ にたいして $f + g$ と表記される $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ の要素を以下で定める。

$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は M から N への写像の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(M, N)$ の部分集合なので、なので、この要素を定めるにはまず写像 $M \to N$ を定めないといけない。その写像の定め方を

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m) \quad \text{for all } m \in M.$$

と定める。（これにて $f + g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(M, N)$ が定義された。）つぎにこうして定義された写像 $f + g : M \to N$ が R 加群準同型であることを確かめないといけない。（がそれは練習問題）

[0 元]

$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ の 0 元はゼロ写像 $0 : M \to N$（任意の M の要素を N のゼロ元 $0 \in N$ に送る写像）です。

[逆元]

$f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ にたいして写像 $-f : M \to N$ を以下で定める：

$$(-f)(m) := -f(m) \quad \text{for all } m \in M.$$

これが f の逆元であること（つまり $f + (-f) = 0,\ (-f) + f = 0$）であることは簡単にわかります。

[和の可換性]

上で定めた和 $f + g$ が可換である（つまり任意の f, g にたいして $f + g = g + f$ が成り立つ）ことは簡単にわかります。

組 $(\mathrm{Hom}_R(M, N), +)$ はアーベル群である。（注：R 加群ではなくて単なるアーベル群です。R が可換環の場合には R 加群の構造を与えることができます。）

2.8.2 両側加群と Hom_R

R, S, T を環、M を R-S 両側加群、N を R-T 両側加群とする。$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は M, N を R 加群とみなしたときの Hom 加群を意味する。

命題 2.46. R, S, T を環、M を R-S 両側加群、N を R-T 両側加群とする。このとき、以下の方法で $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は S-T 両側加群となる：

$$sft(m) := f(ms)t$$

ただし $s \in S,\ t \in T, f \in \mathrm{Hom}_R(M, N),\ m \in M$ である。

- 正確には $s \in S, t \in T, f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ にたいして $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ の要素 sft を以下で定義するというべきであろう：
$$sft(m) := f(ms)t \quad \text{for all } m \in M.$$
- （コメント）M, N の R 加群構造は R 加群準同型の空間 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ を構成するときに使われている。ここでまだ消費されていない M の右 S 加群構造と N の右 T 加群構造を用いて $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ に S と T の作用を与えることが出来る。

- 次が成り立つ：
  - M が R 加群でしかないとき（つまり、右 S 作用を考えないときは）$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ には右 T 加群の構造が入る。
  - N が R 加群でしかないとき（つまり、右 T 作用を考えないときは）$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ には左 S 加群の構造が入る。

  これらは上の定義と類似の方法で達成される。あるいは $S=\mathbb{Z}$ *or* $T=\mathbb{Z}$ として考えた場合ともいえる。

注意 2.47. 以下で構成する Hom_R に関する自然な加群準同型は適切な設定の下で S-T 両側加群の準同型となる。

次は素朴ですがとても大事です：

例 2.48. M を R 加群とする。R 自身を R 両側加群とみることでアーベル群 $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ に R 加群の構造を入れることが出来る。具体的に R の作用を書き下す：

$$(rf)(a) := f(ar) \quad a,r\in R,\ f\in \mathrm{Hom}_R(R,M).$$

単位元 $1\in R$ の行き先を値とする写像

$$\epsilon : \mathrm{Hom}_R(R,M)\to M,\ \epsilon(f) := f(1)$$

は R 加群の同型写像である。

$$\because \quad \epsilon(rf) = f(1r) = f(r) = rf(1) = r\epsilon(f).$$

練習問題 2.49. 上の例の証明を完成させよう。つまり、
R 加群 M にたいして定まる、次の写像は R 加群の同型写像であることを示そう：

$$\epsilon : \mathrm{Hom}_R(R,M) \xrightarrow{\cong} M,\ f\mapsto f(1).$$

Step 1. まず、ϵ がアーベル群の準同型写像であることを示そう。

Step 2. 次に、ϵ が R の作用を保つことを示そう。

Step 3. 次に、ϵ が単射であることを示そう。このために核がゼロであること（$\mathrm{Ker}\,\epsilon=0$）を示そう。

つまり $\epsilon(f)=0$ をみたす R 加群準同型 $f:R\to M$ は 0 写像であることを示しましょう。

ヒント：$x\in R$ は $x=x\cdot 1$ である。

Step 4. 最後に、ϵ が全射であることを示そう。要素 $m\in M$ にたいして $\epsilon(f_m)=m$ を満たすような R 加群準同型 $f_m : R\to M$ を構成しよう。

ヒント：条件 $\epsilon(f_m)=m$ と f_m が R 加群準同型という前提から各 $x\in R$ にたいして $f_m(x)$ が決まってしまうので、それを逆用して写像 f_m の定義とすればよい。

2.8.3 Hom に誘導されるアーベル群準同型写像

定義 2.50. L, M, N を R 加群、$f : M \to N$ を R 加群準同型写像とする。

(1) アーベル群の準同型写像 $f_* : \mathrm{Hom}_R(L, M) \to \mathrm{Hom}_R(L, N)$ を以下で定める：

$$f_*(g) := f \circ g \quad \text{for all } g \in \mathrm{Hom}_R(L, M).$$

(2) アーベル群の準同型写像 $f^* : \mathrm{Hom}_R(N, L) \to \mathrm{Hom}_R(M, L)$ を以下で定める：

$$f^*(g) := g \circ f \quad \text{for all } g \in \mathrm{Hom}_R(L, M).$$

R 加群準同型写像の合成は R 加群準同型です。上の操作との関係を調べるのを問題とします。

練習問題 2.51. L, M, M_1, M_2, M_3 を R 加群、$f : M_1 \to M_2,\ g : M_2 \to M_3$ を R 加群準同型写像とする。

(1) 次の等式を示せ：$(\mathrm{id}_M)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(L,M)}$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

二つ目の等式は次の図式が可換であることを言っている：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(L, M_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)_*"'] & \mathrm{Hom}_R(L, M_2) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Hom}_R(L., M_3) \end{tikzcd}$$

補足：この問題は $\mathrm{Hom}_R(L, -)$ が関手（と呼ばれるもの）であることを示している。

少しだけ詳しく説明しておきます。加群 L をひとつ決めると、これをもとに加群とその準同型にアーベル群とその準同型を対応させる規則が上の構成でできていますね。つまり、加群 M にたいしてアーベル群 $\mathrm{Hom}_R(L, M)$ を対応させ、加群準同型写像 $f : M \to N$ にたいしてアーベル群準同型 f_* を対応させるのです。

この様な対応規則で、恒等写像を恒等写像に移し、準同型の合成を保つものを関手とよびますが、それがこの問題で示していただきたいことです。

詳しくは圏論の教科書をご覧ください。

(2) 次の等式を示せ：$(\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,L)}$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

二つ目の等式は次の図式が可換であることを言っている：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(M_3, L) \arrow[r, "g^*"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)^*"'] & \mathrm{Hom}_R(M_2, L) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_R(M_1, L) \end{tikzcd}$$

補足：この問題は $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ が反変関手（と呼ばれるもの）であることを示している。

2.9 自己準同型環

定義 2.52. R 加群 M の<u>自己準同型環</u>$\mathrm{End}_R(M)$ を以下で定める：

- （下部 $\mathbb{Z}$ 加群）$\mathrm{End}_R(M) := \mathrm{Hom}_R(M, M)$.

- （積）積を写像の合成により定義する。つまり、$f, g \in \mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M, M)$ にたいして
$$fg := f \circ g$$
と定める。

補題 2.53. R 加群 M には以下の方法で $\mathrm{End}_R(M)$ 加群の構造を与えることができる：
$$fm := f(m) \quad \text{for all } f \in \mathrm{End}_R(M),\ m \in M.$$

（注意：これは左加群。「加群」という言葉が「右加群」を意味する設定では $\mathrm{End}_R(M)^{\mathrm{op}}$ を使う必要がある。）

補題 2.54. R を $\mathbf{k}$ 代数とする。$\mathbf{k}$ 加群 M に R 加群構造を与えることは、環準同型写像 $\lambda : R \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(M)$ を与えることと同値である。

Proof. R 加群 M にたいして環準同型写像 $\lambda : R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ を
$$\lambda(r)(m) := rm \quad (r \in R,\ m \in M)$$
であたえることができる。

□

2.10 R 加群の直和と直積

2.10.1 加群の直和（二個の場合）

ベクトル空間に直和というものがありましたが、同様に R 加群の直和も定義されます。

定義 2.55. R 加群 M, N の直和 $M \oplus N$ を以下で定める：

- 下部加法群は直積加群 $M \times N$ とする。つまり、要素 $x_1 = (m_1, n_1), x_2 = (m_2, n_2) \in M \times N$ の和を
$$x_1 + x_2 = (m_1, n_1) + (m_2, n_2) := (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$$
と定める。
- 要素 $x = (m, n) \in M \times N$ への R の作用を
$$rx = r(m, n) := (rm, rn) \quad (\forall r \in R)$$
と定める。

有限個の R 加群の直和 $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r$ も同様に定義する。

2.10.2 加群の直積

有限個の R 加群 $M_1, \ldots, M_r$ の直積は直和と同じものを意味する：
$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r.$$

無限直積も安直に定義できる。

定義 2.56. 集合 I で添え字付けられた R 加群 M_i の直積 R 加群 $\prod_{i \in I} M_i$ を以下で定める：

- 下部集合は、直積集合 $\prod_{i\in I} M_i$.
- 加法群としての構造は以下で定める：
  要素 $x=(m_i)_{i\in I}, y=(n_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ の和を
  $$x+y=(m_i)_{i\in I}+(n_i)_{i\in I} := (m_i+n_i)_{i\in I}$$
  と定める。
- 要素 $x=(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ への R の作用を
  $$rx=r(m_i)_{i\in I} := (rm_i) \quad (\forall r\in R)$$
  と定める。

同じ R 加群 M（のコピー）の I 上の直積を $M^{\prod I}$ とあらわす。

2.10.3 加群の無限直和

無限直和の定義をします。

無限直積 $\prod_{i\in I} M_i$ のなかで、0 ではない成分が有限個なものの部分集合は部分 R 加群になるので、それを無限直和と呼びます。

正確にあらわすために、一つだけ用語を準備します。

無限直積 $\prod_{i\in I} M_i$ の要素 $x = (m_i)_{i\in I}$ にたいして、0 ではない成分のある位置の集合を x の台 (support) と呼びます：
$$\operatorname{supp} x := \{i\in I \mid m_i \neq 0\}.$$

定義 2.57. 集合 I で添え字付けられた R 加群 M_i を考える。以下で与える無限直積 $\prod_{i\in I} M_i$ の部分集合は部分 R 加群である。それを直和 R 加群 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ と定める：
$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{x=(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M \mid \#\operatorname{supp} x < \infty\}$$

同じ R 加群 M（のコピー）の I 上の直積を $M^{\oplus I}$ とあらわす。

2.10.4 （内）直和、直和因子、捕加群、直和分解

特に大事なのは、加群 M が二つの部分加群 $N_1, N_2 \subset M$ の直和に自然な方法で同型な時で、内直和と呼ばれることも偶にあります。もしかすると皆さんがご存じのベクトル空間の直和はこちらかもしれません。

定義 2.58. R 加群 M が部分 R 加群 N_1, N_2 の<u>内直和</u>であるとは、次が成り立つことをいう：

任意の $m\in M$ にたいして $(n_1,n_2)\in N_1\times N_2$ が一意的に存在して次が成り立つ：
$$m=n_1+n_2.$$

内直和と定義 2.55 の直和の関係は以下に示される通りであり、同一視して問題ありません。なので、以降の講義では内直和とは言わずに直和といいます。

補題 2.59. M を R 加群、$N_1, N_2 \subset M$ を部分 R 加群とする。R 加群準同型 $\psi : N_1\oplus N_2 \to M$ を $\psi(n_1,n_2) := n_1+n_2 \quad \text{for all } n_1\in N_1, n_2\in N_2$ と定める。

この R 加群準同型 ψ が同型であるための必要十分条件は M が N_1 と N_2 の内直和であることである。

もう少し用語を準備します。

定義 2.60. M を R 加群とする。部分加群 $N \subset M$ が<u>直和因子</u>であるとは、部分加群 $L \subset M$ が存在して M が N と L の直和であることをいう。このような L のことを N の<u>捕加群</u>という。

R 加群 M を

$$M = N \oplus L$$

という様に部分 R 加群の（内）直和で表すことを直和分解と呼ぶ。(N, L は M の部分加群。)

さらには、直和加群との同型

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

をあたえることも直和分解と呼ぶ。(M_1, M_2 は M の部分加群とは限らない。)

2.10.5 Hom と直積、直和

（無限）直積、（無限）直和の重要な性質を説明します。

集合 I で添え字付けられた R 加群 M_i を考えましょう。すると各 $i \in I$ にたいして、無限直積 $\prod_{j\in I} M_j$ から第 i 成分を取り出す写像 $p_i : \prod_{j\in I} M_j \to M_i$ が定まります。同様に、各 $i \in I$ にたいして M_i を無限直和の第 i 成分に埋め込む写像 $\iota_i : M_i \to \bigoplus_{j\in I} M_i$ が定まりますね。

$$p_i : \prod_{j\in I} M_j \to M_i,\ (m_j)_{j\in I} \mapsto m_i$$
$$\iota_i : M_i \to \bigoplus_{j\in I} M_j,\ x \mapsto (\text{第 } i \text{ 成分は } x \text{ でありそれ以外の成分は } 0)$$

こいつらは R 準同型写像ですね。

命題 2.61. 集合 I で添え字付けられた R 加群 M_i を考えましょう。R 加群 N にたいして次の写像は $\mathbb{Z}$ 加群の同型である。

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N),\ f \mapsto (f \circ \iota_i)_{i\in I}$$
$$\mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i),\ f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I}$$

この命題は、R 加群の直和、直積が圏論における直和、直積（と呼ばれるもの）であることを言っています。

2.10.6

集合 I, X にたいして次の写像は全単射だった：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(I, X) \xrightarrow{1:1} X^{\prod I},\ f \mapsto (f(i))_{i\in I}.$$

（これは写像 $\phi : I \to X$ を与えることと I で添え字付けられた X の要素 $(x_i)_{i\in I}$ を考えることが同値ということですね。）

例 2.48 と命題 2.61 を組み合わせると次がでます：

系 2.62. R 加群 M と集合 I にかんして次の R 加群の同型写像がなりたつ：

$$\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus I}, M) \xrightarrow{\cong} M^{\prod I} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(I, M), \quad f \mapsto (f(i))_{i\in I}.$$

逆写像は次で与えられる：

$$M^{\prod I} \to \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus I}, M),\ (m_i)_{i\in I} \mapsto \left[(r_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} r_i m_i\right]$$

- 写像 $\phi : I \to M$ に対応する R 加群準同型写像 $f_\phi : R^{\oplus I} \to M$ の像は（写像の像）$\phi(I)$ の生成する部分 R 加群である：
$$\mathrm{Im}\, f_\phi = \langle \phi(I) \rangle.$$
- 特に、f_ϕ が全射であるための必要十分条件は $\phi(I)$ が M の生成系であることである。

部分集合 $X \subset M$ にたいして R 加群準同型写像 $f_X : R^{\oplus X} \to M$ を
$$f_X : R^{\oplus X} \to M \ (r_x)_{x \in X} \mapsto \sum_{x \in X} r_x x$$
と定める。（これは上の対応で標準単射 $i : X \hookrightarrow M$ に対応するもの。）すると像は X の生成する部分 R 加群である：$\mathrm{Im}\, f_X = \langle X \rangle$.

系 2.63. 上の設定において、X が M の生成系であるための必要十分条件は $f_X : R^{\oplus X} \to M$ が生成系であることである。

2.11 べき等自己準同型と直和分解

2.11.1 べき等元の完備直交系

定義 2.64. $\mathbf{k}$ 代数 R のべき等元の完備直交系とは有限個の要素 $e_1, e_2, \ldots, e_n \in R$ で次を満たすものをいう：

$$\begin{aligned} &e_i^2 = e_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n \text{（つまり各 } e_i \text{ はべき等）} \\ &e_i e_j = 0 \quad \text{for } i \neq j \\ &e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1_R \end{aligned}$$

命題 2.65. R を $\mathbf{k}$ 代数、$e_1, e_2, \ldots, e_n \in R$ をべき等元の完備直交系とする。このとき、R 加群 M の下部 $\mathbf{k}$ 加群は次の直和分解をもつ：

$$M = e_1 M \oplus e_2 M \oplus \cdots \oplus e_n M$$

（注意：R 加群としての直和分解ではない。）

Proof. $m \in M$ をとってくる。$m = 1_R \cdot m = (e_1 + \cdots + e_n)m = e_1 m + \cdots + e_n m$ がなりたつ。これは $M = e_1 M + \cdots + e_n M$ ということを示している。

$i = 1, 2, \ldots, n$ を一つ決める。$m \in e_i M \cap (\bigcap_{j \neq i} e_j M)$ をとってくる。$e_i n = m = \sum_{j \neq i} e_j l_j$ をみたす $n, l_j \in M$ が存在する。右辺と左辺に e_i を掛けるとべき等性と直交性 $e_i e_j \neq 0$ より、$m = e_i n = 0$ を得る。よって、$e_i M \cap (\bigcap_{j \neq i} e_j M) = 0$ を得る。 □

2.11.2

命題 2.65 を $\mathrm{End}_R(M)$ 加群 M に適用すると次が証明できます：

命題 2.66. R 加群 M の n 個の自己 R 加群準同型写像 $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathrm{End}_R(M)$ が次を満たすとする：

$$\begin{aligned} &e_i^2 = e_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n \text{（つまり各 } e_i \text{ はべき等）} \\ &e_i e_j = 0 \quad \text{for } i \neq j \\ &e_1 + e_2 + \cdots + e_n = \mathrm{id}_M \end{aligned}$$

（これを満たすものをべき等自己準同型写像の完全直交系という。）

このとき、M はの下部 $\mathbf{k}$ 加群は次の直和分解をもつ：

$$M = \mathrm{Im}\, e_1 \oplus \mathrm{Im}\, e_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, e_n$$

命題2.66の系として次が得られます：

系 2.67. M を R 加群、$e : M \to M$ をべき等自己準同型写像とする。

(1) $e' := \mathrm{id}_M - e$ も M のべき等自己準同型写像である。

(2) $e \circ e' = 0,\ e' \circ e = 0,\ e + e' = \mathrm{id}_M$ がなりたつ。
（つまり、e, e' はべき等自己準同型写像の完備直交系である。）

(3) $\mathrm{Ker}\, e = \mathrm{Im}\, e',\quad \mathrm{Ker}\, e' = \mathrm{Im}\, e$ がなりたつ。

(4) 次の直和分解が存在する：

$$M = \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Ker}\, e.$$

Proof. (1)(2) は計算すれば分かる（のでやってみよう）。
(3). (2) より $\mathrm{Im}\, e' \subset \mathrm{Ker}\, e$ がなりたつ。
$m \in \mathrm{Ker}\, e$ をとってくる。次の計算より $e'(m) = m$, 特に $m \in \mathrm{Im}\, e'$ がわかる。

$$m = \mathrm{id}_M(m) = e(m) + e'(m) = e'(m).$$

(4) (2)(3) と命題2.66の帰結。

□

2.11.3 分裂単射、分裂単射と直和分解

定義 2.68. (1) R 加群準同型写像 $f : M \to N$ が**分裂単射**とは、R 加群準同型写像 $g : N \to M$ で $g \circ f = \mathrm{id}_M$ を満たすものが存在することをいう。

(2) R 加群準同型写像 $f : M \to N$ が**分裂単射**とは、R 加群準同型写像 $g : N \to M$ で $f \circ g = \mathrm{id}_N$ を満たすものが存在することをいう。

- 分裂単射は単射である。分裂全射は全射である。逆は一般には不成立。
- 分裂単射はsection と呼ばれることもある。分裂全射はretraction と呼ばれることもある。

系 2.69. R 加群 M の部分加群 N にたいして次は同値である：

(1) N は M の直和因子である。

(2) M のべき等自己準同型写像 e で $\mathrm{Im}\, e = N$ を満たすものが存在する。

(3) M のべき等自己準同型写像 e' で $\mathrm{Ker}\, e' = N$ を満たすものが存在する。

(4) 標準的な単射 $i : N \to M$ は分裂単射である。

(5) 標準的な全射 $p : M \to M/N$ は分裂全射である。

Proof. (1) ⇒ (4) $N \oplus L = M$ となる部分加群 L をとる。標準的な射影を p とおく：

$$p : M = N \oplus L \to N,\quad m = (n, l) \mapsto n$$

$p \circ i = \mathrm{id}_N$ がなりたつ。

(4) ⇒ (2). $p : M \to N$ を $p \circ i = \mathrm{id}_N$ をみたす R 準同型写像とする。$e := i \circ p : M \to M$ はべき等自己準同型写像であり $\mathrm{Im}\, e = N$ であることは容易にわかる。

(2) ⇒ (3) $e' := \mathrm{id} - e$ とおけばよい。

(3) ⇒ (1) は補題2.67から従う。

(1) ⇒ (5) $N \oplus L = M$ となる部分加群 L をとる。
$j : L \to M$ を標準的な単射とする。

主張 2.70. $f := p \circ j$ は同型写像である。

$i := j \circ f^{-1}$ とおけば $p \circ i = \mathrm{id}_{M/N}$ がなりたつ。

(5) $\Rightarrow$ (3) $i : M/N \to M$ を $p \circ i = \mathrm{id}_{M/N}$ を満たす準同型写像とする。$e' := i \circ p$ はべき等自己準同型であり、$\operatorname{Ker} e' = \operatorname{Ker} p = N$ がなりたつ。

(3) $\Rightarrow$ (2) $e := \mathrm{id} - e'$ とおけばよい。

□

次の様に整理しておいた方が使いやすいかも知れない。

系 2.71. 単射 R 加群準同型写像 $i : N \to M$ にたいして次は同値である：

(1) $i : N \to M$ は分裂単射である。

(2) 直和分解 $M \cong N \oplus \operatorname{Cok} i$ が存在して、この同型の元で $i : N \to M$ は標準的な単射 $N \to N \oplus \operatorname{Cok} i$ に一致する。

(3) M のべき等自己準同型写像 e で $\operatorname{Im} e = \operatorname{Im} i \cong N$ を満たすものが存在する。

(4) M のべき等自己準同型写像 e' で $\operatorname{Ker} e' = \operatorname{Im} i \cong N$ を満たすものが存在する。

系 2.72. 全射 R 加群準同型写像 $p : M \to N$ にたいして次は同値である：

(1) $p : M \to N$ は分裂全射である。

(2) 直和分解 $M \cong N \oplus \operatorname{Ker} p$ が存在して、この同型の元で $p : M \to N$ は標準的な全射 $N \oplus \operatorname{Ker} p \to N$ に一致する。

(3) M のべき等自己準同型写像 e で制限写像 $p|_{\operatorname{Im} e} : \operatorname{Im} e \to N$ が同型であるものが存在する。

(4) M のべき等自己準同型写像 e' で制限写像 $p|_{\operatorname{Ker} e'} : \operatorname{Ker} e' \to N$ が同型であるものが存在する。

2.12 半単純環

定義 2.73. 環 R が<u>半単純</u>とは、任意の R 加群 M の任意の部分加群 $N \subset M$ が直和因子であることをいう。

注意 2.74. この講義では加群は左加群を意味しました。なので、半単純という性質も左半単純と呼ぶべきと感じる方もおられるでしょうが、後に述べる Artin-Wedderburn の定理により、左半単純環と右半単純環は同じものとわかります。

例 2.75. 体 K は半単純環である。
皆さんご存じの通り、K ベクトル空間 V の部分空間 $U \subset V$ は捕空間を持ちます。これは体 K は半単純ということに他なりません。

