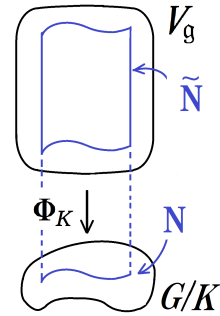


これまでの研究成果

森本 真弘

コンパクト対称空間 G/K 内の部分多様体を研究する 1 つの手法として、ある無限次元ヒルベルト空間への「持ち上げ」がある。 $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$ で閉区間 $[0, 1]$ から G のリー代数 $\mathfrak{g}$ への L^2 道全体の成すヒルベルト空間を表す。 C.-L. Terng と G. Thorbergsson は 1995 年に**平行移動写像**と呼ばれる自然なリーマン沈め込み $\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$ を導入した。 G/K の閉部分多様体 N に対し、逆像 $\tilde{N} := \Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の**固有フレドホルム (PF) 部分多様体**となり、その形作用素は自己共役なコンパクト作用素となる。 $\tilde{N}$ は無限次元となるものの、 $V_{\mathfrak{g}}$ の線形性からユークリッド空間内の手法が応用できる。 彼らはその手法を用いて、 G/K 内の部分多様体幾何学を研究した。 一般に、 N と $\tilde{N}$ の幾何学的関係を示すことは重要な問題である。



私は、 N と $\tilde{N}$ の関係、特に極小部分多様体がもつ**対称性**に注目して研究を行った。 論文 [2] ではまず、 N と $\tilde{N}$ の第二基本形式・形作用素の関係式を示し、更に $\tilde{N}$ が $V_{\mathfrak{g}}$ の全測地的 PF 部分多様体となる必要十分条件を示した。 そして、井川治氏、酒井高司氏、田崎博之氏らが 2009 年に導入した**弱鏡映部分多様体**という特殊な大域的対称性を持つ極小部分多様体（各法ベクトル ξ に対し、 N を保ち ξ を (-1) 倍する等長変換が存在する部分多様体）の概念を、 PF 部分多様体に対して定義・拡張した。 その上で、平行移動写像 Φ_K の各ファイバーが、 $V_{\mathfrak{g}}$ の弱鏡映 PF 部分多様体であることを示した。 更に、 N が G/K の弱鏡映部分多様体ならば、 $\tilde{N}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の弱鏡映 PF 部分多様体であることを示し、全測地的でない弱鏡映 PF 部分多様体の例を多数構成した。

論文 [3] ではまず、論文 [2] の形作用素公式を用いて、 N が curvature-adapted 部分多様体であるという仮定の下で、 N と $\tilde{N}$ の主曲率関係式を示した。 これは、過去に小池直之教授が示した関係式の訂正および別証明にあたる。 次に、本関係式を用いて、 N と $\tilde{N}$ のオースティア性の関係を研究した。 ここで部分多様体が**オースティア**であるとは、各法方向に対して主曲率全体のなす集合が (-1) 倍不変であることという。 定義から「弱鏡映 $\Rightarrow$ オースティア $\Rightarrow$ 極小」という関係が成り立つ。 $\tilde{N}$ の主曲率は一般に複雑であるが、私は G/K が球面の場合に、 N のオースティア性と $\tilde{N}$ のオースティア性が同値であることを示した。 更に、武富雄一郎氏が 2018 年に導入した**アリッド**という、弱鏡映のある種の一般化性質についても研究を行い、 N がアリッドならば $\tilde{N}$ もアリッドであることを示した。 以上の結果を用いて、オースティア PF 部分多様体の例や、オースティアでないアリッド PF 部分多様体の例を構成した。

論文 [4] では、論文 [2] で得られた結果を、 G/K が（対称空間とは限らない）イソトロピー既約等質空間の場合へ拡張した。 本結果は、私がアウクスブルク大学に滞在中に行った E. Heintze 教授、J. H. Eschenburg 教授、酒井高司教授との議論に基づく。

論文 [5] では、論文 [3] の拡張として、 N が **Hermann 作用**の軌道である場合に、 N と $\tilde{N}$ のオースティア性の関係を研究した。 Hermann 作用とは、等長変換群内の対称部分群による作用として定義され、その作用は超極かつ各軌道は curvature-adapted 部分多様体となる。 また、このとき $\tilde{N}$ はある path 群作用の軌道に一致する。 私はまず、 G/K 内の curvature-adapted 部分多様体に対してある種の階層を導入し、論文 [3] で得た主曲率関係式を精密化した。 その公式を用いて、 N が Hermann 作用の軌道である場合に、逆像 $\tilde{N}$ の主曲率明示公式を導出した。 本公式は、C.-L. Terng, U. Pinkall, G. Thorbergsson, 小池直之教授らの結果を統合・一般化する有用な公式である。 本公式を用いて、 N が Hermann 作用の軌道である場合に、 N がオースティアならば $\tilde{N}$ がオースティアであることを示し、更にその逆を否定する反例を示した。

論文 [6]（プレプリント）では、path 空間上のある自然な同型写像を発見・定式化し、[5] の結果を**シグマ作用**という等長作用の場合へ拡張した。 更に、この同型を通して、PF 部分多様体の主曲率に関する既存の全ての計算結果（Terng, Pinkall-Thorbergsson, King-Terng）を、[5] で得られた公式の特殊な場合として統一理解できることを示した。