

prop. \mathbb{R} の上に有界な部分集合 X の上限 s は X の上界全体の集合 A の集積点。

pf.

$\forall \varepsilon > 0$ をとると、

$$\left| s - \left(s + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right| = \frac{1}{2} \varepsilon < \varepsilon \text{ より、}$$

$$s + \frac{1}{2} \varepsilon \in B(s; \varepsilon)$$

また、 s は X の上限だから、

$$\forall x \in X, x \leq s < s + \frac{1}{2} \varepsilon$$

よって、 $s + \frac{1}{2} \varepsilon \in A$ であり、 $s + \frac{1}{2} \varepsilon \neq s$

以上より、 $s + \frac{1}{2} \varepsilon \in B(s; \varepsilon) \cap (A - \{s\})$

即ち、 $\forall \varepsilon > 0, B(s; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

即ち、 s は A の集積点である。■