半単純ではない環もあります。それを示すのは練習問題です。

練習問題 2.76. 整数環 $\mathbb{Z}$ は半単純ではないことを示してください。

ヒント：

- $\mathbb{Z}$ 加群 M とその部分加群 $N \subset M$ で M の直和因子になっていないものが存在することを示します。
- $\mathbb{Z}$ 加群 $M = \mathbb{Z}$ を考えます。そして部分加群 $N := 2\mathbb{Z}$ が直和因子でないこと示しましょう。つまり、部分加群 L で $M = N \oplus L$ となるものが存在しないことを示しましょう。

- $L=0$ と $L\neq 0$ で場合分けをします。それぞれの場合で M が N と L の直和であると仮定して矛盾を導きましょう。

- $L=0$ の場合は簡単ですね。

  （M の要素 m は N の要素 $n\in N$ と L の要素 $l\in L$ の和であらわせるでしょうか ???? ）

- $L\neq 0$ の場合は、、、、、

  （M の要素 m は N の要素 $n\in N$ と L の要素 $l\in L$ の和であらわせるでしょうか？そのあらわし方は一意的でしょうか ????? ）

- 復習しておくと、M の部分加群 L はある非負整数 n が存在して $L=n\mathbb{Z}$ と表せましたね。これを用いるといいかもしれません。

半単純環はどのような環であるのかが決定されています。

定理 2.77 (Artin-Wedderburn の定理)**.** 環 R に対して次は同値：

(1) R は半単純環である。

(2) 可除代数[4] $D_1, D_2, \ldots, D_r$ と正整数 $n_1, n_2, \ldots, n_r$ が存在して環同型が存在する：

$$R \cong M_{n_1}(D_1)\times M_{n_2}(D_2)\times\cdots\times M_{n_r}(D_r).$$

これは環構造から半単純環を特徴づける定理ですが、後にホモロジー代数的な半単純環の特徴づけを与えます。

2.13 具体例：一変数多項式環上の加群

K を体とします。K 上の一変数多項式環 $K[X]$ の上の加群を考えてみましょう。

$K[X]$ 加群 M を考える、というのは K 加群（つまり、K ベクトル空間）V と K 自己線形写像 $\phi: V\to V$ の組 (V,ϕ) を考えることに他ならないことを見ていきましょう。

2.13.1 $M \leftrightarrow (V,\phi)$

$K[X]$ 加群 M を考えるというのは K 加群 V とその自己線形写像 $\phi: V\to V$ の組 (V,ϕ) を考えることに他ならないことを見ていきましょう。

$\underline{(V,\phi)\mapsto M}$

（K 加群とは K ベクトル空間のことであり、K 準同型写像というのは K 線形写像のことでした。）K 加群 V とその自己 K 準同型写像 $\phi: V\to V$ との組 (V,ϕ) から多項式環 $K[X]$ 上の加群 $M:=M_{(V,\phi)}$ を以下で定義します：

- M の下部加法群は V の下部加法群と定義します。

- 要素 $f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ の V への作用を以下で定義します：

$$f(X)v := a_0v + a_1\phi(v) + a_2\phi^2(v) + \cdots + a_n\phi^n(v).$$

[4] 可換とは限らない体

$\underline{M \mapsto (V, \phi)}$

$K[X]$ は体 K を部分環として含んでいるので、$K[X]$ 加群 M は制限加群を考えることで自然に K 加群 ${}_K M$ と見なせました。

つまり、$V := {}_K M$ という K 加群が得られました。もともと M は $K[X]$ 加群なので、変数 X を K 加群 V にかけるという作用が定まっています。その作用を $\phi : V \to V$ と書くことにしましょう。

$$\phi(v) := X \cdot v \quad \text{for all } v \in V$$

この写像 $\phi : V \to V$ が K 加群の準同型写像です（もともと M が $K[X]$ 加群であることから従います)。

一般の要素 $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ の V への作用は K 線形写像 ϕ を使って次の様に表せます：

$$f(X) \cdot v = a_0 v + a_1 \phi(v) + a_2 \phi^2(v) + \cdots + a_n \phi^n(v).$$

つまり、$K[X]$ 加群 M は上の節の記号を用いれば

$$M = M_{(V,\phi)}$$

と表せます。

2.13.2 部分加群、剰余加群はどう表せる？

上の節では K 加群と $K[X]$ 加群を V と M で分けて表してきましたが、ここからは両方とも M で表すことにします。

補題 2.78. M を K 加群、$\phi : V \to V$ を自己線形写像とし、組 (M, ϕ) から定まる $K[X]$ 加群 $M = M_{(M,\phi)}$ を考える。

部分集合 $N \subset M$ が部分 $K[X]$ 加群であるための必要条件は N が部分 K 加群であり、更に $\phi(N) \subset N$ が成り立つことである。

体 K 上の加群（つまり K ベクトル空間）で特別に成り立つこととして、部分 K 加群 $N \subset M$ が補空間 N' をもつことでした。補空間というのは $M = N \oplus N'$ を満たす部分加群 $N' \subset M$ のことでした。このとき K 加群としての剰余加群 M/N は補空間 N' と同型です。

練習問題 2.79. 商写像 $\pi : M \to M/N$ を N' に制限した写像 $\pi|_{N'} : N' \to M/N$ は K 加群の同型写像であることをしめせ。

注意 2.80. 一般の環 R 上の部分加群は補加群をもつとは限りません。

M を K 加群、$\phi : V \to V$ を自己線形写像とし、組 (M, ϕ) から定まる $K[X]$ 加群 $M = M_{(M,\phi)}$ を考えましょう。$K[X]$ 部分加群 $N \subset M$ を考えましょう。うえの補題から $\phi(N) \subset N$ が成り立ちます。

N' を N の K 加群として補空間とする。すると K 加群としての直和表示 $M = N \oplus N'$ があります。要素 $m \in M$ は $m = n + n'$ $(n \in N, n' \in N')$ の形に一意的に表示されます。

2.14 双線型形式

定義 2.81. M を右 R 加群、N を左 R 加群、L を $\mathbb{Z}$ 加群とする。写像 $B : M \times N \to L$ が R 上の双線型形式とは次がなりたつことをいう：

$$\begin{aligned} B(m_1 + m_2, n) &= B(m_1, n) + B(m_2, n) \\ B(m, n_1 + n_2) &= B(m, n_1) + B(m, n_2) \\ B(mr, n) &= B(m, rn) \end{aligned}$$

ただし、$m, m_1, m_2 \in M,\ n, n_1, n_2 \in N,\ r \in R$ は任意の要素である。

R 上の双線型形式の空間を $\mathrm{Bil}_R(M, N; L)$ と表す。

命題 2.82. M を右 R 加群、N を左 R 加群、L を $\mathbb{Z}$ 加群とする。次の写像は $\mathbb{Z}$ 加群の同型である：

(1)
$$\Phi : \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \to \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)), \quad \Phi_B(n)(m) := B(m,n)$$

定義の詳細は証明を読んでください。

(2)
$$\Phi' : \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,L)), \quad \Phi'_B(m)(n) := B(m,n)$$

Proof. まずは写像 Φ の定義を解説します。写像 Φ を定めるには R 上の双線型形式 $B : M \times N \to L$ にたいして R 準同型写像 $\Phi_B : N \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)$ を定義しなければいけません。なので各要素 $n \in N$ にたいして $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)$ の要素 $\Phi_B(n)$ を定めなければいけません。$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)$ の要素は $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像だったので、$\Phi_B(n)$ は $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像

$$\Phi_B(n) : M \to L, \quad m \mapsto \Phi_B(n)(m)$$

です。このそれぞれの $m \in M$ の像を $B(m,n)$ と定義するというのが、命題の主張で与えた Φ の定義です。

各 $n \in N$ にたいして写像 $\Phi_B(n) : M \to L,\ m \mapsto B(m,n)$ は $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像であることの確認が必要ですが、それは各自にお任せします。

逆写像が以下で与えられる事が容易に確認できる：

$$\Psi : \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)) \to \mathrm{Bil}_R(M,N;L), \quad \Psi_f(m,n) := f(n)(m)$$

□

3 自由 R 加群

3.0.1 自由加群

環 R を R 加群として見たものを正則 R 加群と呼ぶこともあります。（他の呼び方は「階数 1 の自由加群」。）（正則加群と呼称される加群のクラスはあるので注意。）

定義 3.1. 正則 R 加群（のコピー）の直和と同型な R 加群のことを自由加群と呼びます：

$$M \cong R^{\oplus I}.$$

例 3.2. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ は可換環 $\mathbb{C}$ 上の自由加群です。

線形代数で任意のベクトル空間は数ベクトル空間と同型であることを学びました。たぶん、線形代数では有限次元ベクトル空間しか扱っていないと思いますが、同様のことは無限次元でも正しいのです。

そのことを、自由加群を使って翻訳すると、次の様になります：

定理 3.3. 体 K 上の加群 M は全て自由加群である。

自由 R 加群 $R^{\oplus I}$ の基本ベクトルを以下で定めます：各 $i \in I$ にたいして、要素 $e_i \in R^{\oplus I}$ を第 i 成分は 1 であり、その他の成分は 0 であるものと定める：

$$e_i := (\delta_{ij})_{j \in I}.$$

3.0.2 一次独立、基底

ベクトル空間の生成系の概念を安直に R 加群に拡張することで、R 加群の生成系の概念を定義しました。

同様に、一次独立、基底の概念も導入します。

定義 3.4. M を R 加群をとする。

(1) 有限集合 $\{m_1, \dots, m_n\} \subset M$ が一次独立とは、$r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ が等式

$$r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n = 0$$

を満たせば、$r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_n = 0$ がなりたつことをいう。

(2) 部分集合 $X \subset M$ が R 上一次独立とは、任意の有限部分集合 $Y \subset X$ が一次独立なことをいう。

(3) 生成系かつ一次独立な部分集合 $X \subset M$ の基底とよぶ。

例 3.5. 基本ベクトルの集合 $\{e_i \mid i \in I\} \subset R^{\oplus I}$ は $R^{\oplus I}$ の基底です。

命題 3.6. R 加群 M が自由 R 加群であるための必要十分条件は M が R 上の基底を持つことである。

自由 R 加群 M を表示するのに、基底をつけてあらわす方法もあります：

$$M \cong \bigoplus_{x \in X} Rx.$$

自由加群が自由と言われる所以は、多分、次の命題にあります：

演習問題 2.49 と命題 2.61 から導出できます。

命題 3.7. 自由加群 $R^{\oplus I}$ の集合 I で添え字付けられる標準的な基底を $\{\vec{e_i}\}$ と表すとする：$R^{\oplus I} = \bigoplus_{i \in I} R\vec{e_i}$. このとき、次の写像は R 加群の同型を与える：

$$\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus I}, M) \xrightarrow{\cong} M^{\prod I},\ f \mapsto (f(\vec{e_i}))_{i \in I}.$$

逆写像は次で与えられる

$$M^{\prod I} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus I}, M),\ (m_i)_{i \in I} \mapsto \left[\sum_{i \in I} r_i \vec{e_i} \mapsto \sum_{i \in I} r_i m_i\right]$$

命題 3.8. R 加群 M の部分集合 $X \subset M$ の誘導する R 加群準同型写像

$$f : R^{\oplus X} \to M, \quad \sum_{i \in I} r_i \vec{e_i} \mapsto \sum_{i \in I} r_i x_i$$

の像は X の生成する部分 R 加群 $\langle X \rangle$ である。

f が全射であるための必要十分条件は X が M の生成系であることである。

系 3.9. R 加群 M にたいして自由加群 F からの全射 R 加群準同型写像 $p : F \to M$ が存在する。

系 3.10. R 加群 M が有限生成であるための必要十分条件は有限生成自由 R 加群 $R^{\oplus n}$ からの全射 R 準同型写像 $R^{\oplus n} \to M$ が存在することである。

3.0.3　自由加群ではない加群

例 3.11. R を環、$I \subsetneq R$ を非零イデアルとする。このとき、剰余加群 R/I は自由ではない。

R/I が自由 R 加群とする。$X \subset R/I$ を基底とする。$R/I \neq 0$ より、$X \neq \emptyset$ である。要素 $x \in X$ を選ぶ。すると $\{x\}$ は R 上一次独立でなくてはならない。つまり、任意の $r \in R \setminus \{0\}$ にたいして $rx \neq 0$ でなくてはない。しかし、R/I の定義より $Ix = 0$ なので、$I = 0$ となり矛盾。

このことから、次の命題が分かります。

命題 3.12. 可換環 $R \neq 0$ にたいして次は同値：

(1) R は体。

(2) 任意の R 加群は自由加群。

3.0.4　自由表示 (free presentation)

定義 3.13. R 加群 M の<u>自由表示</u>とは完全列

$$F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

で、$F_0,\ F_1$ が自由加群であるものをいう。

F_0, F_1 がともに有限生成自由加群としてとれるとき M を<u>有限表示</u>とよぶ。

- 上の系 3.9 より自由表示は存在する。

練習問題 3.14 (標準的な自由表示（バカでかい）). M（の下部集合）を基底とする自由加群を F とする：$F := R^{\oplus M} = (\bigoplus_{m \in M} R[m])$. 写像 $p : F \to M$ を

$$p(\sum_{m \in M} x_m[m]) := \sum_{m \in M} x_m m$$

と定める。M 自身は M の生成系なので命題 *3.8* より、この写像は全射 R 加群準同型写像である。

$X := R \times R \times M \times M$ を基底とする自由加群を G とする：$G := \bigoplus_{(a,b,m,n) \in X} R[(a,b,m,n)]$. 写像 $q : G \to F$ を

$$q(\sum_{(a,b,m,n) \in X} y_{(a,b,m,n)}[(a,b,m,n)]) := \sum_{(a,b,m,n) \in X} y_{(a,b,m,n)}(a[m] + b[n] - [am + bn])$$

と定める。このとき図式 $G \xrightarrow{q} F \xrightarrow{p} M \to 0$ は完全である。

ヒント：$\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ は明らか。
逆の包含関係を示すには

$$a[m] + b[n] \equiv [am + bn] \pmod{\operatorname{Im} q}$$

を使って帰納的に

$$a_1[m_1] + a_2[m_2] + \cdots + a_r[m_r] \equiv [a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_r m_r] \pmod{\operatorname{Im} q}$$

が成り立つことを示す。

また、$q[(1,1,0,0)] = [0] + [0] - [0 + 0] = [0]$ なので $[0] \equiv 0 \pmod{\operatorname{Im} q}$ である。

4　加群のテンソル積

4.1　定義と基本的な性質

定義 4.1. 右 R 加群 M と左 R 加群 N から以下で構成される $\mathbb{Z}$ 加群 $M \otimes_R N$ を M と N の R 上のテンソル積という：

Step 1. まず直積集合 $M \times N$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群を F とする：

$$F := \mathbb{Z}[M \times N]$$

- $m \in M, n \in N$ にたいして $[m, n] := [(m, n)]$ と定める。

Step 2. 以下の元で生成される F の部分 $\mathbb{Z}$ 加群を I とおく：

$$\begin{aligned}
&[m_1 + m_2, n] - [m_1, n] - [m_2, n], \\
&[m, n_1 + n_2] - [m, n_1] - [m, n_2], \\
&[mr, n] - [m, rn],
\end{aligned}$$

ただし $m, m_1, m_2 \in M,\ n, n_1, n_2 \in N,\ r \in R$ は任意の要素を走る。

Step 3. $\mathbb{Z}$ 加群 F の I による商加群を $M \otimes_R N$ と定める：

$$M \otimes_R N := F/I.$$

- $m \in M,\ n \in N$ にたいして $m \otimes n := [m, n] \bmod I$ と定める。

補題 4.2. M を右 R 加群、N を左 R 加群とする。以下のテンソル積 $M \otimes_R N$ の要素の等式が成り立つ：

(1) $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$ *for* $m_1, m_2 \in M,\ n \in N.$
（注：左辺の $+$ は M の中での和、右辺のものは $M \otimes_R N$ の和。慣れるまではこういうことも意識しよう。）

(2) $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$ *for* $m \in M,\ n_1, n_2 \in N.$

(3) $(mr) \otimes n = m \otimes rn$ *for* $m \in M,\ n \in N,\ r \in R.$

(4) $0 \otimes n = 0,\ m \otimes 0 = 0$ *for* $m \in M, n \in N.$
（注：どちらの等式においても右辺は $\mathbb{Z}$ 加群 $M \otimes_R N$ のゼロ元。）

(5) $a(m \otimes n) = (ma) \otimes n = m \otimes (an)$ *for* $a \in \mathbb{Z},\ m \in M,\ n \in N.$
（注：左辺は要素 $m \otimes n \in M \otimes_R N$ の整数 a 倍）

注意 4.3. 以下の二つの命題は抽象的な方法で証明することもできるが、定義に基づいた直接的な証明を与える。

命題 4.4. M を右 R 加群、N を左 R 加群とする。次の $\mathbb{Z}$ 加群の同型が存在する：

(1) $M \otimes_R R \cong M,\quad m \otimes r \mapsto mr.$

(2) $R \otimes_R N \cong N,\quad r \otimes n \mapsto rn.$

Proof. (1) 定義 4.1 の記号を $N=R$ として使う。$\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $f:F\to M$ を $f([m.r]):=mr$ for $m\in M,\ r\in R$ と定める。つまり、

$$f(\sum_{i=1}^{l} a_i[m_i,r_i]) := \sum_{i=1}^{l} m_ir_ia_i.$$

これが全射であることは明らか。なので $I=\mathrm{Ker}\, f$ を示せば、準同型定理より $M\otimes_R N=F/I\cong R$ が分かる。

包含関係 $I\subset \mathrm{Ker}\, f$ を示すには Step 2 で挙げた I の生成元が $\mathrm{Ker}\, f$ に属することを示せばよい。そのことは 3 種類の要素それぞれにたいして以下の様に直接計算で示される：

$$\begin{aligned}
&f([m_1+m_2,r]-[m_1,r]-[m_2,r])=(m_1+m_2)r-m_1r-m_2r=0,\\
&f([m,r_1+r_2]-[m,r_1]-[m,r_2])=m(r_1+r_2)-mr_1-mr_2=0\\
&f([ms,r]-[m,sr])=(ms)r-m(sr)=0.
\end{aligned}$$

包含関係 $I\supset \mathrm{Ker}\, f$ を示す。補題 4.2 より次がなりたつ：

主張 4.5. 次が成り立つ：

(1) $\alpha\in F$ にたいして $\alpha-[f(\alpha),1]\in I$ がなりたつ。

(2) $[0,1]\in I$.

Proof. (1) 補題 4.2 より

$$\sum_{i=1}^{l} a_i[m_i,r_i]-[\sum_{i=1}^{l} m_ir_ia_i,1]\in I$$

がなりたつ。 □

$\alpha\in \mathrm{Ker}\, f$ をとってくる。$\alpha=(\alpha-[f(\alpha),1])+[f(\alpha),1]$ である。主張より $\alpha-[f(\alpha),1)]$ と $[f(\alpha),1]=[0,1]$ は I に属するので α もそうである。

(2) も (1) と同様。

□

命題 4.6. 次が成り立つ：

(1) $\{M_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を右 R 加群の族、N を左 R 加群とする。すると $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)\otimes_R N\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda\otimes_R N),\ (\sum_\lambda m_\lambda)\otimes n\mapsto\sum_\lambda m_\lambda\otimes n$$

が存在する。

(2) 右と左を入れ替えたバージョンの命題

- この命題を「直和とテンソル積は可換である」と言い表すことが多い。
  （より一般に、テンソル積は余極限と可換である。）

4.1.1

命題 4.7. *(1)* $f; M \to M'$ を右 R 加群の準同型写像、$g : N \to N'$ を左 R 加群準同型写像とする。次で定まる $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像

$$f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N', \quad m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$$

は *well-definied* である。

(2) 等式 $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes N}$ がなりたつ。

(3) $f; M \to M',\ f' : M' \to M''$ を右 R 加群の準同型写像、$g : N \to N',\ g' : N' \to N''$ を左 R 加群準同型写像とする。等式 $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$.

(4) $f; M \to M'$ を右 R 加群の準同型写像、$g : N \to N'$ を左 R 加群準同型写像とする。

(5) 写像

$$\otimes : \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N'), \quad (f, g) \mapsto f \otimes g$$

は $\mathbb{Z}$ 上の双線形形式である。

よって、下の定理 *4.8* より次の写像を誘導する：

$$\otimes : \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M, M') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(N, N') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N'), \quad f \otimes g \mapsto f \otimes g$$

（注意：二つの $f \otimes g$ の意味の違いを把握しよう。）

4.2 双線型形式との関係：普遍性によるテンソル積の特徴づけ

定理 4.8. M を右 R 加群、N を左 R 加群とする。次がなりたつ：

(1) 写像 $\beta : M \times N \to M \otimes_R N,\ \beta(m, n) := m \otimes n$ は R 上の双線型形式である。

(2) L を $\mathbb{Z}$ 加群、$B : M \times N \to L$ を R 上の双線型形式とする。$\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\tilde{B} : M \otimes_R N \to L$ が一意的に存在して $B = \tilde{B} \circ \beta$ を満たす。

(3) $\mathbb{Z}$ 加群 L にたいして定まる次の写像は $\mathbb{Z}$ 加群の同型写像である：

$$\beta^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, L) \to \mathrm{Bil}_R(M, N; L),\ \phi \mapsto \phi \circ \beta.$$

(4) $\mathbb{Z}$ 加群 T と R 上の双線型形式 $\gamma : M \times N \to T$ の組 (T, γ) が次の性質を満たすとする：

$\mathbb{Z}$ 加群 L にたいして定まる次の写像は $\mathbb{Z}$ 加群の同型写像である：

$$\gamma^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, L) \to \mathrm{Bil}_R(M, N; L),\ \phi \mapsto \phi \circ \gamma.$$

すると、$\mathbb{Z}$ 加群同型写像 $\tilde{\gamma} : M \otimes_R N \xrightarrow{\cong} T$ が一意的に存在して $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \beta$ を満たす。

Proof. (1) 補題 4.2 より従う。

(2)　定義 4.1 の記号を用いる。

$\tilde{B}$ の存在：$\mathbb{Z}$ 準同型写像 $\hat{B} : F \to L$ を $B'([m, n]) := B(m, n)$ と定める。$I \subset \mathrm{Ker}\, B'$ が成り立つ（ことは各自で確かめよう）。よって、準同型定理より $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\tilde{B} : M \otimes_R N \to L$ で $\tilde{B}(m \otimes n) = B(m, n)$ となるものを得る。最後の等式は $B = \tilde{B} \circ \beta$ ということに他ならない。

$\tilde{B}$ の一意性：β の像は $M\otimes_R N$ の生成系なので、この上の値だけで $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\tilde{B}: M\otimes_R N \to L$ の値は決定される。

(3) これは (2) のいいかえに過ぎない。

(4) (2) より $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\tilde{\gamma}: M\otimes_R N \to T$ が一意的に存在して $\gamma = \tilde{\gamma}\circ\beta$ を満たす。また、仮定より $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\hat{\beta}: T \to M\otimes_R N$ が存在して $\beta = \hat{\beta}\circ\gamma$ を満たす。

等式 $\beta = (\hat{\beta}\circ\tilde{\gamma})\circ\beta$ が成り立つ。これは (2) を $L = M\otimes_R N, B = \beta$ に適用したときに、$\tilde{\beta} = \hat{\beta}\circ\tilde{\gamma}$ であることを言っている。一方、明らかに $\tilde{\beta} = \mathrm{id}_{M\otimes_R N}$ である。よって、$\tilde{\beta}$ の一意性より $\hat{\beta}\circ\tilde{\gamma} = \mathrm{id}_{M\otimes_R N}$ が成り立つ。

同様の議論で $\tilde{\gamma}\circ\hat{\beta} = \mathrm{id}_T$ が分かる。 □

注意 4.9 (圏論をご存じの方向け)**.** (3) はテンソル積 $M\otimes_R N$ が関手 $\mathrm{Mod}\,\mathbb{Z} \to \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}, L \mapsto \mathrm{Bil}_R(M,N;L)$ を表現しているということ。(4) は米田の補題の適用例である。

