

私はこれまで、Lie 群 G 上の左不変 (擬) リーマン計量の moduli 空間の研究を行ってきた。ここで、左不変計量の moduli 空間とは、 G 上の符号数 (p, q) の左不変 (擬) リーマン計量のなす空間 $\mathcal{M}_{p,q}(G)$ への直積群 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G)$ の作用による軌道空間である。この研究には 3 つの背景がある：

- (背景 1) 与えられた Lie 群 G がよい左不変計量 (*e.g.* 左不変な Ricci soliton 計量) を許容するかは、 G 上に左不変計量が多すぎるため、一般には難しい問題である。 G によっては、moduli 空間をうまく記述することで、問題を簡単にできる可能性がある。
- (背景 2) 空間 $\mathcal{M}_{p,q}(G)$ は非コンパクト対称空間であり、作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_{p,q}(G)$ はそこへの等長作用である。非コンパクト対称空間への等長作用は、分かっていないことが多い。作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_{p,q}(G)$ はよい具体例を供給する可能性がある。
- (背景 3) G が 3 次元可解 Lie 群の場合に限り、左不変リーマン計量 $\langle, \rangle \in \mathcal{M}_{3,0}(G)$ が Ricci soliton であることと作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_{3,0}(G)$ の $\langle, \rangle \in \mathcal{M}_{3,0}(G)$ を通る軌道が $\mathcal{M}_{3,0}(G)$ 内の極小部分多様体であることが同値であることが知られている。これは、作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_{p,q}(G)$ の幾何を通して、左不変計量の研究が行なえる可能性を示唆するものである。

(背景 1) に関して、私が得た結果を述べる。 G が特定の可解 Lie 群の場合に、任意の符号数 (p, q) に対して、 G 上の左不変計量の moduli 空間を完全に決定した。また、それを用いて G 上の任意の左不変計量が定曲率であることを示した。この内容は、Paper 5(List of papers 参照) にまとめられている。

(背景 2) に関して、私が得た結果を述べる。作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_{n,0}(G)$ が特異軌道を持つ hyperpolar 作用になるような n 次元 Lie 群 G の例を与えた。非コンパクト対称空間への特異軌道を持つ hyperpolar 作用については研究が進んでおらず、例もあまり知られていなかった。この内容は、Paper 7(List of papers 参照) にまとめられている。

(背景 3) に関して、私が得た結果を紹介する。作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_{n,0}(G)$ における左不変リーマン計量 $\langle, \rangle \in \mathcal{M}_{n,0}(G)$ を通る軌道が孤立軌道ならば、 $\langle, \rangle$ は左不変 Ricci soliton であることを示した。一般に孤立軌道は極小部分多様体である。よって、3 次元可解の場合で知られた “極小 $\Rightarrow$ Ricci soliton” は “極小” を “孤立軌道” に強めれば、一般の Lie 群で成り立つことが分かった。この内容は、Paper 1(List of papers 参照) にまとめられている。

上記の Paper 1 の結果を得る過程で、一般に固有等長作用の軌道が孤立軌道になるための簡潔な必要十分条件を得ている。Lie 群 H による多様体 X への固有等長作用に対し、点 $p \in X$ を通る軌道 $H.p$ が孤立軌道であるための必要十分条件は、 $H.p$ 上に H -不変な法ベクトル場が (0 以外) 存在しないことである。これをふまえ、私は孤立軌道のエッセンスを以下のように軌道とは限らない一般の部分多様体に一般化した。

- リーマン多様体 X 内の部分多様体 $Y \subset X$ が arid submanifold であるとは、ある X への固有等長作用が存在して、 Y を保ち、なおかつ Y 上にその作用で不変な法ベクトル場が (0 以外) 存在しないことである。