微積分1B・講義資料

$\boxed{\text{第14回}}$(番外)

(2026年7月2日(木)配信分)

$\boxed{\text{第14回本題}}$

　第８回講義資料と第３回レポートで、整級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が、その収束半径内 $|x| < r$ で、項別微分並びに項別積分可能である、すなわち

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

が成り立つことに言及したものの、その証明は省略していました。

　今回は、収束半径を求める際に用いた、コーシー-アダマールの判定条件の主張をより詳しく述べたものを用いて、それらの証明をご紹介しておきたいと思います。

コーシー-アダマールの判定条件(詳細版)

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{r}$$

が存在すれば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ で広義一様収束する。
（すなわち任意の $R < r$ に対し、$|x| \leq R$ で一様収束する。）

(注)　ここで上極限

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}$$

は、極限 $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ が存在するときは、この極限と一致しますが、数列 a_n が有界のとき、数列 $\overline{a}_n = \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}$ が(広義の)単調減少であるため、極限が存在するとしないに拘わらず、いつでも定義されます。

（証）$R < r$ を任意に一つとります。

ここで、$0 < r < +\infty$ のとき

$$\frac{1}{r} < \frac{2}{r+R}$$

が成り立つことに注意しておきます。

$|a_n|^{1/n}$ の上極限値が $\dfrac{1}{r}$ なので、十分大きい全ての n (すなわち、ある n_0 が存在して、$n \geq n_0$ を満たす任意の n) に対して

$$|a_n|^{1/n} < \frac{2}{r+R}$$

が成り立ちます。これから、

$$|a_n| < \left(\frac{2}{r+R}\right)^n$$

を得ます。

今、$|x| \leq R$ を満たす任意の x において、

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||x|^k \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{r+R}\right)^k R^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2R}{r+R}\right)^k \\
&= \left(\frac{2R}{r+R}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\frac{2R}{r+R}} \\
&= \frac{r+R}{r-R}\left(\frac{2R}{r+R}\right)^{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

が成り立ち、この整級数は$|x| \leq R$ で一様収束します。

ここで $R < r$ は自由に選べたので、$|x| < r$ での広義一様収束が示せました。

一方、$|a_n|^{1/n}$ の上極限値が 0 のときは、十分大きい全ての n (すなわち、ある n_0 が存在して、$n \geq n_0$ を満たす任意の n) に対して

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{2R}$$

が成り立ちます。これから、

$$|a_n| < \left(\frac{1}{2R}\right)^n$$

を得ます。

今、$|x| \leq R$ を満たす任意の x において、

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| \;=\; \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||x|^k \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2R}\right)^k R^k \;=\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{2^n} \;\to\; 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

が成り立ち、この整級数は$|x| \leq R$ で一様収束します。

ここで R は自由に選べたので、$x \in \mathbf{R}$ での広義一様収束が示せました。

項別積分

整級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ で項別積分可能である。

（証） $R < r$ を任意に一つとります。

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は、$n \to \infty$ のとき $f(x)$ に、$|x| \leq R$ で一様収束するので、任意の $\epsilon > 0$ に対し $N = N(\epsilon)$ が存在して、任意の $n \geq N$ に対し

$$\sup_{|x| \leq R} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - f(x) \right| < \epsilon$$

が成り立ちます。

　よって、$|x| \leq R$ を満たす任意の x において

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n}\int_0^x a_k t^k dt - \int_0^x f(t)dt\right| \\
&\quad = \left|\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k - f(t)\right) dt\right| \\
&\quad \leq \int_0^x \left|\sum_{k=0}^{n} a_k t^k - f(t)\right| dt \\
&\quad \leq \int_0^x \epsilon dt \ = \ \epsilon|x-0| \ = \ \epsilon|x| \ \leq \ \epsilon R
\end{aligned}
$$

より、項別積分により得られる整級数 $\sum_{k=0}^{n}\int_0^x a_k t^k dt$ も、$n \to \infty$ のとき $\int_0^x f(t)dt$ に $|x| \leq R$ で一様収束し、

$$\int_0^x f(t)dt \ = \ \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k dt$$

が成り立ちます。

　ここで R は自由に選べたので、主張が示されました。

項別微分

整級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ で項別微分可能である。

（証）

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}$$

より、整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$ の収束半径は r です。従って、これを x で割って得られる整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ の収束半径も r です。

すなわち、項別微分により得られる整級数の収束半径は、元の整級数の収束半径と一致します。

よって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ もまた $|x| < r$ で項別積分可能なので、

$$\begin{aligned}\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n n x^{n-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= f(x) - a_0\end{aligned}$$

が成り立ちます。

これより

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (f(x) - a_0)' \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' \\
&= \left(\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} dx\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'
\end{aligned}
$$

を得、主張が示されました。