テンソル積の性質はこの定理による特徴づけを用いて証明されるものがたくさんある。命題 4.4 の別証明を与える。

命題 4.4 の別証明. R 上の双線形形式 $\gamma: M\times R \to M,\ (m,r)\mapsto mr$ が定理 4.8 (4) の性質を満たすことを示せばよい。

$B: M\times R \to L$ を R 上の双線形形式とする。$\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\hat{B}: M \to L$ を $\hat{B}(m) := B(m,1)$ と定める。これが $B = \hat{B}\circ\gamma$ を満たすことは以下の計算で確かめられる：

$$\hat{B}\circ\gamma(m,r) = \hat{B}(mr) = B(mr,1) = B(m,r).$$

$\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $b: M \to L$ が $B = b\circ\gamma$ を満たすとする。すると $b = \hat{B}$ であることが以下の計算で確かめられる：

$$b(m) = b(\gamma(m,1)) = b\circ\gamma(m,1) = B(m,1) = \hat{B}(m).$$

□

練習問題 4.10. 命題 *4.6* を上の方法で証明しよう。

4.3 ⊗-Hom 随伴

定理 4.8 と命題 2.82 と合わせると次が分かる。

定理 4.11. M を右 R 加群、N を左 R 加群, L を $\mathbb{Z}$ 加群とする。

(1) 写像

$$\Phi: \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N, L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)), \Phi_\beta(n)(m) := \beta(m\otimes n)$$

は同型写像であり、逆写像は

$$\Psi: \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,L)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N, L),\ \ \Psi_f(m\otimes n) := f(n)(m)$$

である。

(2) 写像

$$\Phi': \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N, L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,L)), \Phi'_\beta(m)(n) := \beta(m\otimes n)$$

は同型写像であり、逆写像は

$$\Psi': \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,L)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N, L),\ \ \Psi'_f(m\otimes n) := f(m)(n)$$

である。

4.3.1

（この内容はここが適切な場所なのか??）

定義 4.12. 環準同型写像 $f : S \to R$ があると R 加群 M を S 加群とみなす事が次の方法でできる：

$$sm := f(s)m$$

（より正確には、R 加群 M の下部 $\mathbb{Z}$ 加群にこの方法で S 加群構造を入れる、ということ。）こうして得られる S 加群を f に沿った係数制限により得られた S 加群と呼ぶ。

- この対応で、R 加群準同型写像は S 加群準同型写像に移る。（R 加群の圏から S 加群の圏への関手が得られるということ。）
- 以下では、環準同型写像 $S \to R$ が与えられた設定ではこの方法で R 加群を S 加群とみなす。

命題 4.13. 環準同型写像 $f : S \to R$ が与えられているとする。M, N を左 R 加群、X を右 R 加群とする。

(1) $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像

$$\begin{aligned}
&\pi : X \otimes_S M \to X \otimes_R M,\ x \otimes m \mapsto x \otimes m \\
&\mu : X \otimes_S R \otimes_S M \to X \otimes_S M,\quad x \otimes r \otimes r \to xr \otimes m - x \otimes rm
\end{aligned}$$

は完全列

$$X \otimes_S R \otimes_S M \xrightarrow{\mu} X \otimes_S M \xrightarrow{\pi} X \otimes_R M \to 0$$

をなす。特に μ の余核は $X \otimes_R M$ と同型である。

(2) $i : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(M, N)$ を自然な包含写像とする。これと $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像

$$j : \mathrm{Hom}_S(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_S(R, N)),\quad f \mapsto [m \mapsto [r \mapsto f(rm) - rf(m)]]$$

は次の完全列を構成する：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_S(M, N) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_R(R \otimes_S M, N).$$

特に j の核は $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ と同型である。

Proof. (1) 余核 $\mathrm{Cok}\,\mu$ の線形形式に関する普遍性を確かめることで証明できる。
(2) これは次の言い換えにすぎない：

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_S(M, N) \mid f(rm) = rf(m)\ \text{ for all } r \in R,\ m \in M\}$$

□

4.4 両側加群のテンソル積

ここまでは片側加群同士のテンソル積を考察してきましたが、それは肩慣らしみたいなものです。ここからは両側加群同士のテンソル積を扱っていきましょう。

次が命題 4.7 から分かる。

定義兼補題 4.14. M を R-S 両側加群、N を S-T 両側加群とする。M の右 S 加群構造と N を左 S 加群構造を用いて構成された $\mathbb{Z}$ 加群 $M\otimes_S N$ に次で R-T 両側加群の構造を入れることが出来る：

$$r(m\otimes n)t := (rm)\otimes(nt)$$

ただし $r\in R,\ t\in T,\ m\in M,\ n\in N.$

以下、この状況では $M\otimes_S N$ をこの方法で R-T 両側加群とみなす。

また、M, N どちらかが片側加群の場合は、それに応じて $M\otimes_R N$ もそうなる。

大概の命題はこの両側加群構造を考慮しても成り立つ。

命題 4.15. M を右 R 加群、N を左 R 加群とする。次の R 加群の同型が存在する：

(1) $M\otimes_R R\cong M,\quad m\otimes r\mapsto mr.$

(2) $R\otimes_R N\cong N,\quad r\otimes n\mapsto rn.$

- 注意：ここでは R を R-R 両側加群とみなしている。

命題 4.16. 次が成り立つ：

(1) $\{M_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ を R-S 両側加群の族、N を S-T 両側加群とする。すると R-T 両側加群の同型

$$(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda)\otimes_S N\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda\otimes_S N),\ (\sum_\lambda m_\lambda)\otimes n\mapsto\sum_\lambda m_\lambda\otimes n$$

が存在する。

(2) 右と左を入れ替えたバージョンの命題

命題 4.17. *(1)* $f; M\to M'$ を R-S 両側加群の準同型写像、$g: N\to N'$ を S-T 両側加群準同型写像とする。次で定まる R-T 両側加群準同型写像

$$f\otimes g: M\otimes_S N\to M'\otimes_S N',\quad m\otimes n\mapsto f(m)\otimes g(n)$$

は *well-definied* である。

- 上の設定で $f\otimes N := f\otimes\mathrm{id}_N$ とか $M\otimes g := \mathrm{id}_M\otimes g$ とか書く。

(2) 等式 $\mathrm{id}_M\otimes\mathrm{id}_N=\mathrm{id}_{M\otimes N}$ がなりたつ。

(3) $f; M\to M',\ f': M'\to M''$ を R-S 両側加群の準同型写像、$g: N\to N',\ g': N'\to N''$ を S-T 両側加群準同型写像とする。等式 $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)=(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$ が成り立つ。

(4) $f; M\to M'$ を R-S 両側加群の準同型写像、$g: N\to N'$ を S-T 両側加群準同型写像とする。

(5) 写像

$$\otimes:\mathrm{Hom}_{R-S}(M,M')\times\mathrm{Hom}_{S-T}(N,N')\to\mathrm{Hom}_{R-T}(M\otimes_S N, M'\otimes_S N'),\quad (f,g)\mapsto f\otimes g$$

は $\mathbb{Z}$ 上の双線形形式である。

よって、定理 *4.8* より次の写像を誘導する：

$$\otimes:\mathrm{Hom}_{R-S}(M,M')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{S-T}(N,N')\to\mathrm{Hom}_{R-T}(M\otimes_S N, M'\otimes_S N'),\quad f\otimes g\mapsto f\otimes g$$

（注意：二つの $f\otimes g$ の意味の違いを把握しよう。）

定理 4.18. M を R-S 両側加群、N を S-T 両側加群, L を R-T 両側加群とする。

(1) 写像

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{R-T}(M \otimes_S N, L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{S-T}(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)), \Phi_\beta(n)(m) := \beta(m \otimes n)$$

は同型写像であり、逆写像は

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{S-T}(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{R-T}(M \otimes_S N, L),\ \ \Psi_f(m \otimes n) := f(n)(m)$$

である。

(2) 写像

$$\Phi' : \mathrm{Hom}_{R-T}(M \otimes_S N, L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{R-S}(M, \mathrm{Hom}_{T^{\mathrm{op}}}(N, L)), \Phi'_\beta(m)(n) := \beta(m \otimes n)$$

は同型写像であり、逆写像は

$$\Psi' : \mathrm{Hom}_{R-S}(M, \mathrm{Hom}_{T^{\mathrm{op}}}(N, L)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{R-T}(M \otimes_S N, L),\ \ \Psi'_f(m \otimes n) := f(m)(n)$$

である。

注意 4.19. 双線形形式に関する命題も同様に両側加群版が成立するが、使うことはないと思うので省略。

4.5 テンソル積の “結合法則”

命題 4.20. R, S, T, U を環、L を R-S 両側加群、M を S-T 両側加群、N を T-U 両側加群とする。このとき、次の R-U 両側加群の同型がある：

$$\beta_{L,M,N} : (L \otimes_S M) \otimes_T N \xrightarrow{\cong} L \otimes_S (M \otimes_T N) \quad (l \otimes m) \otimes n \mapsto l \otimes (m \otimes n)$$

通常は上の同型を同一視して

$$L \otimes_S M \otimes_T N$$

とあらわす。また、ここの要素も

$$l \otimes m \otimes n$$

とあらわす。

注意 4.21. 厳密にいうと、上の同型は同型でしかなく集合の等号ではないので同一視するには注意が必要。詳しくは [4, VII] 等のモノイダル圏に関する文献を参考にしてください。

四つ以上の両側加群のテンソル積に関しても同様の記法を用いる。
また、環 R 上の両側加群 M にたいして

$$M^{\otimes_R 2} = M \otimes_R M,\ \ M^{\otimes_R 3} = M \otimes_R M \otimes_R M$$

などと表記する。

4.6 テンソル代数

定義 4.22. R を環、M を R 両側加群とする。M の R 上のテンソル代数 $\mathsf{T}_R(M)$ を以下で定める：

- （下部加群)

$$\mathsf{T}_R(M) := \bigoplus_{n\geq 0} M^{\otimes_R n} = R \oplus M \oplus (M \otimes_R M) \oplus (M \otimes_R M \otimes_R M) \oplus \cdots$$

- （積）

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i)(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_j) := x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_j$$

4.7 可換環上の加群のテンソル積と $\mathbf{k}$ 代数のテンソル積

この第 4.7 節では可換環 R 上の加群のテンソル積を扱う。第 2.5.4 節で述べた可換環論での慣例にしたがい、可換環 R 上の（左）加群を R 中心的な R 両側加群とみなす。すると R 加群 M, N のテンソル積 $M \otimes_R N$ を定義することが出来る。これには R 両側加群の構造が入るが、それが R 中心的である事は直ちにわかる：

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = (mr) \otimes n = m \otimes rn = m \otimes (nr) = (m \otimes n)r.$$

補題 4.23. 可換環 R 上の加群 M, N にたいして R 加群の同型写像

$$s_{M,N} : M \otimes_R N \to N \otimes_R M, \quad m \otimes n \mapsto n \otimes m$$

が存在する。

　さらに

$$s_{M,N}^{-1} = s_{N,M}$$

がなりたつ。

Proof. 写像 $\tilde{s} : M \times N \to N \otimes_R M,\ (m, n) \mapsto n \otimes m$ は R 上の双線型形式である。これの誘導する R 加群準同型写像が主張で与えた写像 $s_{M,N}$ である。同様に、R 加群準同型写像 $s_{N,M} : N \otimes_R M \to M \otimes_R N$ を作ることが出来る。

　$s_{M,N}$ と $s_{N,M}$ が互いに逆写像であることは、テンソル積の普遍性から従う。 □

4.7.1 $\mathbf{k}$ 代数のテンソル積

定義 4.24. R, S を $\mathbf{k}$ 代数とする。R, S を $\mathbf{k}$ 加群とみたときのテンソル積加群 $R \otimes_{\mathbf{k}} S$ にたいして以下の方法で積を与えることで $\mathbf{k}$ 代数が得られる。それも $R \otimes_{\mathbf{k}} S$ とあらわす：

$$(r_1 \otimes s_1)(r_2 \otimes s_2) := r_1 r_2 \otimes s_1 s_2$$

- R, S の積写像を μ_R, μ_S とあらわすと、上で定義したテンソル積代数 $R \otimes_{\mathbf{k}} S$ の積写像 $\mu_{R\otimes S}$ は以下の合成として得られる：

$$\mu_{R\otimes_{\mathbf{k}} S} : R \otimes_{\mathbf{k}} S \otimes_{\mathbf{k}} R \otimes_{\mathbf{k}} S \xrightarrow{\mathrm{id}_R \otimes s_{R,S} \otimes \mathrm{id}_S} R \otimes_{\mathbf{k}} R \otimes_{\mathbf{k}} S \otimes_{\mathbf{k}} S \xrightarrow{\mu_R \otimes \mu_S} R \otimes_{\mathbf{k}} S$$

練習問題 4.25. 可換環 $\mathbf{k}$ 上で行った上の定義が非可換環上では上手くいかない理由を見つけよう。

命題 4.26. R, S を $\mathbf{k}$ 代数とする。写像 $i : R \to R \otimes_{\mathbf{k}} S,\ r \mapsto r \otimes 1$

$$i : R \to R \otimes_{\mathbf{k}} S,\ r \mapsto r \otimes 1,$$
$$j : S \to R \otimes_{\mathbf{k}} S,\ s \mapsto 1 \otimes s$$

は $\mathbf{k}$ 代数の準同型写像であり、像は互いに可換である。

注意 4.27. テンソル積代数は可換 $\mathbf{k}$ 代数の圏の余積を与える。
（可換とは限らない）$\mathbf{k}$ 代数の圏では余積ではないので注意しよう。

例 4.28. i 変数可換多項式環と j 変数可換多項式環のテンソル積代数は $i+j$ 変数可換多項式環である：

$$\mathbf{k}[x_1, x_2, \ldots, x_i] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[y_1, y_2, \ldots, y_j] \cong \mathbf{k}[x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_j]$$

変数の対応は、

$$x_p \otimes 1 \mapsto x_p, \quad 1 \otimes y_q \mapsto y_q.$$

4.7.2 包絡代数と（k 中心的）両側加群

補題 4.29. $\mathbf{k}$ を可換環、R と S を $\mathbf{k}$ 代数とする。
アーベル群 M にたいして $\mathbf{k}$ 中心的な R-S 両側加群構造 (λ, ρ) を与えることは（左）$R \otimes_{\mathbf{k}} S$ 加群構造を与えることと同値である。

Proof. $\mathbf{k}$ 中心的な R-S 両側加群 M にたいして（左）$R \otimes_{\mathbf{k}} S$ 加群構造を以下で与えることができる：

$$(r \otimes s)m := rms$$

逆の対応は明らかであろう。 □

定義 4.30. $\mathbf{k}$ を可換環、$\mathbf{k}$ 代数 R の $\mathbf{k}$ 上の包絡環（enveloping algebra）R^{e} を

$$R^{\mathrm{e}} := R \otimes_{\mathbf{k}} R^{\mathrm{op}}$$

と定める。

- $\mathbf{k}$ 中心的 R 両側加群は R^{e} 加群と同一視できる。

補題 4.31. *(1)* 写像 $\mu : R^{\mathrm{e}} \to R,\ \mu(a \otimes b) := ab$ は R^{e} 加群準同型写像である。

(2) R^{e} 加群 M にたいして、標準的な同型 $M \cong \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{e}}}(R^{\mathrm{e}}, M)$ のもとで単射 $\mu^* : \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{e}}}(R, M) \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{e}}}(R^{\mathrm{e}}, M)$ に対応するのは標準的な単射 $Z(M) \to M$ である。
とくに同型 $Z(M) \cong \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{e}}}(R, M)$ が存在する。
ただし
$$Z(M) := \{m \in M \mid rm = mr \text{ for all } r \in R\}$$

- $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{e}}}(R, M)$ は M の 0 次ホッホシルトコホモロジー $\mathrm{HH}^0(R; M)$ である。

Proof. □

系 4.32. $\mathbf{k}$ 代数 R を R^{e} 加群と見たとき、次の写像は $\mathbf{k}$ 代数の同型である：

$$Z(R) \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{R^{\mathrm{e}}}(R), \quad z \mapsto [r \mapsto rz].$$

5 完全列、短完全列

5.1 完全列、短完全列

M_1, M_2, M_3 を R 加群、$f_1 : M_1 \to M_2,\ f_2 : M_2 \to M_3$ を R 加群準同型写像とする。この状況を以下の様にあらわし加群準同型の列と呼んだりする：

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3.$$

R 加群とその間準同型が沢山ある場合でも同様の図式であらわし加群準同型の列と呼んだりする：

$$\cdots \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to \cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots$$

（両端とも無限、片方だけ有限、両端とも有限の全ての場合があります。）

定義 5.1. (1) R 加群準同型の列 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$ が<u>完全</u>とは $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$ が成り立つことをいう。

注意：この条件から $f_2 \circ f_1 = 0$ が従う。

(2) R 加群準同型の列

$$\cdots \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to \cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots$$

が<u>完全</u>とは、各 i にたいして $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$ が成り立つことをいう。

(3) R 加群の<u>短完全列</u>とは次の形の完全列のことを指す：

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0 \tag{5-1}$$

補足：短完全列をこれから使い倒します。キチンと把握しておくことは必須なので詳しく説明します。

短完全列という概念には $M_0 = 0, M_4 = 0$ が定義に含まれている。0 加群からの準同型写像 $f_0 : 0 \to M_1$ と 0 加群への準同型写像 $f_3 : M_3 \to 0$ は一意的に定まるので名前を書かない。

短完全列という条件を書き下すと以下である：

$$\operatorname{Ker} f_1 (= \operatorname{Im} f_0) = 0,\ \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1,\ \operatorname{Im} f_2 (= \operatorname{Ker} f_3) = M_3$$

よって、f_1 は単射、f_2 は全射である。

つまり、

- 短完全列 (5-1) というのは、単射準同型 $f_1 : M_1 \to M_2$ と全射準同型 $f_2 : M_2 \to M_3$ で $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$ を満たすものの組のことである。
- f_1 は単射なので f_1 は M_1 と $\operatorname{Im} f_1$ の同型を誘導する。この f_1 により M_1 を $\operatorname{Im} f_1$（こちらは M_2 の部分 R 加群）と同一視する。
- f_2 は全射なので $M_3 \cong \operatorname{Cok} f_2$ である。

例 5.2. (0) R 加群 M と部分 R 加群 $N \subset M$ にたいして標準的な単射を $i : N \to M$, 標準的な全射を $p : M \to M/N$ とすると次の完全列が得られる：

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \to 0$$

5.1.1 分裂完全列

定義 5.3. 加群準同型の完全列

$$\cdots \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to \cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots$$

が<u>分裂完全（あるいは　分裂する）</u>とは、各 i にたいして準同型写像 $h_i : M_i \to M_{i-1}$ が存在して、任意の i にたいして

$$h_{i+1} \circ f_i + f_{i-1} \circ h_i = \mathrm{id}_{M_i}$$

が成り立つことをいう。

次はよく使う。

例 5.4. R 加群の短完全列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$$

が分裂するとは R 加群準同型写像

$$h_2 : M_2 \to M_1, \quad h_3 : M_3 \to m_2$$

が存在して以下を満たすことと言い換えられる：

$$h_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{M_1}, \quad h_3 \circ f_2 + f_1 \circ h_2 = \mathrm{id}_{M_2}, \quad f_2 \circ h_3 = \mathrm{id}_{M_3}$$

補題 5.5. R 加群の短完全列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0 \tag{5-2}$$

にたいして次は同値：

(1) 短完全列 (5-2) は分裂する。

(2) f_1 は分裂単射である。つまり、R 加群準同型写像 $h_2 : M_2 \to M_1$ が存在して $h_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{M_1}$ を満たす。

(3) f_2 は分裂全射である。つまり、R 加群準同型写像 $h_3 : M_3 \to M_2$ が存在して $f_2 \circ h_3 = \mathrm{id}_{M_3}$ を満たす。

(4) R 加群の同型写像 $\Phi : M_2 \to M_1 \oplus M_3$ が存在して $\Phi \circ f_1 = i,\ q \circ \Phi = f_2$ をみたす。ただし、

$$i = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix} : M_1 \to M_1 \oplus M_3,$$
$$q = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{M_3} \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_3 \to M_3$$

は標準的な単射、標準的な全射である。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i"'] & M_1 \oplus M_3 \arrow[r, "q"'] & M_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) は明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す。

$m \in M_2$ にたいして $m - h_3 \circ f_2(m)$ は $\mathrm{Ker}\, f_2$ に属することが次の計算で分かる：

$$f_2(m - h_3 \circ f_2(m)) = f_2(m) - (f_2 \circ h_3) \circ f_2(m) = f_2(m) - f_2(m) = 0.$$

R 加群の準同型写像 $h_2' : M_2 \to \mathrm{Ker}\, f_2$ を以下で定めることができる：

$$h_2'; M_2 \to \mathrm{Ker}\, f_2, \quad m \mapsto m - h_3 \circ f_2(m).$$

短完全列の性質より $\mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Im}\, f_1 \cong M_1$ だった。二つ目の同型写像は f_1 から誘導されるものだった。これを σ と書くことにする。つまり $\sigma : \mathrm{Im}\, f_1 \to M_1$ は R 加群の準同型写像で任意の $m \in M_1$ にたいして $\sigma(f_1(m)) = m$, 任意の $n \in \mathrm{Im}\, f_1$ にたいして $f_1(\sigma(n)) = n$ をみたすものである。（この条件から同型であることは従う。）

そこで R 加群の準同型写像 $h_2 : M_2 \to M_1$ を以下の合成で定める：

$$h_2 : M_2 \xrightarrow{h_2'} \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Im}\, f_1 \xrightarrow{\sigma} M_1.$$

あとは次を示せばよい：

主張 5.6. *(i)* $h_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{M_1}$.

(ii) $h_3 \circ f_2 + f_1 \circ h_2 = \mathrm{id}_{M_2}$.

Proof. (i) $m \in M_1$ とする。次の計算から主張は示せる：

$$h_2(f_1(m)) = \sigma(f_1(m)) - \sigma(h_3(f_2(f_1(m)))) = \sigma(f_1(m)) = m$$

ただし、二つ目の等号では $f_2 \circ f_1 = 0$ を用いた。

(ii) $n \in M_2$ にたいして次がなりたつ：

$$f_1(h_2(n)) = f_1(\sigma(n - h_3 \circ f_2(n))) = n - h_3 \circ f_2(n).$$

右辺の第二項を移項することで主張を得る。 □

(1) $\Rightarrow$ (4). 次の R 加群準同型写像が互いに逆写像である：

$$\Phi := \begin{pmatrix} h_2 & f_2 \end{pmatrix} : M \to M_1 \oplus M_3$$
$$\Psi := \begin{pmatrix} f_1 \\ h_3 \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_3 \to M$$

(3) $\Rightarrow$ (1) と (4) $\Rightarrow$ (1) は 演習問題。

□

5.2 短完全列と Hom

ホモロジー代数では次の事実が基本的です。

命題 5.7. L を R 加群とする。R 加群の短完全列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$$

から誘導される次の列は完全である：

(1)

$$\text{(5-3)}\qquad 0 \to \mathrm{Hom}_R(L, M_1) \xrightarrow{(f_1)_*} \mathrm{Hom}_R(L, M_2) \xrightarrow{(f_2)_*} \mathrm{Hom}_R(L, M_3)$$

(2)

$$\text{(5-4)}\qquad 0 \to \mathrm{Hom}_R(M_3, L) \xrightarrow{(f_2)^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, L) \xrightarrow{(f_1)^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, L)$$

（一部だけ証明）. $\mathrm{Ker}(f_2)_* = \mathrm{Im}(f_1)_*$ だけ証明します。

まず、$\mathrm{Ker}(f_2)_* \supset \mathrm{Im}(f_1)_*$ を示しましょう。そのために $h \in \mathrm{Im}(f_1)_*$ をとってきます。像の定義から、ある $g \in \mathrm{Hom}_R(L, M_1)$ が存在して $h = (f_1)_*(g) = f_1 \circ g$ を満たします。なので $(f_2)_*(h) = f_2 \circ f_1 \circ g = 0$ が成り立ちます。（注意：$f_2 \circ f_1 = 0$ を用いている。）

つぎに、$\mathrm{Ker}(f_2)_* \subset \mathrm{Im}(f_1)_*$ を示しましょう。

$f_1 : M_1 \to M_2$ は単射準同型であり $\mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$ なので、f_1 は値域を制限することで同型写像 $f_1 : M_1 \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}\, f_2$ を誘導することに注意します。この逆写像を $\phi : \mathrm{Ker}\, f_2 \to M_1$ とあらわします。

$h \in \mathrm{Ker}(f_2)_*$ をとってきます。$0 = (f_2)_*(h) = f_2 \circ h$ がなりたちます。これは $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Ker}\, f_2$ を意味します。なので、写像 h の値域は $\mathrm{Ker}\, f_2$ と思うことができます。そこで、$g := \phi \circ h$ と定めます。この g は準同型写像 $L \to M_1$ であることに注意します。別の言い方をすると g は $\mathrm{Hom}_R(L.M_1)$ の要素ですね。ϕ の定義から次が従います：

$$(f_1)_*(g) = f_1 \circ \phi \circ h = h.$$

これは h が $(f_1)_*$ の像に属することを示している。よって証明が終わりました。 □

練習問題 5.8. 命題 *5.7* の証明を完成させよう。

命題 5.9. R 加群の列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$$

にたいして次は同値：

(1) 列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$$

は短完全列である。

(2) 任意の R 加群 L にたいして誘導される列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(L, M_1) \xrightarrow{(f_1)_*} \mathrm{Hom}_R(L, M_2) \xrightarrow{(f_2)_*} \mathrm{Hom}_R(L, M_3)$$

は完全列である。

Proof. (1) ⇒ (2) は命題 5.7 による。(2) ⇒ (1) は $L = R$ とおけばよい。 □

命題 5.10. R 加群の列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$$

にたいして次は同値：

(1) 列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$$

は短完全列である。

(2) 任意の R 加群 L にたいして誘導される列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_3, L) \xrightarrow{(f_2)^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, L) \xrightarrow{(f_1)^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, L)$$

は完全列である。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) は命題 5.7 による。

(2) $\Rightarrow$ (1).

f_2 の全射性：$C := \mathrm{Cok}\, f_2$ とおき $p : M_3 \to C$ を標準的な全射とする。この p は $\mathrm{Hom}_R(M_3, C)$ の元である。等式 $f_2^*(p) = p \circ f_2 = 0$ が成り立つことに注意しておく。(2) の成立を仮定しているので特に $L = C$ の場合の f_2^* は単射性より $p = 0$ を得る。

$\mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$：

包含関係 $\mathrm{Im}\, f_1 \subset \mathrm{Ker}\, f_2$ を示す。(2) を $L = M_3$ の場合に適用する。$f_1^* \circ f_2^* = 0$ より

$$f_2 \circ f_1 = (f_1^* \circ f_2^*)(\mathrm{id}_{M_3}) = 0$$

を得る。

包含関係 $\mathrm{Im}\, f_1 \supset \mathrm{Ker}\, f_2$ を示す。$D := \mathrm{Cok}\, f_1$ とおき $q : M_2 \to D$ を標準的な全射とする。余核の性質より、R 準同型写像 $a : D \to M_3$ が一意的に存在して $a \circ q = f_2$ を満たす。$M_3 \cong M_2/\mathrm{Ker}\, f_2,\ D = M_2/\mathrm{Im}\, f_1$ より $\mathrm{Ker}\, a \cong \mathrm{Ker}\, f_2/\mathrm{Im}\, f_1$ である。なので a が単射であることを言えばよい。（実際は同型であることを示すが、、）

(2) を $L = D$ の場合に適用する。$f_1^*(q) = q \circ f_1 = 0$ より q は $\mathrm{Ker}\, f_1^* = \mathrm{Im}\, f_2^*$ に属する。よって、ある R 準同型写像 $b : M_3 \to D$ が存在して $q = b \circ f_2$ を満たす。

二つの等式より、$(b \circ a) \circ q = q,\ \ (a \circ b) \circ f_2 = f_2$ を得る。f_2, q の全射性より $b \circ a = \mathrm{id}_D,\ a \circ b = \mathrm{id}_{M_3}$ を得る。

□

5.2.1　ホモロジー代数の始まり

命題 5.7 の完全列 (5-3),(5-4) は短完全列ではありません。右端の写像 $(f_2)_*$ や $(f_1)^*$ が全射ではないのです。短完全列に $\mathrm{Hom}_R(L, -)$ や $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ をかぶせて得らえる列は短完全列にはならないのです。なんだか妙な感じですよね。

ここが実はホモロジー代数の始まりなので、右端の準同型が全射になるとはどういう事なのかを次の命題で見ておきましょう。Hom_R 加群に誘導される写像の全射性を加群の準同型の図式をつかって把握することがポイントです。（といっても、証明は単に写像 f_*, f^* の全射性を定義に従って書き下すだけです。）

命題 5.11. $f : M \to N$ を R 加群準同型、L を R 加群とする。

次が成り立つ：

(I) 次は同値である：

(1) 写像 $f_* : \mathrm{Hom}_R(L, M) \to \mathrm{Hom}_R(L, N)$ は全射である。

(2) 任意の R 加群準同型写像 $h : L \to N$ にたいして、ある R 加群準同型写像 $g : L \to M$ が存在して $h = f \circ g$ を満たす。

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

(II) 次は同値である：

(1) 写像 $f^*: \mathrm{Hom}_R(N, L) \to \mathrm{Hom}_R(M, L)$ は全射である。

(2) 任意の R 加群準同型写像 $h: M \to L$ にたいして、ある R 加群準同型写像 $g: N \to L$ が存在して $h = f \circ g$ を満たす。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & N \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

5.2.2

命題 5.7 の状況を考えて、写像 $(f_2)_*$, $(f_1)^*$ が任意の R 加群 L にたいして全射である条件を調べましょう。

命題 5.12. R 加群の短完全列
$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$$
を考える。次は同値である。

(1) 任意の R 加群 L にたいして $(f_2)_*$ は全射である。

(2) 任意の R 加群 L にたいして $(f_1)^*$ は全射である。

(3) R 加群 M_2 は M_1, M_3 の直和と同型であり、その同型の下で f_1, f_2 は自然な入射、射影と同一視できる。つまり、R 加群の同型写像 $\phi: M_2 \cong M_1 \oplus M_3$ が存在して $\phi \circ f_1: M_1 \to M_1 \oplus M_2$ は第一成分への埋め込み、$f_2 \circ \phi^{-1}: M_1 \oplus M_2 \to M_2$ は第二成分への射影である。

この様な短完全列を分裂短完全列と呼ぶ。

Proof. （(2)⇒(3) だけ証明）
命題 5.11(II) を加群 $L = M_1, h = \mathrm{id}_{M_1}$ として用いる。ある R 加群準同型写像 $g: M_2 \to M_1$ で $g \circ f_1 = \mathrm{id}_{M_1}$ を満たすものが存在することが分かる。

R 加群準同型写像 $\phi: M_2 \to M_1 \oplus M_3$ を $\phi(m) := (g(m), f_2(m))$ と定める。この ϕ が全単射であることを示す。$m \in M_2$ が $\phi(m) = 0$ を満たすとする。すると $f_2(m) = 0$ であるから $m \in \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Im}\, f_1$ である。よって、ある $m' \in M_1$ が存在して $m = f_1(m')$ を満たす。さらに $0 = g(m) = g(f_1(m')) = m'$ である。よって、$m = f_1(0) = 0$ が分かった。ゆえに ϕ は単射である。

$n = (m_1, m_3) \in M_1 \oplus M_3$ を持ってくる。f_2 は全射なので、ある $m \in M_2$ が存在して $f_2(m) = m_3$ を満たす。$m' := m + f_1(m_1 - g(m))$ とおく。$g \circ f_1 = \mathrm{id}_{M_1}$, $f_2 \circ f_1 = 0$ より $g(m') = g(m) + m_1 - g(m) = m_1$, $f_2(m') = f_2(m) = m_3$ である。ゆえに $\phi(m') = n$ である。 □

練習問題 5.13. 命題 *5.12* の証明を完成させよう。

5.2.3 Hom 関手と半単純環

命題 5.12 の条件 (3) が任意の単射準同型 $i: M_1 \hookrightarrow M_2$ にたいして成り立つというのが半単純環の定義でした。なので、同命題から次が従います。

命題 5.14. 環 R にたいして次は同値：

(1) R は半単純環。

(2) 任意の加群 L にたいして関手 $\mathrm{Hom}_R(L, -)$ は R 加群の短完全列をアーベル群の短完全列に移す。

(3) 任意の加群 L にたいして関手 $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ は R 加群の短完全列をアーベル群の短完全列に移す。

5.3 短完全列とテンソル積

命題 5.15 (テンソル積の右完全性)**.** N を S-R 両側加群とする。R 加群の完全列

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$$

にテンソル積 $N \otimes_R -$ を施すと、次の完全列が得られる：

$$N \otimes_R M_1 \xrightarrow{N\otimes_R f_1} N \otimes_R M_2 \xrightarrow{N\otimes_R f_2} N \otimes_R M_3 \to 0$$

Proof. 命題 5.10 より、任意の S 加群 L にたいして、次の列が完全であることを示せばよい：

$$0 \to \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R M_3, L) \xrightarrow{(N\otimes_R f_2)^*} \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R M_2, L) \xrightarrow{(N\otimes_R f_2)^*} \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R M_3, L)$$

$\otimes$-Hom 随伴より、この列は次の列と同型である：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_3, \mathrm{Hom}_S(N, L)) \xrightarrow{f_2^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, \mathrm{Hom}_S(N, L)) \xrightarrow{f_1^*} \mathrm{Hom}_R(M_3, \mathrm{Hom}_S(N, L))$$

命題 5.7 よりこの列は完全なので、もとの列も完全である。 □

注意 5.16. $\otimes$-Hom 随伴を用いない直接証明については例えば [5, I, Proposition 8.6] を見てください。

5.3.1 $N \otimes_R M$ のゼロ元

ちょっとした応用として、テンソル積加群 $N \otimes_R M$ の要素が 0 であることの判定法が得られます。

命題 5.17. N を右 R 加群、M を左 R 加群とする。また $\{m_i\}_{i\in I}$ を M の生成系とする。
テンソル積加群 $N \otimes_R M$ の要素 l は

$$x = \sum_{i\in I} n_i \otimes m_i$$

と、ある族 $\{n_i\}_{i\in I} \subset N$ で有限個を除いて 0 なものにより表せる。
このとき、次は同値：

(1) $x = 0$.

(2) 族 $\{l_j\}_{j\in J} \subset N$ と族 $\{r_{ji}\}_{i\in I, j\in J} \subset R$ が存在して次がなりたつ：

(i) r_{ji} は有限個を除いては 0.

(ii) 各 $j \in J$ にたいして $\sum_i r_{ji} m_i = 0$.

(iii) 各 $i \in I$ にたいして $n_i = \sum_j l_j r_{ji}$

Proof. (2) ⇒ (1) は (iii) を代入して計算すれば $x = \cdots = 0$ が示せる。
(1) ⇒ (2). 生成系 $\{m_i\}_{i\in I}$ から誘導される完全列

$$0 \to K \xrightarrow{i} R^{\oplus I} \xrightarrow{i} M \to 0$$

（ただし $K := \mathrm{Ker}\, p$）に N をテンソルすると次の完全列が得られる：

$$N \otimes_R K \xrightarrow{N\otimes i} N \otimes_R R^{\oplus I} \xrightarrow{N\otimes p} N \otimes_R M \to 0.$$

$\vec{e}_i$ を $R^{\oplus I}$ の標準基底とする。

仮定 $x=0$ より $(N\otimes p)(\sum_i n_i\otimes\vec{e}_i)=x=0$ である。よって完全性より、$y\in N\otimes_R K$ が存在して $(N\otimes i)(y)=\sum_i n_i\otimes\vec{e}_i$ を満たす。

$y=\sum_j l_j\otimes\vec{k}_j$ と表す。また部分加群 $K\subset R^{\oplus I}$ だったので $\vec{k}_j=\sum_i r_{ji}\vec{e}_i$ と（$R^{\oplus I}$ の中で）表すことが出来る。この表示を用いると

$$(N\otimes i)(y)=\sum_{i,j} l_j r_{ji}\otimes\vec{e}_i$$

がなりたつ。$\vec{e}_i$ の係数を比較して (iii) を得る。また $p\circ i(\vec{k})0$ より (ii) を得る。 □

$n\otimes m$ という形の要素を純テンソル元と呼んだりしますが、これが 0 となる条件を系として書いておきます。証明は m を含む M の生成系をとり上の命題を使えばよい。

系 5.18. N を右 R 加群、M を左 R 加群とする。要素 $n\in N,\ m\in M$ にたいして次は同値：

(1) $n\otimes m=0$ *in* $N\otimes_R M$.

(2) ある $l_1,\dots,l_a\in N$ と $r_1,\dots,r_a\in R$ が存在して次を満たす：

- *(i)* $n=\sum_{i=1}^a l_i a_i$.
- *(ii)* $a_i m=0$ *for* $i=1,2,\dots,a$.

例 5.19 ($\mathbb{Z}$ 加群の捻じれ部分). （ここでは左と右の $\mathbb{Z}$ 加群を同一視する。）

$\mathbb{Z}$ 加群 M の要素 $m\in M$ が捩じれ元とはゼロでない整数 $a\in\mathbb{Z}$ にたいして $am=0$ が成り立つことをいう。

$\mathbb{Z}$ 加群 M の捻じれ部分 M_{tor} を捩じれ元のなす部分集合とさだめる：

$$M_{\mathrm{tor}}:=\{m\in M\mid \exists a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ am=0\}.$$

系 5.18 より、次がわかる。要素 $m\in M$ が $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 内で $m\otimes 1=0$ を満たすための必要十分条件は m が捩じれ元であることである。

別の言い方をすると標準的な単射 $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ と M とのテンソル積写像 $M\otimes i:M\to M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の各は捻じれ部分 M_{tor} である。ただし、ここでは自然な同型写像 $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong M$ によりこの両者を同一視している。

さらに別の言い方をすると、次の列は完全である：

$$0\to M_{\mathrm{tor}}\to M\xrightarrow{M\otimes i} M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

Proof. □

5.4 核、像、余核とテンソル積

右 R 加群準同型写像 $f:X\to Y$ から次の短完全列が得られる：

$$0\to\ker f\to X\to\operatorname{Im} f\to 0,\quad 0\to\operatorname{Im} f\to Y\to\operatorname{Cok} f\to 0.$$

一纏めに次の様に書くこともあるかも：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & & 0 \\
& \ker f \arrow[dr] & & & \operatorname{Cok} f \arrow[ur] & \\
& & X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[ur] & \\
& & & \operatorname{Im} f \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

左 R 加群 M とのテンソル積写像

$$f \otimes M : X \otimes_R M \to Y \otimes_R M, \quad x \otimes m \mapsto f(x) \otimes m$$

を考える。テンソル積の右完全性から次が従う。

命題 5.20. 右 R 加群の準同型写像 $f : X \to Y$ にたいして自然な同型写像

$$\mathrm{Cok}(f) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cok}(f \otimes M),$$

と自然な全射 $\mathbb{Z}$ 準同型写像

$$\mathrm{Im}(f) \otimes_R M \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f \otimes M), \quad \mathrm{Ker}(f) \otimes_R M \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(f \otimes M)$$

が存在する。

5.5 蛇の補題

何とかの補題と呼ばれる命題を補題として紹介するべきか ??

（蛇っぽい図式は書けないので各自で補ってください。）

命題 5.21 (蛇の補題)**.** R 加群の次の図式は各行が完全とする：

(5-5)
$$\begin{tikzcd} & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' & \end{tikzcd}$$

次が成り立つ：

(1) R 準同型写像 $\partial : \mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{Cok}\, s$ を以下で定めることが出来る。

Step 1. $n \in \mathrm{Ker}\, u$ をとってくる。g は全射なので、ある $m \in M$ が存在して $g(m) = n$ をみたす。

Step 2. $g'(t(m)) = u(g(m)) = u(n) = 0$ より、ある $l' \in L'$ が存在して $f'(l') = t(m)$ をみたす。

Step 3. $\partial(i') := l' \bmod \mathrm{Im}\, s$ と定める。

(2) 次の完全列が存在する：

$$\mathrm{Ker}\, s \to \mathrm{Ker}\, t \to \mathrm{Ker}\, u \xrightarrow{\partial} \mathrm{Cok}\, s \to \mathrm{Cok}\, t \to \mathrm{Cok}\, u.$$

ただし ∂ 以外は与えられた準同型写像から誘導されるものである。

(3) $f : L \to M$ が単射ならば $\mathrm{Ker}\, s \to \mathrm{Ker}\, t$ も単射である。

(4) $g' : M' \to N$ が全射ならば $\mathrm{Cok}\, t \to \mathrm{Cok}\, u$ は全射である。

Proof. (1) 写像 $\partial : \mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{Cok}\, s$ が well-defined なこと。

$m_1, m_2 \in M$ で $g(m_1) = n,\ g(m_2) = n$ を満たすものをとる。また $l'_1, l'_2 \in L'$ で $f(l'_1) = t(m_1),\ f(l'_2) = t(m_2)$ を満たすものをとる。$m_1 - m_2 \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ より、ある $l \in L$ が存在して $m_1 - m_2 = f(l)$ をみたす。次の計算をする：

$$f(l'_1 - l'_2) = t(m_1 - m_2) = t(f(l)) = f'(s(l))$$

R 準同型写像 f' は単射だったので $l_1 - l_2 = s(l)$ をえる。

写像 $\partial : \mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{Cok}\, s$ が R 準同型写像であることの証明は演習問題とする。

□

6　射影加群、入射加群、平坦化群

6.1　射影加群

命題 6.1. R 加群 P にたいして次は同値：

(1) 任意の全射準同型 $f: M \to N$ にたいして写像 $f_*: \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N)$ は全射。

(2) 任意の全射準同型 $f: M \to P$ に対してある準同型 $g: P \to M$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_P$ を満たす。

(3) P は自由加群の直和因子である。

定義 6.2. 上の命題6.1の条件を満たす加群を射影加群とよぶ。

自由加群、とくに R 加群 R は射影加群であることを注意しておく。

補題 6.3. 任意の R 加群 M にたいして射影加群 P からの全射準同型 $f: P \to M$ が存在する。

補題 6.4. *(1)* 射影加群の（無限かもしれない）直和は射影加群である。

(2) 射影加群の直和因子は射影加群である。

6.2　入射加群

射影加群と双対的な条件を満たす加群を入射加群といいます。条件は双対的なんですが、入射加群の方が扱いが面倒になることがあります。

命題 6.5. R 加群 I にたいして次は同値：

(1) 任意の単射準同型 $f: M \to N$ にたいして写像 $f_*: \mathrm{Hom}_R(N, I) \to \mathrm{Hom}_R(M, I)$ は全射。

(2) 任意の単射 R 加群準同型写像 $f: M \hookrightarrow N$ と R 加群準同型写像 $g: M \to E$ にたいしてある $h: N \to E$ が存在して $h \circ f = g$ をみたす。
（この様な h を f に沿った g の拡張と呼ぶ。）

(3) 任意の単射準同型 $f: I \to M$ に対してある準同型 $g: M \to I$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_I$ を満たす。
補足：この性質を「f は分裂単射である」「f は *section* である」といったりする。

定義 6.6. 上の命題6.5の条件を満たす加群を入射加群とよぶ。

補題 6.7. *(1)* 入射加群の（無限かもしれない）直和は入射加群である。

(2) 入射加群の直和因子は入射加群である。

射影加群にたいする自由加群に相当するものを入射加群にたいして与えていないので、自明なことではありませんが次が成り立ちます。

命題 6.8. 任意の R 加群 M にたいして入射加群 I への単射準同型 $f: M \to I$ が存在する。

この命題の証明は先送りにします。

6.2.1 入射加群の構成

命題 6.9 (Baer 判定法)**.** R 加群 E が入射加群であるための必要十分条件は次がなりたつことである：

(♠) 任意の左イデアル $i : I \hookrightarrow R$ と任意の R 準同型写像 $f : I \to E$ にたいしてある R 準同型写像 $g : R \to E$ が存在して $g \circ i = f$ をみたす。

Proof. 十分条件であることは明らか。必要条件であることを示す。

単射 R 加群準同型写像 $i : M \hookrightarrow N$ と R 加群準同型写像 $f : M \to E$ をとってくる。

M を含む N の部分 R 加群 L と f の拡張 $h : L \to E$ の組 (L, h) のなす集合を X とする。この集合には以下で半順序が入る

$$(L, h) \leq (K, k) \iff L \subset K,\ \ k \text{ は } h \text{ の拡張である。}$$

Y を X の全順序部分集合とする。すると $L_Y := \bigcup_{(L,h) \in Y} L$ にたいして R 加群準同型写像 $h_Y : L_Y \to E$ が各 $(L, H) \in Y$ にたいして $h_Y|_L = h : L \to E$ と定義することで得られる。組 (L_Y, h_Y) は Y の上界を与える。

このことから X にたいして Zorn の補題を適用することが出来、X は極大元 (K, k) を持つことがわかる。あとは $K = N$ を示せばいい。

$K \neq N$ と仮定する。$n \in N \setminus K$ をとってくる。R 準同型写像 $t : R \to N,\ r \mapsto rn$ による $K \subset N$ の逆像を I とする。これは左イデアルである。

$$i := \{r \in R \mid rn \in K\}.$$

次の様に写像に名前をつける：

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"'] & R \arrow[d, "t"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "\tilde{k}"] & \\
K \arrow[r] \arrow[drr, "k"'] & K + Rn \arrow[dr, dashed, "\hat{k}"] & \\
 & & E
\end{tikzcd}$$

(♠) を仮定しているので $k \circ s : I \to E$ の拡張 $\tilde{k} : R \to E$ が存在する。R 加群準同型写像 $\hat{k} : N + Rn \to E$ を次で定義できる：

$$\hat{k}(x + rn) := k(x) + \tilde{k}(rn) \quad (x \in K,\ r \in R).$$

（上の四角形図式が押し出し (push-out) になっている。）極大性より $K + Rn = K$ となり、特に $n \in K$ となり矛盾。 □

系 6.10. R を単項イデアル整域とする。R 加群 E が入射加群であるための必要十分条件は任意の $r \in R$ にたいして掛け算写像 $r : E \to E,\ i \mapsto ri$ が全射であることである。

Proof. イデアルの包含写像 $i : I = Rr \hookrightarrow R$ は掛け算写像 $r : R \to R$ と見做せる。標準的な同型 $\mathrm{Hom}_R(R, E) \cong E$ のもとで $i^* : \mathrm{Hom}_R(R, E) \to \mathrm{Hom}_R(I, R)$ は $r : E \to E$ に一致する。 □

これを使うと次が得られます。

系 6.11. $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は入射的である。

6.2.2 余生成的入射加群

定義 6.12. R 加群 E が余生成的入射加群とは次がなりたつことをいう：

(1) E は入射加群。

(2) R 加群 M が $\mathrm{Hom}_R(M, E) = 0$ を満たせば $M = 0$ である。

巡回 R 加群が左イデアル $I \subset R$ による剰余加群 R/I と同型であることを使うと次がわかります。

補題 6.13. 入射的 R 加群 E が余生成的であるための必要十分条件は任意の左イデアル $I \neq R$ にたいして $\mathrm{Hom}_R(R/I, E) \neq 0$ となることである。

この判定法を使うと次が示せます。

系 6.14. $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は余生成的入射加群である。

この余生成的入射 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 加群から、任意の環 R にたいして余生成的入射 R 加群を得るために次の補題をつかいます。

補題 6.15. 環準同型写像 $f : S \to R$ を考える。
E が入射 S 加群（*resp.* 余生成的入射 S 加群）であれば R 加群 $\mathrm{Hom}_S(R, E)$ は入射的 R 加群 *(resp.* 余生成的入射 R 加群*)* である。

Proof. $\otimes$-Hom 随伴から従う：

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(R, E)) \cong \mathrm{Hom}_S(R \otimes_R M, E) \cong \mathrm{Hom}_S(M, E).$$

□

系 6.16. 環 R を考える。R 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は余生成的入射 R 加群である。

余生成的入射加群の大事な性質は次です。

命題 6.17. E を余生成的入射 R 加群とする。任意の R 加群 M にたいして E の直積への単射 R 加群準同型写像

$$M \hookrightarrow E^{\prod \Lambda}$$

が存在する。

Proof. $\Lambda := \mathrm{Hom}_R(M, E)$ とおく。R 加群準同型写像を

$$F : M \to E^{\prod \Lambda},\ m \mapsto (f(m))_{f \in \Lambda}$$

と定義する。これが単射であることを示す。

$\mathrm{Ker}\, F \neq 0$ と仮定する。E が余生成的であることから、あるゼロでない準同型写像 $g : \mathrm{Ker}\, F \to E$ が存在する。E が入射的なので g の拡張 $f : M \to E$ が存在する。F の定義より $g = f|_{\mathrm{Ker}\, F} = 0$ となるので矛盾。 □

余生成的入射加群の存在を示しているので、これにて命題 6.8 の証明ができたことになります。

6.3　平坦加群

定義 6.18. R 加群 M が平坦 **(flat)** とは任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f : X \to Y$ にたいしてテンソル積写像

$$f \otimes M : X \otimes_R M \to Y \otimes_R M$$

が単射であるこという。

- 補題??より、R 加群 M が平坦であることは任意の右 R 加群の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ にたいしてテンソル積列
$$0 \to X \otimes_R M \to Y \otimes_R M \to Z \otimes_R M \to 0$$
が完全であることと同値。

- 右 R 加群の平坦性も同様に定義される。

補題 6.19. *(1)* 平坦加群の（有限とは限らない）直和は平坦加群である。

(2) 平坦加群の直和因子は平坦である。

(3) 射影加群は平坦である。

Proof. (1)(2) は短完全列の直和が短完全列であることから従う。また、自由加群が平坦であることもこれから従う。これは (3) の特別な場合である。一般に射影加群は自由加群の直和因子だった。なので (3) の一般の場合は (2) から従う。 □

例 6.20 (射影加群ではない平坦加群の例)**.** $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}$ は射影的ではないが平坦である。

射影的でないこと：

主張 6.21. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$

Proof. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像とする。$q \in \mathbb{Q}$ をとってくる。0 でない整数 n にたいして $f(q) = nf(q/n)$ が成り立つ。よって、$f(q)$ は任意の 0 でない整数で割り切れる整数であり、$f(q) = 0$ を結論する。 □

$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}$ が射影的であれば、自由加群の直和因子なので特にある集合 I と単射準同型写像 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^{\oplus I}$ が存在する。主張より各成分への射影との合成 $f_i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ は 0 写像である。よって $f = 0$ となり矛盾。

平坦であること：

$\mathbb{Q}$ の有限部分集合 $\{q_1, \ldots, q_a\} \subset \mathbb{Q}$ にたいして $p \in \mathbb{Q}$ が存在し $\{q_1, \ldots, q_a\} \subset \mathbb{Z}p$ を満たす。よって $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の任意の要素 $\sum_i x_i \otimes q_i$ は純テンソル $x \otimes p$ の形に表せる。

（右）$\mathbb{Z}$ 加群の単射準同型写像 $i : X \to Y$ を考える。これにより X を Y の部分加群とみなす。$x \otimes p$ が $\mathrm{Ker}(i \otimes \mathbb{Q})$ に属するというのは $x \otimes p = 0$ in $Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ということ。例 5.19 より $x \in Y_{\mathrm{tor}}$ である。つまり、ある $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ が存在して $xa = 0$ in Y を満たす。しかし、これは $xa = 0$ in X を意味するので $x \otimes q = 0$ in $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を結論する。これにて $\mathrm{Ker}(i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0$ が示された。

（コメント：等式 $X_{\mathrm{tor}} = Y_{\mathrm{tor}} \cap X$ を使えば最後の議論は短くなる。というか等式の証明の一部を実施している。）

6.3.1　平坦加群と像、核

平坦加群の定義から次が従う：

命題 6.22. M を平坦加群とする。右 R 加群の準同型写像 $f : X \to Y$ にたいして命題 *5.20* の全射準同型写像は同型である：

$$(\mathrm{Im}\, f) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f \otimes_R M), \quad (\mathrm{Ker}\, f) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(f \otimes M).$$

6.3.2

補題 6.23. *(1)* N を右 R 加群、$0 \to M \to M' \to F \to 0$ を左 R 加群の完全列で第 3 項 F は平坦であるとする。このときテンソル積写像 $N \otimes_R M \to N \otimes_R M'$ は単射である。

よって、次の列は完全である：

$$0 \to N \otimes_R M \to N \otimes_R M' \to N \otimes_R F \to 0$$

(2) 左平坦 R 加群 $F.F'$ の全射準同型写像 $g : F \to F'$ の核は平坦である。

注意 6.24. この補題 6.23 は Tor の性質を使うことで見通しよく証明できる。しかし、Tor の構成が平坦分解に依らないことの証明にこの補題を用いる。上手く理論を組み立てれば循環論法にならない様にできると思うが、ここでは Tor を用いない証明を与える。

Proof. (1) 射影的右 R 加群からの全射準同型写像 $f : Q \to N$ を選ぶ。$K := \Omega N = \mathrm{Ker}\, f$ とおく。$g : K \to P$ を標準的な単射とする。

次の図式で各行各列が完全であるものができる：

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & K \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "g\otimes M"'] & K \otimes_R M' \arrow[r] \arrow[d, "g\otimes M'"'] & K \otimes_R F \arrow[r] \arrow[d, "g\otimes F"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes M"'] & Q \otimes_R M' \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes M'"'] & Q \otimes_R F \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes F"] & 0 \\
 & N \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d] & N \otimes_R M' \arrow[r] \arrow[d] & N \otimes_R F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

第二行（Q を含む行）、第三列（F を含む列）の完全性は Q, F が平坦であることから従う。

蛇の補題を第一行第二行に適用することで、次の完全列を得る：

$$0 = \mathrm{Ker}(g \otimes F) \to N \otimes_R M = \mathrm{Cok}(g \otimes M) \to N \otimes_R M' = \mathrm{Cok}(g \otimes M')$$

つまり、準同型写像 $N \otimes_R M \to N \otimes_R M'$ が単射であることが分かる。

(2) 蛇の補題を使うと出来る。

□

7 複体（鎖複体、余鎖複体）

7.1

7.1.1 複体

定義 7.1. (1) R 加群の<u>**余鎖複体（cochain complex）**</u>$M = (\{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}},\ \{d^i\}_{i\in\mathbb{Z}})$ とは $\mathbb{Z}$ で添え字付けられた R 加群 M^i と R 準同型写像 $d^i : M^i \to M^{i+1}$ の組で任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして $d^{i+1} \circ d^i = 0$ を満たすものをいう。下の様に表すことが多い：

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} M^{i+2} \to \cdots$$

(2) 余鎖複体 M にたいして次数 i の項 M^i の要素 $m \in M^i$ を**次数 i の余鎖 (cochain)** と呼ぶ。次数 i の余鎖 m で $d^i(m) = 0$ となるものを**次数 i の余輪体 (cocycle)** と呼ぶ。また、d^{i-1} の像のことを**次数 i の余境界 (coboundary)** と呼ぶ。

$\mathsf{Z}^i(M) := \operatorname{Ker} d^i$ を cochain のなす部分 R 加群、$\mathsf{B}^i(M) := \operatorname{Im} d^{i-1}$ を coboundary のなす部分 R 加群とする。

- $d^i \circ d^{i-1} = 0$ より $\mathsf{B}^i(M) \subset \mathsf{Z}^i(M)$ であることに注意しておく。

(3) 余鎖複体 M の第 i 次コホモロジー群 $\mathsf{H}^i(M)$ を

$$\mathsf{H}^i(M) := \mathsf{Z}^i(M)/\mathsf{B}^i(M) = \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$$

と定める。

(4) 余鎖複体 M が **非輪状 (acyclic)** とは、任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして $\mathsf{H}^i(M) = 0$ がなりたつことをいう。

(5) n を整数とする。余鎖複体 M の n 次シフト $M[n]$ を以下で定める：

$$(M[n])^i := M^{i+n}, \quad d^i_{M[n]} := (-1)^n d^{i+n}_M.$$

- 1 シフトのことを ΣM と書くこともある。この流儀では n シフトは $\Sigma^n M$ と書く。

（関手の可換性やそれに起因する符号を扱うときには [1] ではなく Σ を使わないとややこしさが倍増することがある。）（この講義ではないけれど。。。。。）

定義 7.2. (1) R 加群の**鎖複体（chain complex）**$M = (\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}})$ とは $\mathbb{Z}$ で添え字付けられた R 加群 M_i と R 準同型写像 $d_i : M_i \to M_{i-1}$ の組で任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして $d^i \circ d^{i+1} = 0$ を満たすものをいう。下の様に表すことが多い：

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M^{i-2} \to \cdots$$

(2) 鎖複体 M にたいして次数 i の項 M_i の要素 $m \in M_i$ を**次数 i の鎖 (chain)** と呼ぶ。次数 i の鎖 m で $d_i(m) = 0$ となるものを**次数 i の輪体 (cycle)** と呼ぶ。また、d_{i+1} の像のことを**次数 i の境界 (boundary)** と呼ぶ。

$\mathsf{Z}_i(M) := \operatorname{Ker} d_i$ を chain のなす部分 R 加群、$\mathsf{B}_i(M) := \operatorname{Im} d_{i-+}$ を boundary のなす部分 R 加群とする。

- $d_i \circ d_{i+1} = 0$ より $\mathsf{B}_i(M) \subset \mathsf{Z}_i(M)$ であることに注意しておく。

(3) 鎖複体 M の第 i 次ホモロジー群 $\mathsf{H}_i(M)$ を

$$\mathsf{H}_i(M) := \mathsf{Z}_i(M)/\mathsf{B}_i(M) = \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i-1}$$

と定める。

(4) 鎖複体 M が **非輪状 (acyclic)** とは、任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして $\mathsf{H}_i(M) = 0$ がなりたつことをいう。

- 加群の列とみると、非輪状というのはその列が完全列ということに他ならない。なので非輪状複体のことを完全複体 (exact complex) ということが偶にある。

（完璧複体 (perfect complex) と紛らわしいので、日本語では言わない方がいい。）

(5) n を整数とする。鎖複体 M の n 次シフト $M[n]$ を以下で定める：

$$(M[n])_i := M_{i-n}, \quad d^i_{M[n]} := (-1)^n d_{M,i-n}.$$

注意 7.3.

- 余鎖複体と鎖複体は以下の対応で入れ替わる：

  $$M_i := M^{-i}, \quad d_i := d^{-i}$$

  本質的には同じものである。ここからは鎖複体と余鎖複体をまとめて複体と呼ぶ。

  基本的には余鎖複体を扱うが、同じ概念は鎖複体にたいして定義される。

- 複体 M の定義に含まれる R 準同型写像 d^i のことを第 i 次の微分 (differential) 写像とよぶ。

  M^i の事は第 i 項 (the i-th term) と呼ぶ。

- 複体には次数付けの情報が含まれていることに注意しておく。完全列を定義したときには加群の位置を気にしていなかったが、それを勘定に入れなければいけないということ。

- 鎖複体にまつわる次数付けのことをホモロジー次数、余鎖複体の場合はコホモロジー次数と呼ぶ。

  文献によってどちらを使うかは変わってくる。

例 7.4. R 加群を M を以下の方法で複体と見做す：

- （項）　0 次以外は 0 加群、0 次の項は M.
- （微分）微分は全て 0.

以下、何も言わずに R 加群をこの方法で複体と見做すことがおおい。

7.1.2　複体の準同型写像

定義 7.5. (1) M, N を R 加群の複体とする。<u>**複体の準同型 (あるいは cochain map)**</u> $f : M \to N$ とは $\mathbb{Z}$ で添え字付けられた R 準同型写像 $f^i : M^i \to N^i$ で以下を満たすものをいう：

$$d^i_N \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i_M \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}$$

複体の準同型写像 f のことを $f = \{f^i\}$ とか表すこともある。

- 複体の準同型写像 $f : M \to N$ は cocycle 群、cobundary 群を保つ。つまり次がなりたつ：

  $$f^i(\mathsf{Z}^i(M)) \subset \mathsf{Z}^i(N), \quad f^i(\mathsf{B}^i(M)) \subset \mathsf{B}^i(N)$$

  よって、コホモロジー群の間の R 準同型写像

  $$\mathsf{H}^i(f) : \mathsf{H}^i(M) \to \mathsf{H}^i(N)$$

  を誘導する。（下の補題 7.13 で示す。）

(2) 複体の準同型写像の空間を $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(M, N)$ であらわす：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(M, N) := \{(f^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M^i, N^i) \mid \forall i \in \mathbb{Z},\ d^i_N \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i_M\}$$

(3) 複体の準同型写像 $f : M \to N$ が擬同型 (quasi-isomorphism)とは任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして $\mathsf{H}^i(f)$ が同型であることをいう。

(4) 複体 M の恒等射 id_M を $\mathrm{id}_M := \{\mathrm{id}_{M^i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と定義する。

恒等射のコホモロジー射は恒等射である：$\mathsf{H}^i(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathsf{H}^i(M)}$. なので、とくに恒等射は擬同型である。

(5) 複体の準同型の合成は各項毎の合成により定義する。

つまり、複体の射 $f : M \to N, \quad g : N \to L$ の合成 $g \circ f : M \to L$ を各次数の R 準同型写像が以下で与えれるものと定める：

$$(g \circ f)^i := g^i \circ f^i : M^i \to N^i \to L^i.$$

合成はコホモロジー射をとる操作と可換である：$\mathsf{H}^i(g \circ f) = \mathsf{H}^i(g) \circ \mathsf{H}^i(f)$.

特に擬同型写像の合成は擬同型写像である。

同型写像には逆が存在するので二つの加群が同型ということは同型写像の存在として定義される。擬同型写像 $f : M \to N$ が存在しても逆向きの擬同型写像 $g : N \to M$ が存在するとは限らないので、二つの複体が擬同型ということの定義は面倒になる。

定義 7.6. 複体 M, N が 擬同型 (quasi-isomorphic)とは複体の列 $M_1 = M, M_2, M_3, \ldots, M_r = N$ と擬同型写像の列

$$M_1 \leftarrow M_2 \to M_3 \leftarrow \cdots \to M_{r-1} \leftarrow M_r$$

が存在することをいう。

適当に恒等写像を挟み込むことで、

$$M_1 \to M_2 \leftarrow \cdots$$

という図式も考えていることにできる。

7.1.3 Hom 複体

定義 7.7. M, N を複体とする。

(1) n を整数とする。 次数 n の射$h : M \to N$ とは $\mathbb{Z}$ で添え字付けられた R 準同型写像

$$h^i : M^i \to N^{i+n}$$

のことをいう。

（注：微分との可換性は課さない。）

- 次数 n の射とは次の集合の要素である $\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M^i, N^{i+n})$.
- 複体の準同型写像は次数 0 の射に微分との整合性を課したものである。

(2) 次数 n の射 $f : M \to N$ と次数 m の射 $g : N \to L$ の合成 $g \circ f : M \to L$ は各項毎に合成で定義される：

$$(g \circ f)^i := g^{i+n} \circ f^i : M^i \to N^{i+n} \to L^{i+N+m}.$$

これは次数 $n + m$ の射である。

- 文献によっては次数 n の射 $h : M \to N$ と次数 0 の射 $h : M \to N[n]$ を同一視するものがある。（古い文献では特にその傾向が強い。問題が起こらないことが多いが、将来で微分次数付加群を扱う様になると、この二つの区別を付けた方がいい。）（この講義ではそういう方面まで踏み込めない。）

定義 7.8. R 加群の複体 M, N の Hom 複体 $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N)$ とは以下で定義される $\mathbb{Z}$ 加群の複体である：

- （項）整数 n にたいして第 n 項を n 次射の空間とする：

$$\mathrm{Hom}_R^n(M,N) := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M^i, N^{i+n}).$$

- （微分）整数 n にたいして微分 d_{Hom}^n を以下でさだめる：

$$d_{\mathrm{Hom}}(f) := d_N \circ f + (-1)^{n+1} f \circ d_M \quad \text{for all } f \in \mathrm{Hom}_R^n(M,N).$$

 上では d_N, d_M を次数 1 の射とみている。

命題 7.9. R 加群の複体 M, N にたいして次が成り立つ：

(1) 次数 0 の射 $f : M \to N$ が複体の準同型写像であるための必要十分条件はこれが Hom 複体の要素として *cocycle* であることである。

 よって、

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(M,N) = \mathsf{Z}^0(\mathrm{Hom}_R(M,N))$$

 がなりたつ。

(2) 複体の準同型写像 $f, g : M \to N$ にたいして、次数 -1 の射 $h : M \to N$ が g から f のホモトピーである為の必要十分条件は $f - g = d_{\mathrm{Hom}}(h)$ が成り立つことである。

 よって、

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{H}(R)}(M,N) \cong \mathsf{H}^0(\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N))$$

 がなりたつ。

命題 7.10 (ライプニッツ則)**.** R 加群の複体 L, M, N を考える。Hom 複体 $\mathrm{Hom}_R^\bullet(L,M)$ の次数 m の要素 f と $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N)$ の次数 n の要素 g にたいして次がなりたつ：

$$d(g \circ f) = d(g) \circ f + (-1)^n g \circ d(f)$$

ただし、微分 d は左から $\mathrm{Hom}_R^\bullet(L,N)$, $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N)$, $\mathrm{Hom}_R^\bullet(L,M)$ のものである。

7.1.4 複体のテンソル積

定義 7.11. 右 R 加群の複体 M と左 R 加群の複体 N のテンソル積 $M \otimes_R N$ とはつぎで定義される $\mathbb{Z}$ 加群の複体である：

- （項）整数 n にたいして n 次の項を以下で定める：

$$(M \otimes_R N)^n := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i \otimes_R N^{n-i}$$

- （微分）整数 n にたいして n 次の微分 $d_{M\otimes_R N}^n$ を以下で定める：

 $m \in M^i,\ n \in N^{n-i}$ から作った $m \otimes n \in M^i \otimes_R M^{n-i}$ にたいして

$$d_{M\otimes_R N}^n(m \otimes n) := d_M(m) \otimes n + (-1)^i m \otimes d_N(n)$$

- コシュール符号規則（Koszul sign rule）というものを用いると上の微分の定義は

$$d_{M\otimes_R N} := d_M \otimes \mathrm{id}_N + \mathrm{id}_M \otimes d_N$$

 と書き表せる。

7.2 複体の射、複体の準同型のホモトピー

定義 7.12. M, N を複体とする。

(1) $f, g : M \to N$ を複体の準同型写像とする。次数 -1 の射 $h : M \to N$ がf から g へのホモトピーとは任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして以下が成り立つことをいう：

$$g^i - f^i = d_N^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_M^i.$$

- 次数 -1 の射 $h : M \to N$ が f から g へのホモトピーなら $-h : M \to N$ は g から f へのホモトピーである。

  なので、文献ではホモトピーの向き（「どっちからどっち」）を気にしないものも多い。

- Hom 複体の微分を使えば定義式は以下の様に書ける：

$$g - f = d_{\mathrm{Hom}}(h)$$

(2) f から g へのホモトピーが存在することをf と g はホモトピックであるという。あるいはホモトピー同値ともいう。

(3) 複体の準同型写像の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(M, N)$ をホモトピー同値の同値関係で割った空間を $\mathrm{Hom}_{\mathsf{H}(R)}(M, N)$ とあらわす。

（ホモトピー同値の同値関係は加法的なのでこの空間も $\mathbb{Z}$ 加群になる。）

(4) $0 : M \to N$ とホモトピックな複体の準同型写像 $f : M \to N$ をヌルホモトピックと呼ぶ。

- ヌルホモトピックな複体の準同型写像 $f : M \to N$ にたいして 0 から f へのホモトピーを f の縮約ホモトピー (contracting homotopy) と呼ぶ。

(5) 複体の準同型写像 $f : M \to N$ のホモトピー逆写像とは複体の準同型写像 $g : N \to M$ で $g \circ f$ が id_M とホモトピー同値であり、$f \circ g$ が id_N とホモトピー同値なものをいう。

- ホモトピー逆写像は存在すればホモトピー同値を除いて一意的である。

(6) ホモトピー逆写像を持つ複体の準同型写像 $f : M \to N$ をホモトピー同値射とよぶ。

(7) 複体 M と N がホモトピー同値とはホモトピー同値射 $f : M \to N$ が存在することをいう。

(8) 恒等射 $\mathrm{id}_M : M \to M$ がヌルホモトピックな複体を**可縮 (contractible)**と呼ぶ。別の言い方をするとゼロ複体 0 とホモトピー同値な複体のことである。

- 複体を加群の列とみると可縮というのはその列が分裂完全列ということに他ならない。（定義を書いてみるとすぐに分かる。）

補題 7.13. *(1)* 複体の準同型写像 $f : M \to N$ は *cocycle* 群、*cobundary* 群を保つ。つまり次がなりたつ：

$$f^i(\mathsf{Z}^i(M)) \subset \mathsf{Z}^i(N), \quad f^i(\mathsf{B}^i(M)) \subset \mathsf{B}^i(N)$$

よって、コホモロジー群の間の R 準同型写像

$$\mathsf{H}^i(f) : \mathsf{H}^i(M) \to \mathsf{H}^i(N)$$

を誘導する。

(2) 複体の準同型写像 $f, g : M \to N$ がホモトピックなら、これらがコホモロジー群に誘導する R 準同型写像は一致する。つまり、任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして次がなりたつ：

$$\mathsf{H}^i(f) = \mathsf{H}^i(g).$$

(3) ホモトピー同値射 : $M \to N$ のコホモロジー射 $\mathsf{H}^i(f) : \mathsf{H}^i(M) \to \mathsf{H}^i(N)$ は同型である。

特にホモトピー同値射は擬同型である。

(4) 可縮複体は非輪状である。

Proof. (1) $m \in \mathsf{Z}^i(M)$ をとってくる。$df(m) = fd(M) = 0$ より $f(m) \in \mathsf{Z}^i(N)$ がなりたつ。また $d(m) \in \mathsf{B}^i(M)$ にたいして $f(d(m)) = d(f(m)) \in \mathsf{B}^i(N)$ がなりたつ。

(2) h を g から f へのホモトピーとする。$m \in \mathsf{Z}^i(M)$ をとってくる。$d(m) = 0$ より、次がなりたつ $f(m) - g(m) = d(h(m))$。これは $f(m)$ と $g(m)$ が $\mathsf{B}^i(N)$ を法として一致することを示している。

(3)(4) は (1)(2) より容易に従う（ので演習問題とする）。 □

次も定義を確かめることで（ので演習問題とする）。

命題 7.14. *(1)* $f, f', f'' : M \to N$ を複体の準同型写像し、h を f から f' へのホモトピー、h' を f' から f'' へのホモトピーとする。すると $h + h'$ は f から f'' へのホモトピーである。

(2) $f, f' : M \to N,\ g : N \to L$ を複体の準同型写像、h を f から f' へのホモトピーとする。

このとき、合成写像 $g \circ h$ は $g \circ f$ から $g \circ f'$ へのホモトピーである。

(3) $f, f' : M \to N,\ g : L \to M$ を複体の準同型写像、h を f から f' へのホモトピーとする。

このとき、合成写像 $h \circ g$ は $f \circ g$ から $f' \circ g$ へのホモトピーである。

7.2.1 ホモトピー同値

複体の準同型写像 $f : M \to N$ がホモトピー同値とは複体の準同型写像 $g : N \to M$ と次数 -1 の射 $h : M \to M,\ k : N \to N$ が存在して次を満たすことだった：

$$1 - g \circ f = d_{\mathrm{Hom}}(h),\ 1 - f \circ g = d_{\mathrm{Hom}}(k). \tag{7-6}$$

ホモトピー h を取り替えることで状況をよくできる。

補題 7.15 (強ホモトピーへの取り替え)**.** 複体の準同型写像 $f : M \to N$ がホモトピー同値とは複体の準同型写像 $g : N \to M$ と次数 -1 の射 $h : M \to M,\ k : N \to N$ と次数 -2 の射 $l : M \to N$ が存在して次を満たす：

$$1 - g \circ f = d_{\mathrm{Hom}}(h),\ 1 - f \circ g = d_{\mathrm{Hom}}(k),\ k \circ f - f \circ h = d_{\mathrm{Hom}}(l)$$

Proof. 等式 (7-6) を満たす g, h, k を選ぶ。$h' := h + g \circ (k \circ f - f \circ h),\ \ l = k \circ (k \circ f - f \circ h)$ が目的の性質を満たすことが以下の様に示せる：

ライプニッツ則を使って計算していくだけ

$$\begin{aligned}
d(k \circ f - f \circ h) &= d(k) \circ f - f \circ d(h) = (1 - f \circ g) \circ f - f \circ (1 - g \circ f) = 0, \\
d(h') &= d(h) + g \circ (k \circ f - f \circ h) = 1 - g \circ f \\
d(l) &= d(k) \circ (k \circ f - f \circ h) = (1 - f \circ g) \circ (k \circ f - f \circ h) \\
&= k \circ f - f \circ h - f \circ g \circ k \circ f + f \circ g \circ f \circ h \\
&= k \circ f - f \circ (h + g \circ (k \circ f - f \circ h)) \\
&= k \circ f - f \circ h'
\end{aligned}$$

□

注意 7.16. 意味の分からない補題かもしれないけれども、微分次数付き圏なす圏（the categories of dg-categories）のモデル圏構造を論じるときにも顔をのぞかせる大事な事実。

ここでは直接計算で存在を示したが、よくある証明は複体のホモトピー圏が三角圏であることを証明し、そこから命題 7.28 を示し、その系としてこれを得る。

この講義では三角圏は扱わないので、この補題から命題 7.28 を導出する。

7.2.2 $\uparrow, \downarrow$

定義 7.17. (1) M の次数 i の要素 $m \in M^i$ を $M[-1]$ の次数 $i+1$ の要素 $m \in (M[-1])^{i+1}$ と見做すことで得られる次数 1 の写像を

$$\uparrow\colon M \to M[-1], \quad m \mapsto \uparrow m$$

とあらわす。

別の言い方をすると恒等写像 $\mathrm{id} : M \to M$ から誘導される射である。

(2) M の次数 i の要素 $m \in M^i$ を $M[1]$ の次数 $i1$ の要素 $m \in (M[1])^{i-1}$ と見做すことで得られる次数 -1 の写像を

$$\downarrow\colon M \to M[-1], \quad m \mapsto \downarrow m$$

とあらわす。

別の言い方をすると恒等写像 $\mathrm{id} : M \to M$ から誘導される射である。

(3) その他の場合でも $\uparrow\colon M[1] \to M$, $\downarrow\colon M[-1] \to M$ とか同様の射を表す。

- 注意：この記号は主流ではない。よくあるのは s, ω です。恨らく suspension Σ と loop space Ω に由来するのでしょう。

例 7.18. 複体 M のシフト $M[1]$ の微分 $d_{M[1]}$ は

$$d_{M[1]} = -\downarrow \circ d_M \circ \uparrow\colon M[1] \xrightarrow{\uparrow} M \xrightarrow{d_M} M \xrightarrow{\downarrow} M[1]$$

と表せる。

より一般に次数 n の複体の射 $f : M \to N$ にたいして

$$f[1] := (-1)^n \downarrow \circ f \circ \uparrow\colon M[1] \to N[1]$$

と定義することがある。これを採用すれば

$$d_{M[1]} = (d_M)[1]$$

がなりたつ。ただし、

$$f[1] := \downarrow \circ f \circ \uparrow$$

と定義する流儀もあるから注意が必要。

7.2.3 可縮性の判定

命題 7.19. R 加群の複体 M にたいして次は同値：

(1) M は可縮。

(2) 任意の R 加群の複体 N にたいして $\mathrm{Hom}^\bullet_R(N, M)$ は可縮。

(3) 任意の R 加群の複体 N にたいして $\mathrm{Hom}_R^\bullet(N,M)$ は非輪状。

(4) 任意の R 加群の複体 N にたいして $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N)$ は可縮。

(5) 任意の R 加群の複体 N にたいして $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N)$ は非輪状

(6) 複体 $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,M)$ は非輪状。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). h を M の収縮ホモトピーとする。次を示せばよい：

主張 7.20. 複体 $\mathrm{Hom}_R^\bullet(N,M)$ の次数 1 の自己写像 $h_*: f \mapsto h \circ f$ が $\mathrm{Hom}_R^\bullet(N,M)$ の収縮ホモトピーである。

Proof. $f \in \mathrm{Hom}_R^n(N,M)$ をとってくる。次の計算から $(d_{\mathrm{Hom}} \circ h_* + h_* \circ d_{\mathrm{Hom}})(f) = f$ がわかる：

$$d_{\mathrm{Hom}}(h_*(f)) = d_{\mathrm{Hom}}(h \circ f) = d_{\mathrm{Hom}}(h) \circ f - h \circ d_{\mathrm{Hom}}(f) = f - h_*(d_{\mathrm{Hom}}(f))$$

ただし、二つ目の等号はライプニッツ則を、三つ目では $d_{\mathrm{Hom}}(h) = \mathrm{id}_M$ を用いた。 □

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6) は自明。

(6) $\Rightarrow$ (1) を示す。cocycle である恒等射 $\mathrm{id}_M \in \mathsf{Z}^0(\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,M))$ は coboundary である。ゆえにある $h \in \mathrm{Hom}_R^{-1}(M,M)$ が存在して $d_{\mathrm{Hom}}(h) = \mathrm{id}_M$ を満たす。

(1) $\Rightarrow$ (4). h を M の収縮ホモトピーとする。次が示せる。

主張 7.21. 複体 $\mathrm{Hom}_R^\bullet(N,M)$ の次数 1 の自己写像 $h^*: f \mapsto (-1)^n f \circ h$（ただし n は f の次数）が $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,N)$ の収縮ホモトピーである。

あとは上と同様。

□

7.3 複体の完全列とコホモロジー長完全列

7.3.1

定義 7.22. 複体の準同型写像 $f: M \to N$ の核 $\mathrm{Ker}\, f$, 像 $\mathrm{Im}\, f$, 余核 $\mathrm{Cok}\, f$ を各項 f^i の核、像、余核を項とし、M, N の微分から誘導される R 準同型写像を微分とする複体と定める。

定義 7.23. 複体の図式

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が複体の完全列とは、各次数毎に完全列になっていることをいう。

つまり、任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして次の列は完全：

$$0 \to L^i \xrightarrow{f^i} M^i \xrightarrow{g^i} N^i \to 0.$$

別の言い方をすると次がなりたつ：

$$\mathrm{Ker}\, f = 0, \quad \mathrm{Cok}\, g = 0, \quad \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f.$$

ホモロジー代数の基礎は次の定理である：

定理 7.24 (コホモロジー長完全列)**.** 複体の完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

からコホモロジー群の完全列

$$\cdots \to \mathsf{H}^{i-1}(N) \xrightarrow{\partial^{i-1}} \mathsf{H}^i(L) \xrightarrow{\mathsf{H}^i(f)} \mathsf{H}^i(M) \xrightarrow{\mathsf{H}^i(g)} \mathsf{H}^i(N) \xrightarrow{\partial^i} \mathsf{H}^{i+1}(M) \to$$

が誘導される。ただし、各 $i \in \mathbb{Z}$ にたいして準同型写像 $\partial^i : \mathsf{H}^i(N) \to \mathsf{H}^{i+1}(L)$ は次で定義される：

Step 1. $n \in \mathsf{Z}^i(N)$ をとってくる。$g^i : M^i \to N^i$ は全射なので、ある $m \in M^i$ が存在して $g^i(m) = n$ を満たす。

Step 2. $g^{i+1}(d^i_M(m)) = d^i_N(g^i(m)) = d^i_N(n) = 0$ なので、ある $l' \in L^{i+1}$ が存在して $f^{i+1}(l') = d^i_M(m)$ を満たす。

Step 3. $f^{i+2}(d^{i+1}_L(l')) = d^{i+1}_M(f^{i+1}(l')) = d^{i+1}_M(d^i_M(m)) = 0$ である。f^{i+2} は単射なので l' は $\mathsf{Z}^{i+1}(L)$ に属する。

Step 4. $\partial(n) := l' \mod \mathsf{B}^i(L)$ と定める。

- 準同型写像 ∂^i のことを**連結準同型写像 (connecting homomorphism)**と呼ぶ。

次の補題が必要です。

補題 7.25. 余鎖複体 M と整数 i にたいして次の完全列が存在する：

$$0 \to \mathsf{H}^{i-1}(M) \to M^{i-1}/\mathsf{B}^{i-1}(M) \to \mathsf{Z}^i(M) \to \mathsf{H}^i(M) \to 0$$

ただし、真ん中の写像は微分から誘導されるものである。

定理 7.24 の証明. 蛇の補題（命題 5.21）を次の図式（ただし各行は完全）に適用すれば補題 7.25 から主張は得られる：

(7-7)
$$\begin{tikzcd}
 & L^{i-1}/\mathsf{B}^{i-1}(L) \arrow[r] \arrow[d] & M^{i-1}/\mathsf{B}^{i-1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & N^{i-1}/\mathsf{B}^{i-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Z}^i(L) \arrow[r] & \mathsf{Z}^i(M) \arrow[r] & \mathsf{Z}^i(N) &
\end{tikzcd}$$

（上の各行が完全なことも蛇の補題（のクネってないところ）から従う。）

□

7.4 写像錐

定義 7.26. 複体の準同型写像 $f : M \to N$ の**写像錐 (mapping cone)（あるいは　錐 (cone))**$\mathsf{cn}(f)$ とは以下の方法で定まる R 加群の複体である：

- （下部次数加群）

$$\mathsf{cn}(f) := N \oplus M[1].$$

次数ごとに書くと

$$\mathsf{cn}(f)^i := N^i \oplus M^{i+1}.$$

- （微分）

$$d_{\mathsf{cn}(f)} := \begin{pmatrix} d_N & f\circ\uparrow \\ 0 & d_{M[1]} \end{pmatrix}$$

と定める。ただし $\uparrow : M[1] \to M$ は標準的な次数 1 の射である。

次数ごとに書くと

$$d^i_{\mathsf{cn}(f)} = \begin{pmatrix} d^i_N & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_M \end{pmatrix} : N^i \oplus M^{i+1} \to N^{i+1} \oplus M^{i+2}.$$

- 文献によっては直和の順番が逆になっていたり（つまり、$M[1] \oplus N$）、それに伴って微分の行列表示が違ってたりする。

命題 7.27. 複体の準同型写像 $f : M \to N$ にたいして次が成り立つ：

(1) 標準的な単射 $i : N \to N \oplus M[1]$ は複体の準同型写像 $i : N \to \mathsf{cn}(f)$ を誘導する。

(2) 標準的な全射 $p : N \oplus M[1] \to M$ は複体の準同型写像 $p : \mathsf{cn}(f) \to M$ を誘導する。

(3) 次の複体の完全列が得られる：

$$0 \to N \xrightarrow{i} \mathsf{cn}(f) \xrightarrow{p} M[1] \to 0$$

(4) 上の複体の完全列のコホモロジー長完全列の連結準同型写像 ∂^i は f のコホモロジー写像と一致する：

$$[\partial^i : \mathsf{H}^i(M[1]) \to \mathsf{H}^{i+1}(N)] = [\mathsf{H}^{i+1}(f) : \mathsf{H}^{i+1}(M) \to \mathsf{H}^{i+1}(N)]$$

よってコホモロジー長完全列は以下の様になっている：

$$\cdots \to \mathsf{H}^i(M) \xrightarrow{\mathsf{H}^i(f)} \mathsf{H}^i(N) \xrightarrow{\mathsf{H}^i(i)} \mathsf{H}^i(\mathsf{cn}(f)) \xrightarrow{\mathsf{H}^i(p)} \mathsf{H}^{i+1}(M) \xrightarrow{\mathsf{H}^{i+1}(f)} \mathsf{H}^{i+1}(N) \to$$

(5) f が擬同型であるための必要十分条件は写像錐 $\mathsf{cn}(f)$ が非輪状であることである。

Proof. (1)(2) は微分との整合性を直接計算で示そう。(3) は明らか。(4) は連結準同型写像の定義を今の場合に適用すればいい。(5) は (4) から直ちに従う。 □

命題 7.28. 複体の準同型写像 $f : M \to N$ がホモトピー同値射であるための必要十分条件は写像錐 $\mathsf{cn}(f)$ が可縮なことである。

Proof. （必要条件）　補題 7.15 より複体の準同型写像 $g : N \to M$ と次数 -1 の射 $h : M \to M,\ k : N \to N$ と次数 -2 の射 $l : M \to N$ が存在して次を満たす：

$$1 - g\circ f = d_{\mathrm{Hom}}(h),\ 1 - f\circ g = d_{\mathrm{Hom}}(k),\ k\circ f - f\circ h = d_{\mathrm{Hom}}(l)$$

次数 -1 の射 $H : \mathsf{cn}(f) \to \mathsf{cn}(f)$ を次で定める：

$$H := \begin{pmatrix} k & -l\circ\uparrow \\ \downarrow\circ g & -\downarrow\circ h\circ\uparrow \end{pmatrix} : N \oplus M[1] \to N \oplus M[1].$$

これが id の縮約ホモトピーであることが以下の計算でわかる：(合成の記号 $\circ$ を略する)

$$\begin{aligned}
d_{\mathsf{cn}(f)} \circ H + H \circ d_{\mathsf{cn}(f)} &= \begin{pmatrix} d & f\uparrow \\ 0 & -\downarrow d\uparrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & -l\uparrow \\ \downarrow g & -\downarrow h\uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -l\uparrow \\ \downarrow g & -\downarrow h\uparrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & f\uparrow \\ 0 & -\downarrow d\uparrow \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} dk+fg & -dl-\uparrow fh\uparrow \\ -\downarrow dg & \downarrow dh\uparrow \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kd & kf+\uparrow ld\uparrow \\ \downarrow gd & \downarrow gf\uparrow + \downarrow hd\uparrow \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} fg+dk+kd & (-fh+kf-dl+ld)\uparrow \\ \downarrow(-dg+gd) & \downarrow(gf+dh+hd)\uparrow \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

用いていること：$d_{M[1]} = -\downarrow \circ d_M \circ \uparrow, \uparrow\circ\downarrow = 1, \downarrow\circ\uparrow = 1.$
次数 n の複体の射 $\phi : X \to Y$ にたいして $d_{\mathrm{Hom}}(\phi) = d_Y \circ \phi + (-1)^n \phi \circ d_X$.

（十分条件）上の証明の逆をたどればよい。つまり、$\mathrm{id}_{\mathsf{cn}(f)}$ の縮約ホモトピーを行列表示すれば f のホモトピー逆写像がえられる。 □

注意 7.29. 上にも書いた通り、複体のホモトピー圏が三角圏になるということからも従う。そういう証明の方が一般的であるとおもいます。

8 射影分解、入射分解、平坦分解

8.1 射影分解

定義 8.1. (1) R 加群 M の射影分解（projective resolution）とは完全列

$$\cdots \to P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

で各 $i = 0, 1, \ldots$ にたいして P_i が射影加群であるものをいう。

(2) 射影分解で各項 P_i が自由加群であるものを M の自由分解という。

- 正確には複体 $(\{P_i\}_{i\geq 0}, \{d_i\}_{i\geq 1})$ と添加写像 $\epsilon : P_0 \to M$ のことである。
- あるいは、R 加群 M の射影分解というのは複体の擬同型 $\epsilon : P \to M$ のこととも言い換えられる。ただし、
  - ここでは左側の M は R 加群 M を 0 次にだけ項がある複体とみている。
  - 添加写像 $\epsilon : P_0 \to M$ が $\epsilon \circ d_1 = 0$ を満たすということから、複体の準同型写像 $\epsilon : P \to M$ が得られる。
  - ただし、後者は 0 次が ϵ でそれ以外が 0 として定義される。

補題 8.2. 任意の R 加群 M にたいして射影分解は存在する。

8.1.1 リフトと射影分解の一意性

定理 8.3. M, N を R 加群、$\epsilon_P : P \to M,\ \epsilon_Q : Q \to N$ を射影分解とする。このとき、R 加群準同型写像 $f : M \to N$ にたいして複体の準同型 $\tilde{f} : P \to Q$ で

$$f \circ \epsilon_P = \epsilon_Q \circ \tilde{f}$$

を満たすものがホモトピー同値を除いて一意的に存在する。

- これを f のリフトと呼ぶことにする。

Proof. （注意：Q 射影加群の複体でなくてもいい。）
(Step I) まず添加写像と整合的な複体の準同型写像 $\tilde{f}: P \to Q$ の存在を示す。添加写像 $\epsilon_Q : Q_0 \to M$ が全射なので P_0 が射影加群であることより、R 準同型写像 $\tilde{f}_0 : P_0 \to Q_0$ が存在して $\epsilon_Q \circ f_0 = \epsilon_P$ を満たす。これは境界群に準同型写像 $\mathsf{B}_0(P) \to \mathsf{B}_0(Q)$ を誘導する。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{B}_0(P) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r, "\epsilon_P"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{B}_0(Q) \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\epsilon_Q"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

あとは微分から誘導される準同型写像 $Q_i \to \mathsf{Z}_{i-1}(Q) = \mathsf{B}_{i-1}(Q)$ が全射であることを使って先の議論を繰り返せばよい。

(Step II) 次に、ホモトピー同値を除いた一意性を示す。添加写像と整合的な複体の準同型写像 $\tilde{f}, \tilde{f}' : P \to Q$ があったとする。$\tilde{f}'$ から $\tilde{f}$ へのホモトピー h の存在を示す。

$\phi := \tilde{f} - \tilde{f}'$ とおく。これは複体の準同型写像であり $\epsilon_Q \circ \phi_0 = 0$ を満たす：

$$\epsilon_Q \circ \phi = \epsilon_Q \circ \tilde{f} - \epsilon_Q \circ \tilde{f}' = \epsilon_P - \epsilon_P = 0.$$

よって、$\operatorname{Ker} \epsilon_Q = \mathsf{B}_0(Q)$ だったので、$\phi_0 : P_0 \to Q_0$ は $\mathsf{B}_0(Q)$ を経由する。P_0 が射影的なので、それは Q_1 を経由する。その準同型写像を $h_0 : P_0 \to Q_1$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{B}_1(P) \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_{P,1}"] \arrow[d, "\phi_1"] & P_0 \arrow[d, "\phi_0"] \arrow[dl, "h_0"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathsf{B}_1(Q) \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_{Q,1}"'] & \mathsf{B}_0(Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

つまり h_0 は $d_{Q,1} \circ h_0 = \phi_0$ を満たす準同型写像である（つまり一番右の三角形は可換。その隣は可換とは限らない。）。$d_{Q,1} \circ (\phi_1 - h_0 \circ d_{P,1}) = 0$ である：

$$d_{Q,1} \circ (\phi_1 - h_0 \circ d_{P,1}) = d_{Q,1} \circ \phi_1 - (d_{Q,1} \circ h_0) \circ d_{P,1} = \phi_1 \circ d_{P,1} - \phi_1 \circ d_{P,1} = 0.$$

よって、$\operatorname{Ker} d_{Q,1} = \mathsf{B}_1(Q)$ より、準同型写像 $\phi_1 - h_0 \circ d_{P,1}$ は $\mathsf{B}_1(Q)$ を経由する。さらに P_1 が射影的であることから、その準同型写像は Q_2 を経由する。その準同型写像 $h_1 : P_1 \to Q_2$ とおく。これは定義より等式 $d_{Q,2} \circ h_1 = \phi - h_0 \circ d_{P,1}$ を満たす。これは $\tilde{f} - \tilde{f}' = h_0 \circ d_{P,1} + d_{Q,2} \circ h_1$ というホモトピー同値の式に他ならない。

この操作を繰り返すことで目標とするホモトピー同値が作れる。 □

射影分解はホモトピー同値を除いて一意的です。より詳しくは次が成り立ちます。

系 8.4. M を R 加群、$\epsilon_P : P \to M,\ \epsilon_Q : Q \to M$ を射影分解とする。このとき、添加写像と整合的なホモトピー同値準同型 $f : P \to Q$ がホモトピー同値を除いて一意的に存在する。

Proof. 定理 8.3 を $N = M,\ f = \mathrm{id}_M : M \to M$ に適用することで恒等射 id_M のリフト $f : P \to Q$ が得られる。また、同じ定理を使うことで恒等射 id_M のリフト $g : Q \to P$ が得られる。合成 $g \circ f : P \to P$ も恒等射 id_M のリフトである。一方、恒等射 $\mathrm{id}_P : P \to P$ もそうである。同定理の一意性より $g \circ f$ は id_P とホモトピックである。同様に $f \circ g$ も id_Q とホモトピックである。 □

8.1.2　完全列のリフト

定理 8.5. R 加群の完全列

$$0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \to 0$$

にたいして、各項の射影分解で次の図式を可換にし、上の行を完全列にするものが存在する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\epsilon_P"'] & P' \arrow[r, "\tilde{f}'"] \arrow[d, "\epsilon_{P'}"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{P''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & M' \arrow[r, "f'"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proof. （証明その１．よくある証明）M と M'' の射影分解 $\epsilon_P P \to M$ と $\epsilon_{P''} : M'' \to P''$ を選ぶ。$f' : M' \to M''$ が全射なので、R 準同型写像 $\epsilon'' : P'' \to M'$ で $f' \circ \epsilon'' = \epsilon_{P''}$ を満たす。$\epsilon' := f \circ \epsilon_P$ と定め、$P'_0 := P_0 \oplus P'_0$

$$\epsilon_{P'} = \begin{pmatrix} \epsilon' & \epsilon'' \end{pmatrix} : P'0 = P_0 \oplus P'_0 \to M'$$

とおく。これは全射である。すると次の可換図式で行が完全なものが得られる：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, "\epsilon_P"'] & P'_0 \arrow[r, "\tilde{f}'_0"] \arrow[d, "\epsilon_{P'}"] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{P''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & M' \arrow[r, "f'"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ただし $\tilde{f}_0$ は標準的な単射、$\tilde{f}'$ は標準的な全射である。

　蛇の補題より、誘導される R 準同型写像 $\mathrm{Ker}\, \epsilon_{P'} \to \mathrm{Ker}\, \epsilon_{P''} = \mathsf{B}_0(P'')$ が全射であることが分かる。

　完全列 $0 \to \mathsf{B}_0(P) \to \mathrm{Ker}\, \epsilon_{P'} \to \mathsf{B}_0(P') \to 0$ に上の議論を適用して、全射 $P_1 \oplus P''_1 \to \mathrm{Ker}\, \epsilon_{P'}$ を構成することが出来る。

　このように同じ議論を繰り返すことで、M' の射影分解 $\epsilon_{P'} : P' \to M'$ で目的を満たすものが得られる。

□

8.2　射影加群の複体と $\mathrm{Hom}^\bullet$

R 加群 M の射影分解とは射影加群の複体で M と擬同型なものだった。

　射影加群の複体もつ性質を挙げる。

補題 8.6. P を射影加群の複体とする。このとき、複体の完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

から誘導される次の列も完全である：

$$0 \to \mathrm{Hom}^\bullet_R(P, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}^\bullet_R(P, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}^\bullet_R(P, N) \to 0$$

定理 8.7. P を射影加群の複体で上に有界（$P^i = 0$ *for* $i \gg 0$）なものとする。（注意：射影分解とは異なりコホモロジー次数を使っている。）

