

問 5.3

\mathbb{R} と $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が同相でないことを示せ.

解答

\mathbb{R} と $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が同相である. 即ち,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$: 同相写像が存在すると仮定する.

このとき, f : 全射 より,

$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists! x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } y = f(x)$

が成り立つ.

すなわち, $\exists a, b \text{ s.t. } f(a) < 0, f(b) > 0$

が成立.

ここで, $f(a) \neq f(b)$ なので, $a \neq b$

つまり, $a > b$, もしくは $a < b$ である.

$a < b$ のときで考える.

f は $[a, b]$ 上連続だから, 中間値の定理より,

$f(a) < 0 = f(c) < f(b)$ となる, $c: a < c < b$ が存在する.

これは $f(c) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に矛盾する.

$a > b$ のときも同様

よって, \mathbb{R} と $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が同相でない. \square