

## 位相数学演習 問題2.5 解答

### AHA23034 野村尚平

問2.5 定義に戻って  $(X^i)^i = X^i$  を示せ。

(解)

(i)  $(X^i)^i \subset X^i$  について

$\forall a \in (X^i)^i$  をとる

このとき  $B(a; \varepsilon) \in X^i$  となる  $\varepsilon > 0$  がとれる

よって  $a \in X^i$

$\therefore (X^i)^i \subset X^i$

(ii)  $(X^i)^i \supset X^i$  について

$\forall b \in X^i$  をとる

このとき  $B(b; \varepsilon') \in X$  となる  $\varepsilon' > 0$  がとれる

以下  $B(b; \varepsilon') \subset X \implies B(b; \varepsilon') \subset X^i$  を示す

$\forall b' \in B(b; \varepsilon')$  をとる

ここで  $\varepsilon'' := \varepsilon' - d(b', b)$  とすると  $\varepsilon'' > 0$

このとき  $B(b'; \varepsilon'') \subset B(b; \varepsilon')$  を示す

$\forall b'' \in B(b'; \varepsilon'')$  をとると  $d(b'', b') < \varepsilon''$

よって

$$d(b'', b) \leq d(b'', b') + d(b', b) < \varepsilon'' + d(b', b) = \varepsilon' - d(b', b) + d(b', b) = \varepsilon'$$

$\therefore b'' \in B(b; \varepsilon')$

したがって  $B(b'; \varepsilon'') \subset B(b; \varepsilon')$

$B(b; \varepsilon') \subset X$  より  $B(b'; \varepsilon'') \subset X$

よって  $b' \in X^i$

したがって  $B(b; \varepsilon') \subset X^i$

よって  $b \in (X^i)^i$

$\therefore (X^i)^i \supset X^i$

(i), (ii) より  $(X^i)^i = X^i$  ■