(1) 複体 A が非輪状であれば Hom 複体 $\mathrm{Hom}^\bullet_R(P, A)$ は非輪状である。

　（この性質を h-射影的,K-射影的と呼んだりする。）

(2) $f : M \to N$ が擬同型写像ならば誘導される準同型写像 $f_* : \mathrm{Hom}^\bullet_R(P, M) \to \mathrm{Hom}^\bullet_R(P, N)$ も擬同型写像である。

Proof. (1) 次数 n の cocycle $f \in \mathsf{Z}^n(\mathrm{Hom}^\bullet_R(P, A))$ は複体の準同型写像 $f : P \to A[n]$ を誘導する。f が coboundary とはこれがヌルホモトピックということである。そのことは定理 8.3 の証明の Step II と同様に示せる。

(2) 擬同型 $f : M \to N$ の錘完全列

$$0 \to N \to \mathsf{cn}(f) \to M[1] \to 0$$

にたいして $\mathrm{Hom}^\bullet_R(P, -)$ を施す。得られる Hom 複体の完全列のコホモロジー超完全列に (1) を適用すればいい。 □

注意 8.8. 上の定理 8.7 の成立には上に有界という仮定が必要です。この仮定を外すと次の反例があります：

環 $R := \mathbf{k}[x]/(x^2)$ 上の複体

$$P : \cdots \to R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \to \cdots$$

（つまり各項が R で微分は x を掛ける写像）という複体は射影加群の非輪状複体です。しかし、可縮ではないので命題 7.19 より $\mathrm{Hom}^\bullet_R(P, P)$ は非輪状ではありません。

8.3 入射分解

定義 8.9. (1) R 加群 M の入射分解（injective resolution）とは完全列

$$0 \to M \to I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

で各 $i = 0, 1, \ldots$ にたいして P_i が入射加群であるものをいう。

- 正確には複体 $(\{I^i\}_{i \geq 0}, \{d_i\}_{i \geq 1})$ と添加写像 $\epsilon : M \to I^0$ のことである。
- あるいは、R 加群 M の入射分解というのは複体の擬同型 $\epsilon : M \to I$ のこととも言い換えられる。ただし、
  - ここでは左側の M は R 加群 M を 0 次にだけ項がある複体とみている。
  - 添加写像 $\epsilon : M \to I^0$ が $d^0 \circ \epsilon = 0$ を満たすということから、複体の準同型写像 $\epsilon : M \to I$ が得られる。
  - ただし、後者は 0 次が ϵ でそれ以外が 0 として定義される。

補題 8.10. 任意の R 加群 M にたいして入射分解は存在する。

入射分解はホモトピー同値を除いて一意的です。より詳しくは次が成り立ちます。定理 8.3 の双対版です。証明は双対的に出来るので省略。

定理 8.11. M, N を R 加群、$\epsilon_I : M \to I,\ \epsilon_J : N \to J$ を射影分解とする。このとき、R 加群準同型写像 $f : M \to N$ にたいして複体の準同型 $\tilde{f} : I \to J$ で

$$\tilde{f} \circ \epsilon_I = \epsilon_J \circ f$$

を満たすものがホモトピー同値を除いて一意的に存在する。

- これを f のリフトと呼ぶことにする。

系 8.12. M を R 加群、$\epsilon_I : M \to I,\ \epsilon_J : M \to J$ を入射分解とする。

このとき、添加写像と整合的なホモトピー同値準同型 $f : I \to J$ がホモトピー同値を除いて一意的に存在する。

8.3.1 完全列のリフト

定理 8.13. R 加群の完全列

$$0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \to 0$$

にたいして、各項の射影分解で次の図式を可換にし、上の行を完全列にするものが存在する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_I"'] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\epsilon_{I'}"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{I''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\tilde{f}"'] & I' \arrow[r, "\tilde{f}'"'] & I'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

8.4 入射加群の複体と $\mathrm{Hom}^\bullet$

R 加群 M の入射分解とは射影加群の複体で M と擬同型なものだった。

入射加群の複体もつ性質を挙げる。

補題 8.14. I を入射加群の複体とする。このとき、複体の完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

から誘導される次の列も完全である：

$$0 \to \mathrm{Hom}^\bullet_R(N, I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}^\bullet_R(M, I) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}^\bullet_R(L, I) \to 0$$

定理 8.15. I を入射加群の複体で下に有界 *($I^i = 0$ for $i \ll 0$)* なものとする。

(1) 複体 A が非輪状であれば Hom 複体 $\mathrm{Hom}^\bullet_R(A, I)$ は非輪状である。

（この性質を h-入射的,K-入射的と呼んだりする。）

(2) $f : M \to N$ が擬同型写像ならば誘導される準同型写像 $f^* : \mathrm{Hom}^\bullet_R(N, I) \to \mathrm{Hom}^\bullet_R(M, I)$ も擬同型写像である。

8.4.1 半単純環と射影加群、入射加群

命題 5.14 から次が従います。

命題 8.16. 環 R に対して次は同値：

(1) R は半単純環。

(2) 任意の R 加群は射影加群。

(3) 任意の R 加群は入射加群。

8.5 平坦分解

8.5.1 平坦加群と複体のコホモロジー群

命題 6.22 から次が従う。

命題 8.17. 平坦 R 加群 M にたいして次がなりたつ：

(1) 右 R 加群の複体 X にたいして、同型

$$\mathsf{B}^i(X \otimes_R M) \cong \mathsf{B}^i(X) \otimes_R M,\ \mathsf{Z}^i(X \otimes_R M) \cong \mathsf{Z}^i(X) \otimes_R M,\ \mathsf{H}^i(X \otimes_R M) \cong \mathsf{H}^i(X) \otimes_R M$$

が任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして存在する。

(2) 右 R 加群の複体の準同型写像 $f : X \to Y$ が擬同型であれば $f \otimes_R M : X \otimes_R M \to Y \otimes_R M$ もそうである。

8.5.2　平坦分解

定義 8.18. (1) R 加群 M の平坦分解（flat resolution）とは完全列

$$\cdots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

で各 $i = 0, 1, \ldots$ にたいして F_i が平坦加群であるものをいう。

- 正確には複体 $(\{F_i\}_{i\geq 0}, \{d_i\}_{i\geq 1})$ と添加写像 $\epsilon : F_0 \to M$ のことである。
- あるいは、R 加群 M の平坦分解というのは複体の擬同型 $\epsilon : F \to M$ のこととも言い換えられる。ただし、
  - ここでは左側の M は R 加群 M を 0 次にだけ項がある複体とみている。
  - 添加写像 $\epsilon : F_0 \to M$ が $\epsilon \circ d_1 = 0$ を満たすということから、複体の準同型写像 $\epsilon : P \to M$ が得られる。
  - ただし、後者は 0 次が ϵ でそれ以外が 0 として定義される。

射影加群は平坦加群なのだった。

補題 8.19. 任意の R 加群 M にたいして射影分解は平坦分解である。特に M の平坦分解は存在する。

8.6　平坦加群の複体と複体のテンソル積

平坦加群の複体もつ性質を挙げる。

補題 8.20. F を平坦加群の複体とする。このとき、右 R 加群の複体の完全列

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

から誘導される次の列も完全である：

$$0 \to X \otimes_R F \xrightarrow{f\otimes F} Y \otimes_R F \xrightarrow{g\otimes F} Z \otimes_R F \to 0$$

定理 8.21. F を平坦加群の複体であり上に有界 *($F^i = 0$ for $i \gg 0$)* とする。

(1) 右 R 加群の複体 A が非輪状であれば複体 $A \otimes_R F$ は非輪状である。
（この性質を h-平坦, K-平坦と呼んだりする。）

(2) $f : X \to Y$ が擬同型写像ならば誘導される準同型写像 $f \otimes X : X \otimes_R F \to Y \otimes_R F$ も擬同型写像である。

Proof. $s \in \mathbb{Z}$ を $F^t = 0$ for $t > s$ を満たすものとする。
整数 n を固定して $\mathsf{H}^n(A \otimes_R F) = 0$ を示そう。
テンソル複体 $A \otimes_R F$ の n 次の項は s の定義より以下の形に書ける：

$$(A \otimes_R F)^n = \bigoplus_{i\leq s} A^{n-i} \otimes_R F^i = (A^{n-s} \otimes_R F^s) \oplus (A^{n-s-1} \otimes_R F^{s-1}) \oplus \cdots \oplus (A^{n-i} \otimes_R F^i) \oplus \cdots$$

微分 $d_{A\otimes F}$ を以下の様に分けて書いておくことが証明の理解に役立つ：

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-s-1}\otimes_R F^s \arrow[u, "(-1)^{n-s-1}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s}\otimes_R F^s \arrow[u, "(-1)^{n-s}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s+1}\otimes_R F^s \arrow[u, "(-1)^{n-s+1}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s+2}\otimes_R F^s \arrow[u, "(-1)^{n-s+2}A\otimes d_F"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-s-1}\otimes_R F^{s-1} \arrow[u, "(-1)^{n-s-1}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s}\otimes_R F^{s-1} \arrow[u, "(-1)^{n-s}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s+1}\otimes_R F^{s-1} \arrow[u, "(-1)^{n-s+1}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s+2}\otimes_R F^{s-1} \arrow[u, "(-1)^{n-s+2}A\otimes d_F"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-s-1}\otimes_R F^{s-2} \arrow[u, "(-1)^{n-s-1}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s}\otimes_R F^{s-2} \arrow[u, "(-1)^{n-s}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s+1}\otimes_R F^{s-2} \arrow[u, "(-1)^{n-s+1}A\otimes d_F"'] \arrow[r, "d_A\otimes F"] & A^{n-s+2}\otimes_R F^{s-2} \arrow[u, "(-1)^{n-s+2}A\otimes d_F"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

注意：

(i) $A\otimes_R F$ の項は斜めに直和すると得られる。

(ii) 微分の表記にコシュール符号規則は使っていない。使って書くと前の符号を省略できる。

n 次の cocycle$x$ は coboundary であることを示せばいい。

$A\otimes_R F$ の次数 n の要素 x はある $j\le s$ が存在して $j\le i\le s$ にたいして $x_i\in A^{n-i}\otimes_R F^i$ が存在して

$$x=x_s+x_{s-1}+\cdots+x_j$$

とあらわせる。微分を上の図式の中で書く

(8-8)

$$
\begin{tikzcd}
0 & & & \\
x_s \arrow[u] \arrow[r] & (d_A\otimes F)(x_s)+(-1)^{n-s+1}A\otimes d_F(x_{s-1}) & & \\
 & x_{s-1} \arrow[u] \arrow[r] & (d_A\otimes F)(x_{s-1})+(-1)^{n-s+2}A\otimes d_F(x_{s-2}) & \\
 & & x_{s-2} \arrow[u] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

x が cocycle つまり $d_{A\otimes F}(x)=0$ というのは次が成り立つことと言い換えられる：

$$
\begin{aligned}
(d_A\otimes F)(x_s)+(-1)^{n-s+1}A\otimes d_F(x_{s-1})&=0,\\
(d_A\otimes F)(x_{s-1})+(-1)^{n-s+2}A\otimes d_F(x_{s-2})&=0,\\
&\vdots\\
(d_A\otimes F)(x_{j+1})+(-1)^{n-j}A\otimes d_F(x_j)&=0,\\
(d_A\otimes F)(x_j)&=0.
\end{aligned}
$$

F^j は平坦なので複体 $A\otimes_R F^j$ は非輪状である。よって、$(d_A\otimes F)(x_j)=0$ という仮定から、ある $y_j\in A^{n-j-1}\otimes_R F^j$ が存在して

(8-9) $$(d_A\otimes F)(y_j)=x_j$$

を満たす。

$A^{n-j+1} \otimes_R F^{j+1}$ の要素 $x_{j-1} - (-1)^{n-j-1}(A \otimes d_F)(y_j)$ を考える。$(d_A \otimes F)(x_{j+1} - (-1)^{n-j-1}(A \otimes d_F)(y_j)) = 0$ が次の計算で分かる：

$$\begin{aligned}(d_A \otimes F)(x_{j-1} - (-1)^{n-j-1}(A \otimes d_F)(y_j)) &= (d_A \otimes F)(x_{j+1}) + (-1)^{n-j}(d_A \otimes F)(A \otimes d_F)(y_j)) \\ &= (d_A \otimes F)(x_{j+1}) + (-1)^{n-j}(A \otimes d_F)(d_A \otimes F)(y_j)) \\ &= (d_A \otimes F)(x_{j+1}) + (-1)^{n-j}(A \otimes d_F)(x_j) \\ &= 0\end{aligned}$$

F^{j+1} の平坦性より、上と同じ議論で、ある $y_{j+1} \in A^{n-j-2} \otimes_R F^{j+1}$ で $(d_A \otimes F)(y_{j-1}) = x_{j+1} - (-1)^{n-j-1}(A \otimes d_F)(y_j)$ を満たすものが存在する.。この等式を書き変えると次になる

$$x_{j+1} = (d_A \otimes F)(y_{j-1}) + (-1)^{n-j-1}(A \otimes d_F)(y_j) \tag{8-10}$$

同じ議論を繰り返すことで $i = j+2, \cdots, s$ にたいしても $y_i \in A^{n-i-1} \otimes_R F^i$ で

$$x_i = (d_A \otimes F)(y_i) + (-1)^{n-i}(A \otimes d_F)(y_{i-1}) \tag{8-11}$$

を満たすものが存在することが分かる。

等式 (8-9),(8-10),(8-11) と $F^{s+1} = 0$ をもちいると $y := y_s + y_{s-1} + \cdots + y_j$ が $d_{A \otimes F}(y) = x$ を満たすことが分かる。 □

8.6.1 平坦加群の複体の擬同型写像

定理 8.22. *(1)* F を平坦 R 加群の複体で上に有界かつ非輪状なものとする。

このとき、右 R 加群の複体 N で上に有界なものにたいして複体 $N \otimes_R F$ は非輪状である。

(2) F, F' を平坦 R 加群の複体で上に有界かつ非輪状なものとする。N を右 R 加群の複体で上に有界なものとする。このとき、擬同型写像 $f : F \to F'$ にたいして $N \otimes_R f : N \otimes_R F \to N \otimes_R F'$ も擬同型写像である。

Proof. (1) $s \in \mathbb{Z}$ を任意の $t > s$ にたいして $F^t = 0$ がなりたつものとする。短完全列 $0 \to \mathsf{Z}^{s-1}(F) \to F^{s-1} \to F^s \to 0$ に補題 6.23 を適用することで $\mathsf{Z}^{s-1}(F)$ は平坦と分かる。下の短完全列を使うことで帰納的に任意の $i \in \mathbb{Z}$ にたいして $\mathsf{Z}^i(F)$ は平坦と分かる。

$$0 \to \mathsf{Z}^i(F) \to F^i \to \mathsf{B}^{i+1}(F) \to 0.$$

N が右 R 加群（0 次にだけ項のある複体）の場合、上の観察と補題 6.23 から $N \otimes_R F$ が非輪状と分かる。

一般の場合（N が上に有界な複体の場合）には、加群の場合と定理 8.21 の証明の議論を使えばよい。

(2) 擬同型写像 $f : F \to F'$ の写像錐 $\mathsf{cn}(f)$ は上に有界な平坦加群の非輪状複体である。(1) より $\mathsf{cn}(N \otimes f) \cong N \otimes_R \mathsf{cn}(f)$ は非輪状なので $N \otimes f$ は擬同型写像である。 □

9 Ext

9.1 定義

定義 9.1. n を非負整数とする。R 加群 M, N にたいして n 次拡大群 $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ を以下で定める：

Step 1. M の射影分解 $\epsilon : P \to M$ と N の入射分解 $\lambda : N \to I$ を選ぶ。

Step 2. Hom 複体 $\mathrm{Hom}_R^\bullet(P,I)$ の n 次コホモロジー群として $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ を定める：

$$\mathrm{Ext}_R^n(M,N) := \mathsf{H}^n(\mathrm{Hom}_R^\bullet(P,I)).$$

- これは射影分解、入射分解の取り方に依らない。

命題 9.2. R 加群 M,N にたいして M の射影分解 $\epsilon : P \to M$ と N の入射分解 $\lambda : N \to I$ を選ぶ。すると、誘導される複体の準同型写像

$$\mathrm{Hom}_R^\bullet(P,N) \xrightarrow{\lambda_*} \mathrm{Hom}_R^\bullet(P,I) \xleftarrow{\epsilon^*} \mathrm{Hom}_R^\bullet(M,I)$$

は擬同型である。

よって、特に非負整数 n にたいして次の同型がある：

$$\mathrm{Ext}_R^n(M,N) \cong \mathsf{H}^n(\mathrm{Hom}_R^\bullet(P,N)) \cong \mathsf{H}^n(\mathrm{Hom}_R^\bullet(M,I))$$

命題 9.3. R 加群 M,N にたいして M の射影分解 $\epsilon : P \to M$ と N の入射分解 $\lambda : N \to I$ を選ぶ。すると、誘導される準同型写像

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\epsilon_* \circ \lambda^*} \mathrm{Hom}_R^\bullet(P,I)$$

は 0 次コホモロジー群の同型を誘導する。つまり、次の同型が存在する：

$$\mathrm{Ext}_R^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N)$$

- 以下のこの同型によりこれら二つを同一視する。

9.1.1 関手性

定義 9.4. M,M',N,N' を R 加群とする。n を非負整数とする。

(1) R 加群準同型写像 $f : M \to M'$ にたいして $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $f^* : \mathrm{Ext}_R^n(M',N) \to \mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ を以下で定義する：

Step 1. M,M' の射影分解 $P \to M,\ P' \to M'$ を選ぶ。

Step 2. $f : M \to M'$ のリフト $\tilde{f} : M \to M'$ を選ぶ。

Step 3. Hom 複体に誘導される複体の準同型写像 $\tilde{f}^* : \mathrm{Hom}_R^\bullet(P',N) \to \mathrm{Hom}_R^\bullet(P,N)$ の n 次コホモロジー写像として

$$f^* : \mathrm{Ext}_R^n(M',N) \to \mathrm{Ext}_R^n(M,N)$$

を定義する。

(2) R 加群準同型写像 $g : N \to N'$ にたいして $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $g_* : \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \to \mathrm{Ext}_R^n(M,N')$ を以下で定義する：

Step 1. N,N' の入射分解 $N \to I, N' \to I'$ を選ぶ。

Step 2. $g : N \to N'$ のリフト $\tilde{g} : I \to I'$ を選ぶ。

Step 3. Hom 複体に誘導される複体の準同型写像 $\tilde{g}_* : \mathrm{Hom}_R^\bullet(M,I) \to \mathrm{Hom}_R^\bullet(M,I')$ の n 次コホモロジー写像として

$$g_* : \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \to \mathrm{Ext}_R^n(M,N')$$

を定義する。

補題 9.5. n を非負整数とする。

(1) 加群の準同型写像 $f : M \to M',\ f' : M' \to M''$ にたいして $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$ がなりたつ：

$$(f' \circ f)^* : \mathrm{Ext}^n_R(M'', N) \xrightarrow{f'^*} \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N)$$

(2) 加群の準同型写像 $g : N \to N',\ g' : N' \to N''$ にたいして $(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*$ がなりたつ：

$$(g' \circ g)_* : \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N') \xrightarrow{g'_*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N'')$$

補題 9.6. 等式 $f^* \circ g_* = g_* \circ f^*$ がなりたつ。より詳しくは、次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^n_R(M', N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \arrow[d, "g_*"] \\
\mathrm{Ext}^n_R(M'N') \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Ext}^n_R(M, N')
\end{tikzcd}$$

9.2 Ext 長完全列

定理 9.7. *(1)* R 加群の短完全列 $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \to 0$ から次の完全列が得られる：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{f'^*} \mathrm{Hom}_R(M', N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(M, N) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^n_R(M'', N) \xrightarrow{f'^*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M'', N) \to \cdots$$

(2) R 加群の短完全列 $0 \to N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N'' \to 0$ から次の完全列が得られる：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{g'_*} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(M, N'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N') \xrightarrow{g'_*} \mathrm{Ext}^n_R(M, N'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) \to \cdots$$

Proof. (1) 完全列の射影分解へのリフト（定理 8.5）をとり、補題 8.6 を適用して得られる Hom 複体の完全列のコホモロジー長完全列をとればよい。(2) も同様。 □

9.2.1 Ext 群と射影加群、入射加群

命題 9.8. *(1)* R 加群 M が射影的であるための必要十分条件は任意の加群 N にたいして $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$ が成り立つことである。

(2) R 加群 N が入射的であるための必要十分条件は任意の加群 M にたいして $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$ が成り立つことである。

Proof. (1)（必要条件）M が射影加群とすると M 自身（を 0 次にだけ項がある複体とみたもの）が射影分解である。すると Hom 複体 $\mathrm{Hom}^\bullet_R(M, N)$ は 0 次にだけ項のある複体なので $\mathrm{Ext}^1(M, N) = \mathsf{H}^1(\mathrm{Hom}^\bullet_R(M, N)) = 0$ を得る。

（十分条件）全射 R 準同型写像 $f : N \to N'$ をとる。$N'' := \mathrm{Ker}\, f$ とおく。完全列 $0 \to N'' \to N \to N' \to 0$ の Ext 長完全列より、次の列は完全である：

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(M, N'').$$

仮定より $\mathrm{Ext}^1_R(M, N'') = 0$ である。よって f_* は全射である。 □

9.2.2 syzygy, cosyzygy

定義 9.9. (1) R 加群 M の<u>**1-st syzygy**</u> ΩM を射影加群からの全射 $f : P \to M$ の核と定める。

- 同型類も一意的には定まらない。射影安定圏の対象としては同型を除いて一意的に定まる。

(2) R 加群 M の<u>**1-st cosyzygy**</u> $\Omega^{-1}M$ を入射加群への単射 $f : M \to I$ の余核と定める。

- 同型類も一意的には定まらない。入射安定圏の対象としては同型を除いて一意的に定まる。

補題 9.10. M, N を R 加群とする。

(1) 射影加群からの全射 $f : P \to M$ から誘導される短完全列 $0 \to \Omega M \to P \to M \to 0$ の Ext 完全列を考えることで、つぎの完全列と同型が得られる：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(P, N) \to \mathrm{Hom}_R(\Omega M, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to 0.$$
$$\mathrm{Ext}^n_R(\Omega M, N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) \quad \text{for all } n \geq 1$$

二つ目の同型は連結準同型写像である。

(2) 入射加群への単射 $f : N \to I$ から誘導される短完全列 $0 \to N \to I \to \Omega^{-1}N \to 0$ の Ext 完全列を考えることで、つぎの完全列と同型が得られる：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, I) \to \mathrm{Hom}_R(M, \Omega^{-1}N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to 0.$$
$$\mathrm{Ext}^n_R(M, \Omega^{-1}N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) \quad \text{for all } n \geq 1$$

二つ目の同型は連結準同型写像である。

9.2.3 半単純環の Ext^1 をもちいた特徴づけ

命題 8.16 と命題 10.9 をあわせると次を得ます：

系 9.11. 環 R が半単純環であるための必要十分条件は任意の加群 M, N にたいして $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$ が成り立つことである。

9.3 Ext^1_R と短完全列

9.3.1 $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ の記述

命題 9.12. R 加群 M, N の 1 次 *Ext* 群 $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ は次の様に構成される $\mathbb{Z}$ 加群と同型である：

(1) *Step 1.* 射影加群 P_0 からの全射 $f_0 : P_0 \to M$ をひとつ選ぶ。(系 *6.3* より存在する。)

Step 2. その核を M_1 と表し、自然な入射を g とおく。

ここまでで次の完全列が得られている：

$$0 \to M_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0 \qquad \text{(9-12)}$$

Step 3. 写像 $(g_1)^* : \mathrm{Hom}_R(P, N) \to \mathrm{Hom}_R(M_1, N)$ の余核は $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ と同型である：

$$\mathrm{Ext}^1_R(M, N) \cong \mathrm{Cok}[(g_1)^* : \mathrm{Hom}_R(P, N) \to \mathrm{Hom}_R(M_1, N)]$$

(2) *Step 1.* 入射加群 I^0 への単射 $f^0 : N \to I^0$ をひとつ選ぶ。(命題 *6.8* より存在する。)

