

15.3.

AHA23005 板倉 洸基

prop. 集合 X, Y と $A \subset X, B \subset Y$ に対して、

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$$

pf.

$A = X, B = Y$ のとき $(X \times Y) \setminus (X \times Y) = \emptyset$,

$(X \setminus X) \times Y = \emptyset \times Y = \emptyset, X \times (Y \setminus Y) = X \times \emptyset = \emptyset$

$\therefore ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)) = \emptyset$

$\therefore (X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$

$A \neq X \vee B \neq Y$ とする。

(\subset)

$\forall a \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ をとると、

$a \in X \times Y$ より、 $a = (x, y)(x \in X, y \in Y)$ と書ける。

また、 $a \notin A \times B$ より、 $x \notin A \vee y \notin B$

$x \notin A$ のとき、 $x \in X \setminus A, y \in Y$ より、 $a = (x, y) \in (X \setminus A) \times Y$

$y \notin B$ のとき、同様にして、 $a \in X \times (Y \setminus B)$

以上から、 $a \in ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$

$\therefore (X \times Y) \setminus (A \times B) \subset ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$

(\supset)

$\forall a \in ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ をとる。

$a \in (X \setminus A) \times Y$ のとき、

$a = (x, y)(x \in X \setminus A, y \in Y)$ と書ける。

この時、 $x \in X, y \in Y$ より、 $a = (x, y) \in X \times Y$

$x \notin A$ より、 $a = (x, y) \notin A \times B$

$\therefore a \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$

$a \in X \times (Y \setminus B)$ のとき、同様に $a \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$

以上から、 $a \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$

$\therefore (X \times Y) \setminus (A \times B) \supset ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$

以上より、 $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ ■