

微積分1B (月3・木2)・中間試験問題

学籍番号

氏名

(時間内に出来る) 問題全てに解答して下さい。解答の作成にあたっては、途中の計算を省略しないで書くようにして下さい。

1 $a \neq 0$ とする。次の各問に答えよ。

(1) 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が、各点で微分可能であるような逆関数を持つための条件を求めよ。(ヒント) 逆関数の微分の公式に注意。

3次関数は常に全射である。さらに単射となるためには(狭義)単調であればよく、導関数 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ が符号を変えなければよい。

全単射のとき逆関数が存在し、さらに逆関数が微分可能であるためには、微分が消えなければよい。従って、2次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすれば、求める条件は

$$\frac{D}{4} = b^2 - 3ac < 0$$

である。

(2) 4次関数 $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ が凸関数となる(すなわち $y = g(x)$ のグラフが下に凸となる)ための条件を求めよ。(ヒント) $f''(x)$ の符号に注意。

下に凸となるためには、 $a > 0$ で、さらに2次導関数 $g''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$ が0以上ならばよい。

従って、2次方程式 $g''(x) = 0$ の判別式を D とすれば、求める条件は $a > 0$ かつ

$$\frac{D}{4} = (3b)^2 - 12a \cdot 2c = 3(3b^2 - 8ac) \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad 3b^2 - 8ac \leq 0$$

である。

2 次の極限 (値) を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 8x + 1}{2x^3 + 7x^2 + x + 8}$$

$$\frac{2x^2 + 8x + 1}{2x^3 + 7x^2 + x + 8} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 + 8x^{-1} + x^{-2}}{2 + 7x^{-1} + x^{-2} + 8x^{-3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 8x + 1}{2x^3 + 7x^2 + x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 8x^{-1} + x^{-2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 7x^{-1} + x^{-2} + 8x^{-3})} = 0 \cdot \frac{2}{2} = 0$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - x^2}{\sin^2 x - x^2} \quad (\text{ヒント}) \quad \text{ロピタルの定理よりテイラー展開を用いた方が多分楽。}$$

$\sin x$ の $x = 0$ におけるテイラー展開 (マクローリン展開) は

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

より

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + O(x^{10})$$

$$\sin^2 x = (x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)$$

$$\frac{\sin x^2 - x^2}{\sin^2 x - x^2} = \frac{-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{10})}{-\frac{1}{3}x^4 + O(x^6)} = x^2 \cdot \frac{-\frac{1}{6} + O(x^4)}{-\frac{1}{3} + O(x^2)} \rightarrow 0 \cdot \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} = 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \coth \frac{1}{x} \quad (\text{ヒント}) \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \begin{cases} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \rightarrow 1 & (x \rightarrow +\infty) \\ \frac{1+e^{2x}}{-1+e^{2x}} \rightarrow -1 & (x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

より

$$\coth \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} 1 & (x \rightarrow +0) \\ -1 & (x \rightarrow -0) \end{cases}$$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \coth \frac{1}{x} \right| = 1$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \coth \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left| \coth \frac{1}{x} \right| = 0 \cdot 1 = 0$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \coth \frac{1}{x} = 0$$

3 $m, n > 0$ とする。関数 x^{mx^n} ($x > 0$) について、次の各問に答えよ。

(1) 右極限(値) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{mx^n}$ を求めよ。

$t = -\log x$ とすると $x \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow +\infty$ で、 $x = e^{-t}$ より

$$\log x^{mx^n} = mx^n \log x = me^{-nt}(-t) = -\frac{mt}{e^{nt}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

よって $\lim_{x \rightarrow +0} \log x^{mx^n} = 0$ と指数関数の連続性より

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{mx^n} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\log x^{mx^n}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \log x^{mx^n}} = e^0 = 1$$

(2) 極限(値) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{mx^n}$ を求めよ。

$$\log x^{mx^n} = mx^n \log x \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$$

なので、 $y = \log x^{mx^n}$ とおけば

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{mx^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log x^{mx^n}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

(3) x^{mx^n} の極値を求めよ。

$$(\log x^{mx^n})' = (mx^n \log x)' = m(nx^{n-1} \log x + x^n \cdot x^{-1}) = mx^{n-1}(n \log x + 1)$$

より

$$(x^{mx^n})' = x^{mx^n} (\log x^{mx^n})' = x^{mx^n} \cdot mx^{n-1}(n \log x + 1) = 0$$

となるのは $n \log x + 1 = 0$ すなわち $x = e^{-1/n}$ のときに限り、その前後で $(x^{mx^n})'$ の符号は負から正に変わるので、そこで極小値 $(e^{-1/n})^{m(e^{-1/n})^n} = (e^{-1/n})^{me^{-1}} = e^{-m/ne}$ をとる。

(4) x^{mx^n} の値域を求めよ。

$f(x) = x^{mx^n}$ とおく。 $\log f(x) = mx^n \log x$ は連続関数の積より、 $x > 0$ で連続。従って、これを連続関数である指数関数と合成した $f(x) = e^{mx^n \log x}$ もまた、 $x > 0$ で連続である。

ここで (2) より、任意の $K > 1$ に対し、ある $L = L(K) > 1$ が存在して、任意の $x > L$ に対し、 $f(x) > K$ が成り立つ。そのような x を一つ選び x_1 と表せば、 $f(x_1) > K$ である。

一方、 $e^{-1/n} < 1 < L < x_1$ 、 $f(e^{-1/n}) = e^{-m/ne} < 1 < K < f(x_1)$ より、中間値の定理を閉区間 $[e^{-1/n}, x_1]$ に適用すれば、任意の $\alpha \in (e^{-m/ne}, K) \subset (e^{-m/ne}, f(x_1))$ に対し、 $f(x) = \alpha$ を満たす $x \in (e^{-1/n}, x_1) \subset (e^{-1/n}, +\infty)$ が存在する。

今 $K > 1$ は任意なので、任意の $\alpha \in (e^{-m/ne}, +\infty)$ に対し、 $f(x) = \alpha$ を満たす $x \in (e^{-1/n}, +\infty)$ が存在することが示された。

これに最小値 $e^{-m/ne}$ を加えて、求める値域は $[e^{-m/ne}, +\infty)$ である。

4 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

について、次の各問に答えよ。(ヒント) $t = \frac{1}{x^2}$ とおくとわかりやすい。

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ。

$t = \frac{1}{x^2}$ とおくと $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow +\infty$ である。

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 = f(0)$$

より $f(x)$ は $x = 0$ で連続である。

(2) $f(x)$ を $x \neq 0$ で微分せよ。

$$f'(x) = (e^{-1/x^2})' = (-x^{-2})' e^{-1/x^2} = 2x^{-3} e^{-1/x^2} = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

(3) $f(x)$ を $x = 0$ で微分せよ。

$t = \frac{1}{x^2}$ とおくと $x \rightarrow \pm 0$ のとき $t \rightarrow +\infty$ である。

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\pm \sqrt{t-1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pm \sqrt{t}}{e^t} = 0$$

(複号同順) より $f'(0) = 0$ である。

(4) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続である (従って $f(x)$ は $x = 0$ で C^1 級である) ことを示せ。

$t = \frac{1}{x^2}$ とおくと $x \rightarrow \pm 0$ のとき $t \rightarrow +\infty$ である。

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\pm \sqrt{t-1})^3} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pm 2\sqrt{t^3}}{e^t} = 0 = f'(0)$$

(複号同順) より $f'(x)$ は $x = 0$ で連続である。