Step 2. その余核を N^1 と表し、自然な全射を g^1 とおく。

ここまでで次の完全列が得られている：

$$0 \to N \xrightarrow{f^0} I^0 \xrightarrow{g^1} N^1 \to 0$$

Step 3. 写像 $(g_1)_* : \mathrm{Hom}_R(M, I^0) \to \mathrm{Hom}_R(M, N^1)$ の余核は $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ と同型である：

$$\mathrm{Ext}^1_R(M, N) \cong \mathrm{Cok}[(g^1)_* : \mathrm{Hom}_R(M, I) \to \mathrm{Hom}_R(M, N^1)]$$

9.3.2　1 次米田拡大群 $\mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$

定義 9.13. R 加群 M, N にたいして集合 $\mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$ を以下で定義し、これを<u>1 次米田 **Ext** 群</u>と呼ぶ：

Step 1. M が右端、N が左端という形の完全列 $\epsilon : 0 \to N \to L \to M \to 0$ を N による M の拡大と呼ぶ。

Step 2. まず、$\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{xt}^1}_R(M,N)$ を拡大 $\epsilon : 0 \to N \to L \to M \to 0$ の集合[5]とする：

$$\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{xt}^1}_R(M,N) := \{0 \to N \to L \to M \to 0\}.$$

Step 3. つぎに集合 $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{xt}^1}_R(M,N)$ にたいして次の同値関係 $\cong$ を定める：
次の二つの拡大

$$\epsilon_1 : 0 \to N \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{g_1} M \to 0,\quad \epsilon_2 : 0 \to N \xrightarrow{f_2} L_2 \xrightarrow{g_2} M \to 0$$

が同値とは同型写像 $\phi : L_1 \overset{\cong}{\to} L_2$ が存在して $\phi \circ f_1 = f_2,\ g_2 \circ \phi = g_1$ が成り立つことと定める。

この同値関係というのは次の図式が可換であることを言っている：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & L_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_2"'] & L_2 \arrow[r, "g_2"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Step 4. 最後に、拡大の集合 $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{xt}^1}_R(M,N)$ を上の同値関係で割った集合を $\mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$ と定める：

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N) := \widetilde{\mathcal{E}\mathrm{xt}^1}_R(M,N)/\cong .$$

注意 9.14. ここでは集合として $\mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$ を定義しました。実はこの集合にアーベル群の構造を導入することができます。つまり、二つの拡大 ϵ_1, ϵ_2 にたいして、その和 $\epsilon_1 + \epsilon_2$ を拡大の言葉を使って定義することができます。

9.3.3

定理 9.15. 二つの集合 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N), \mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$ の間には以下で構成される全単射が存在する：

$$\Phi : \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \leftrightarrow \mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N) : \Psi.$$

写像 Φ による 0 元の像は分裂短完全列（命題 *5.12(3)*）の拡大類である。

注意 9.16. 注意 9.14 で $\mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$ にもアーベル群の構造が入ると触れました。実際の定理はより強くアーベル群の同型であることを主張します。

写像 Φ, Ψ の構成. 写像 $\Phi : \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \to \mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N)$ を作りましょう：

---

[5]「集合全体は集合をなさない」という難点があるので本当は集合ではないのですが、、、、

Step 1. 命題 9.12 の完全列 (9-12) を持ってきます。

$$0 \to M_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

Step 2. $\alpha \in \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ を代表する $\mathrm{Hom}_R(M_1,N)$ の要素 a をひとつとります。

Step 3. 準同型写像 $\phi : M_1 \to P_0 \oplus N,\ \phi(m_1) := (g_1(m_1), -a(m_1))$ の余核を L とおきます。

Step 4. 自然な写像 $N \to P_0 \oplus N,\ P_0 \oplus N \to L$ の合成写像 $N \to L$ は単射であり、余核は M と同型であるとわかります。

これにより N による M の拡大 $\epsilon : 0 \to N \to L \to M \to 0$ が得られました。

補足 次の可換図式があります。左側の四角形は push out 図式と呼ばれたりします。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "a"'] & P_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Step 5. 写像 Φ による α の像を上の拡大の拡大類として定義する：

$$\Phi(\alpha) := [\epsilon].$$

写像 $\Psi : \mathcal{E}\mathrm{xt}^1_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ を作りましょう：

Step 1. 拡大 $\epsilon : 0 \to N \to L \to M \to 0$ を考えます。

Step 2. 命題 9.12 の完全列 (9-12) を持ってきます。

$$0 \to M_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

射影加群の性質（命題 6.1(1)）より、次の可換図式を得ます：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "a"'] & P_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "b"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

（より詳しくいうと、最初に射影加群の性質から右側の四角を可換にする b が得られます。つぎに完全列の性質から左側の四角を可換にする a が得られます。）

Step 3. 準同型写像 $a : M_1 \to N$ が得られました。これはつまり $\mathrm{Hom}_R(M_1,N)$ の要素です。こいつの $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ での剰余類を拡大類 $[\epsilon]$ の Ψ による像と定めます：

$$\Psi([\epsilon]) := [a].$$

□

9.4 ホモロジー次元

9.4.1 射影次元、入射次元

定義 9.17. (1) R 加群 M の<u>射影次元 $\operatorname{pdim} M$</u>を射影分解の長さの最小値と定める：

$$\operatorname{pdim} M := \inf\{\sup\{i \mid P_i \neq 0\} \mid P_\bullet \text{は} M \text{の射影分解}\}$$

(2) R 加群 M の<u>入射次元 $\operatorname{idim} M$</u>を入射分解の長さの最小値と定める：

$$\operatorname{idim} M := \inf\{\sup\{i \mid I^i \neq 0\} \mid I^\bullet \text{は} M \text{の入射分解}\}$$

例えば加群 M が射影的であるための必要十分条件は $\operatorname{pdim} M = 0$ である。入射加群についても同様である。

9.4.2 Ext_R^n を用いた射影次元、入射次元の測定

命題 9.18. R 加群 M にたいして次が成り立つ：

$$\operatorname{pdim} M = \sup\{n \mid \exists N \text{ s.t.} \operatorname{Ext}_R^n(M, N) \neq 0\},$$
$$\operatorname{idim} M = \sup\{n \mid \exists N \text{ s.t.} \operatorname{Ext}_R^n(N, M) \neq 0\}.$$

Proof. 射異次元に関する主張のみを示す。
$n := \operatorname{pdim} M,\ s := \sup\{\cdots\}$ とおく。
次を示せばよい：

(i) $n \geq s$.

(ii) $n \leq s$

(i) n は有限であるとしてよい。整数 $m > n$ をとる。長さ n の射影分解を使って Ext を構成することで任意の R 加群 N にたいして $\operatorname{Ext}_R^m(M, N) = 0$ がわかる。これにて (i) が示せた。

(ii) s は有限であるとしてよい。M の射影分解 $\epsilon : P \to M$ をとってくる。$s-1$ 番目の微分 $d_{s-1} : P_{s-1} \to P_{s-2}$ の核を $\Omega^s M$ とおく。これは実際に syzygy を s 回施したものである。次の列は完全であることに注意しておく：

$$0 \to \Omega^s M \to P_{s-1} \to P_{s-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0. \tag{9-13}$$

補題 9.10 より、任意の R 加群 N にたいして次の同型がある：

$$\operatorname{Ext}_R^1(\Omega^s M, N) \cong \operatorname{Ext}_R^{s+1}(M, N) = 0.$$

命題 10.9 より $\Omega^s M$ は射影加群である。よって、完全列 (9-13) は長さ s の M の射影分解である。 □

9.4.3 大域次元

命題 9.18 を用いると射影次元の上限と入射次元の上限が Ext 群により一致するとわかります。

定理 9.19. 環 R にたいして次がなりたつ：

$$\sup\{\operatorname{pdim} M \mid M \text{は} R \text{加群}\} = \sup\{n \mid \exists M, N \text{ s.t. } \operatorname{Ext}_R^n(M, N) \neq 0\} = \sup\{\operatorname{idim} M \mid M \text{は} R \text{加群}\}$$

定義 9.20. 環 R にたいして上の定理 9.19 の値を<u>大域次元</u>と呼び $\operatorname{gldim} R$ と表す。

命題 8.16 より、大域次元により半単純環が特徴づけられますね。

系 9.21. 環 R が半単純であるための必要十分条件は $\operatorname{gldim} R = 0$ である。

10 Tor

10.1 定義

定義 10.1. n を非負整数とする。左 R 加群 M, 右 R 加群 N にたいして n 次 Tor 群 $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ を以下で定める：

Step 1. M の左 R 加群の平坦分解 $\epsilon_F : F \to M$ と N の右 R 加群の平坦分解 $\epsilon_G : G \to N$ を選ぶ。

Step 2. 複体 $G \otimes_R F$ の $-n$ 次コホモロジー群として $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ を定める：

$$\mathrm{Tor}_n^R(N, M) := \mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R F) = \mathsf{H}_n(G \otimes_R F).$$

- これは平坦分解 F, G の取り方に依らない。（下の補題 10.2 で示す。）

補題 10.2. 定義 *10.1* において $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ は平坦分解 F, G の取り方に依らない。

Proof. M の射影分解 $\epsilon_P : P \to M$ を選ぶ。定理 8.3（と証明中の注意）より、擬同型写像 $f : P \to F$ が存在する。よって、定理 8.22 より複体の準同型写像 $G \otimes f : G \otimes_R P \to G \otimes_R F$ は擬同型である。よって特に同型 $\mathsf{H}^{-n}(G \otimes f) : \mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R P) \cong \mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R F)$ が得られる。

F と異なる平坦分解 $F' \to M$ をとっても、$\mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R P)$ を介して $\mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R F)$ と $\mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R F')$ の同型を得る。 □

命題 10.3. 左 R 加群 M, 右 R 加群 N にたいして M の左 R 加群の平坦分解 $\epsilon_F : F \to M$ と N の右 R 加群の平坦分解 $\epsilon_G : G \to N$ を選ぶ。

すると、誘導される複体の準同型写像

$$G \otimes_R M \xleftarrow{G \otimes_R \epsilon_F} G \otimes_R F \xrightarrow{\epsilon_G \otimes F} N \otimes_R F$$

は擬同型である。

よって、特に非負整数 n にたいして次の同型がある：

$$\mathrm{Tor}_R^n(N, M) \cong \mathsf{H}^{-n}(G \otimes_R M) \cong \mathsf{H}^{-n}(N \otimes_R F)$$

命題 10.4. 左 R 加群 M, 右 R 加群 N にたいして M の左 R 加群の平坦分解 $\epsilon_F : F \to M$ と N の右 R 加群の平坦分解 $\epsilon_G : G \to N$ を選ぶ。

すると、誘導される準同型写像

$$G \otimes_R F \xrightarrow{\epsilon_G \otimes_R \epsilon_F} N \otimes_R M$$

は 0 次コホモロジー群の同型を誘導する。つまり、次の同型が存在する：

$$\mathrm{Tor}_0^R(N, M) \cong N \otimes_R M.$$

- 以下のこの同型によりこれら二つを同一視する。

10.1.1 関手性

定義 10.5. M, M' を左 R 加群とする。N, N' を右 R 加群とする。n を非負整数とする。

(1) R 加群準同型写像 $f : M \to M'$ にたいして $\mathbb{Z}$ 加群準同型写像 $\mathrm{Tor}_n^R(N, f) : \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \to \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ を以下で定義する：

   Step 1. M, M' の射影分解 $P \to M,\ P' \to M'$ を選ぶ。

Step 2. $f : M \to M'$ のリフト $\tilde{f} : M \to M'$ を選ぶ。

Step 3. $\otimes$ 複体に誘導される複体の準同型写像 $N \otimes \tilde{f} : N \otimes_R P \to N \otimes_R P'$ の $-n$ 次コホモロジー写像として

$$\mathrm{Tor}_n^R(N, f) : \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \to \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$$

を定義する。

(2) 右バージョン

補題 10.6. n を非負整数とする。

(1) 加群の準同型写像 $f : M \to M',\ f' : M' \to M''$ にたいして $\mathrm{Tor}_n^R(N, f' \circ f) = \mathrm{Tor}_n^R(N, f')\,\mathrm{Tor}_n^R(N, f)$ がなりたつ：

$$\mathrm{Tor}_n^R(N, f' \circ f) : \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(N,f)} \mathrm{Tor}_n^R(N, M') \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(N,f')} \mathrm{Tor}_n^R(N, M'')$$

(2) 右バージョン。

補題 10.7. 等式 $\mathrm{Tor}_n^R(N', f) \circ \mathrm{Tor}_n^R(g, M) = \mathrm{Tor}_n^R(g, M') \circ \mathrm{Tor}_n^R(N, f)$ がなりたつ。より詳しくは、次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^R(N, M) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(N,f)"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_n^R(g,M)"'] & \mathrm{Tor}_n^R(N, M') \arrow[d, "\mathrm{Tor}_n^R(g,M')"] \\
\mathrm{Tor}_n^R(N', M) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(N',f)"'] & \mathrm{Tor}_n^R(N', M')
\end{tikzcd}$$

10.2 Ext 長完全列

定理 10.8. *(1)* R 加群の短完全列 $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \to 0$ から次の完全列が得られる：

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(N, M) \xrightarrow{\partial} N \otimes_R M \xrightarrow{N \otimes f} N \otimes_R M \xrightarrow{N \otimes f'} N \otimes_R M'' \to 0$$

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(N, M'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(N,f)} \mathrm{Tor}_n^R(N, M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(N,f')} \mathrm{Tor}_n^R(N, M'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N, M) \to \cdots$$

(2) 右バージョン。

Proof. (1) 完全列の射影分解へのリフト（定理 8.5）をとり、補題 8.6 を適用して得られる Hom 複体の完全列のコホモロジー長完全列をとればよい。(2) も同様。 □

10.2.1 Tor 群と平坦加群

命題 10.9. *(1)* 左 R 加群 M が平坦であるための必要十分条件は任意の右 R 加群 N にたいして $\mathrm{Tor}_R^1(N, M) = 0$ が成り立つことである。

(2) 右バージョン。

Proof. (1)（必要条件）M が平坦加群とすると M 自身（を0次にだけ項がある複体とみたもの）が平坦分解である。すると複体 $N\otimes_R M$ は0次にだけ項のある複体なので $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=\mathsf{H}_1(N\otimes_R M)=0$ を得る。

（十分条件）右 R 加群の単射 R 準同型写像 $f:N\to N'$ をとる。$N'':=\mathrm{Cok}\,f$ とおく。完全列 $0\to N\to N'\to N''\to 0$ の Tor 長完全列より、次の列は完全である：

$$\mathrm{Tor}_1^R(N'',M)\xrightarrow{\partial} N\otimes_R M\xrightarrow{f\otimes M} N'\otimes_R M$$

仮定より $\mathrm{Tor}_1^R(N'',M)=0$ である。よって $N\otimes f$ は単射である。 □

11 Bar resolution, Bar construction

K を体、R を $\mathbf{k}$ 代数とする。

定義兼補題 11.1. (1) K 代数 R の Bar reolsution $\mathsf{Br}(R)$ とは次で定義される R-R 両側加群の複体である：

- (項)
$$\mathsf{Br}(R)_n:=\mathsf{Br}(R)^{-n}\begin{cases}B^{\otimes n+2} & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$
ただしテンソル積は $\mathbf{k}$ 上のテンソル積 $\otimes:=\otimes_{\mathbf{k}}$ である。
- （要素の表記）
非負整数 $n\geq 0$ にたいして、
$$[r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}]:=r_0\otimes r_1\otimes\cdots\otimes r_{n+1}\in R^{\otimes n+2}=\mathsf{Br}(R)_n$$
と定める。（この縦棒による表記方法が Bar resolution という名称の由来らしい。）
- （微分の準備）正整数 $n\geq 1$ と $i=0,1,\ldots,n]$ にたいして $d_{n,i}:\mathsf{Br}(R)_n\to\mathsf{Br}(R)_{n-1}$ を以下で定める：
$$d_{n,i}([r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}])=[r_0|r_1|\cdots|r_{i-1}|r_ir_{i+1}|r_{i+1}|\cdots|r_{n+1}]$$
- （微分）正整数 $n\geq 1$ にたいして $d_n:\mathsf{Br}(R)_n\to\mathsf{Br}(R)_{n-1}$ を
$$d_n:=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_{n,i}$$
と定める。具体的に書くと次が定義である：
$$d([r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}])=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[r_0|r_1|\cdots|r_{i-1}|r_ir_{i+1}|r_{i+1}|\cdots|r_{n+1}]$$

(2) 添加写像 $\epsilon:\mathsf{Br}(R)_0=R\otimes_K R\to R$ を積写像と定める：

$$\epsilon([a|b]):=ab.$$

写像 d_n が両側 R 加群の準同型であることは明らかであるが、$d_{n-1}\circ d_n=0$ の証明は少し込み入ってる。そのための準備。具体的に要素の行き先を書いてみれば直ぐに分かるのでやってみましょう。

練習問題 11.2. $n \geq 2$ と $i = 0, 1, \ldots, n-1,\ j = 0, 1, \ldots, n$ が $i < j$ を満たすとき次が成り立つ：

$$d_{n-1,i} \circ d_{n,j} = d_{n-1,j-1} \circ d_{n,i}$$

注意 11.3. これは $d_{n.i}$ が単体的両側 R 加群の構造の一部を与えていることを言っている。

$d_{n-1} \circ d_n = 0$ の証明.

$$\begin{aligned}
d_{n-1} \circ d_n &= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} d_{n-1,i} \circ d_{n,j} \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d_{n-1,i} \circ d_{n,j} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_{n-1,i} \circ d_{n,j} \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d_{n-1,j-1} \circ d_{n,i} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_{n-1,i} \circ d_{n,j} \\
&= \sum_{k \geq l} (-1)^{k+i+1} d_{n-1,l} \circ d_{n,k} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_{n-1,i} \circ d_{n,j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

補題 11.4. 次が成り立つ：

(1) $\epsilon \circ d_1 = 0.$

(2) ϵ を $\mathsf{Br}(R)$ に添加した複体は右 R 加群（*resp.* 左 R 加群）の複体として可縮である。
特に非輪状である。

(3) 特に $\mathsf{Br}(R)$ は R の両側加群としての射影分解を与える。

Proof. (1)

$$(\epsilon \circ d_1)([a|b|c]) = \epsilon([ab|c] - [a|bc]) = abc - abc = 0.$$

(2) ここでは添加複体を B で表す。特に $\mathsf{B}_{-1} = R,\ d_0 := \epsilon$ である。
$n \geq -1$ にたいして右 R 加群準同型写像 $h_n : \mathsf{B}_n \to \mathsf{B}_{n+1}$ を以下で定める：

$$h_n([r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}]) := [1|r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}].$$

$n < -1$ にたいしては $h_n = 0$ と定める。
すると、任意の n にたいして $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = \mathrm{id}_{\mathsf{B}_n}$ が成り立つ。
$n < -1$ の時は明らか。
$n = -1$ の時、示すべきは等式は $d_0 \circ h_{-1} = \mathrm{id}_R$ である。これは以下の様に示せる：

$$(d_0 \circ h_{-1})(r) = d_0([1|r]) = r.$$

$n > -1$ の時。合成をそれぞれ計算する：

$$\begin{aligned}
h_{n-1} \circ d_n([r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}]) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [1|r_0|r_1|\cdots|r_{i-1}|r_i r_{i+1}|r_{i+1}|\cdots|r_{n+1}] \\
d_{n+1} \circ h_n([r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}]) &= d_{n+1}([1|r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}]) \\
&= [r_0|r_1|\cdots|r_{n+1}] + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} [1|r_0|r_1|\cdots|r_{i-1}|r_i r_{i+1}|r_{i+1}|\cdots|r_{n+1}].
\end{aligned}$$

このことから $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = \mathrm{id}_{\mathsf{B}_n}$ が従う。

(3) 非輪状であることは下部 $\mathbb{Z}$ 加群の性質なので (2) より $\mathsf{Br}(R)$ は R の射影分解を与える。 □

練習問題 11.5. *(2)* の左加群版を証明しよう。上の証明と同様に単位元を使って縮約を構成する。今度は左端に単位元を挿入すればいいが、ほんの少しだけ工夫が必要。

注意 11.6. (2) までは、K が体であることを用いていない。

しかし、$\mathsf{Br}(R)_n = R^{n+2} = R^{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{k}} R^{\otimes n}$ が射影的 R^{e} 加群でなければ、当然 $\mathsf{Br}(R)$ は R の両側 R 加群として射影分解にならないので (3) には $\mathbf{k}$ が体であることが効いている。（$\mathbf{k}$ が可換環の場合には条件を R が $\mathbf{k}$ 上射影的と緩めても良い。）

12　小分解 (small resolution)

定義 12.1. R を環、M を R 両側加群とし、$T := \mathsf{T}_R(M)$ を M の R 上のテンソル代数とする。

T 両側加群の複体 X と添加写像 $\mu; X \to T$ を以下で定める：

- （項）
$$X_n := \begin{cases} T \otimes_R T & (n=0) \\ T \otimes_R M \otimes_R T & (n=1) \\ 0 & (n \neq 0,1) \end{cases}$$

- （微分）$n \neq 1$ の時（必然的に）$d_n = 0$ である。ホモロジー次数 1 次の微分を以下で定める：
$$d_1 : T \otimes_R M \otimes_R T \to T \otimes_R T, \quad a \otimes m \otimes b \mapsto am \otimes b - a \otimes mb$$
ただし包含関係 $M \subset T$ をもちいて $m \in M$ を T の要素とみなしたときの T の積 am, mb が値域にあらわれている。

- （添加写像）
$$\mu : T \otimes_R T \to T, \; a \otimes b \mapsto ab$$

補題 12.2. 次が成り立つ：

(1) $\mu \circ d_1 = 0$.

(2) μ を X に添加した複体は右 T 加群（*resp.* 左 T 加群）の複体として可縮である。

特に非輪状である。

Proof. (1) は計算すればいいだけ。

(2) 添加複体を Y とおく：

$$Y : \cdots \to 0 \to 0 \to T \otimes_R M \otimes_R T \xrightarrow{d_1} T \otimes_R T \xrightarrow{\mu} T \to 0 \to 0.$$

この複体の右 R 加群の複体としての収縮ホモトピー h を以下で構成できる：ホモロジー次数 -1 では、
$$h_{-1} : T \to T \otimes_R T, \quad a \mapsto 1 \otimes a.$$

ホモロジー次数 0 次の場合を扱うために準備をする。テンソル代数の定義から T の要素 a は $m_1 m_2 \cdots m_p, \;\; m_1, m_2 \ldots, m_p \in M$ という形の要素の和である。よって、h_0 は $m_1 m_2 \cdots m_p \otimes b \in T \otimes_R T$ の形の要素にたいして定義すればよい：

$$h_0 : T \otimes_R T \to T \otimes_R M \otimes_R T, \; m_1 m_2 \cdots m_p \otimes b \mapsto \sum_{q=1}^{p} m_1 m_2 \cdots m_{q-1} \otimes m_q \otimes m_{q+1} \cdots m_p \otimes b$$

ただし $q=1$ の時の項は $1\otimes m_1\otimes m_2\cdots m_p b$ である。

$n\neq -1,0$ の場合は（必然的に）$h_n=0$ である。

こうして構成した射 h が収縮ホモトピーであることは直接計算で示せる。示すべきは次の三つの等式である：

$$h_0\circ d_1=\mathrm{id},\ d_1\circ h_0+h_{-1}\circ\mu=\mathrm{id},\ \mu\circ h_{-1}=\mathrm{id}\,.$$

□

References

[1] 橋本光靖　ホモロジー代数入門　橋本先生の web page からダウンロードできます。

[2] 岩永恭雄、佐藤眞久　環と加群のホモロジー代数的理論、日本評論社

[3] 河田敬義　ホモロジー代数、岩波基礎数学選書

[4] S. マックレーン, 圏論の基礎

[5] Bo Stenström. *Rings of quotients*, Vol. Band 217 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. An introduction to methods of ring theory.

[6] Weibel, Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.