

問 4.5 $\mathbb{R}^n$ の任意の有限部分集合は離散位相空間となることを示せ。

[解] $\mathbb{R}^n$ から任意に有限部分集合を一つ取って固定する。

この集合を X とすると、 X は有限集合であるから、

その元の個数を n とすると、 $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ と表すことができ、
 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ となる全単射 f が存在する。
 $i \mapsto a_i$

ここで、 X から任意に部分集合を一つ取って固定する。これを Y とする。

これから、「 X が離散位相空間である」すなわち

「 Y が X の閉集合である」と $\forall a \in Y, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a; \varepsilon) \cap X \subset Y$ を示す。

$Y \subset X$ であるので、必要に応じて番号を取り換えると、

$Y = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ($r \leq n$) と表すことができる。

ここで、 f の単射性から、 $i \neq j$ ならば $a_i = f(i) \neq f(j) = a_j$ であるので、

$i \neq j$ ならば、距離の定義から $d(a_i, a_j) > 0$ である。

ここで、 $a_i \in Y$ を固定すると、 X が有限集合であることから、

$\{d(a_i, a_j) \mid j = 1, 2, \dots, n : i \neq j\}$ が有限集合である。

つまり、 $i \neq j$ とき、 $d(a_i, a_j)$ が最小となるように $a_j \in X$ を選べる。

このとき、 $\forall a \in X \setminus \{a_i\}, d(a_i, a) \geq d(a_i, a_j) > \frac{1}{2}d(a_i, a_j)$ であるので、 $\varepsilon := \frac{1}{2}d(a_i, a_j)$ とすると、

$B(a_i; \varepsilon) \cap X = \{a_i\} \subset Y$ となる。

a_i を Y の他のどの元と取り換えても同様の結果が成り立つので、

$\forall a \in Y, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a; \varepsilon) \cap X \subset Y$ が成り立つ。

以上より、 X が離散位相空間であることが示された。 //