曲線と曲面の幾何学（火５）・中間試験問題 (解答例)

学籍番号　　　　　　　　　　氏　名

（時間内に出来る）問題全てに解答して下さい。解答の作成にあたっては、途中の計算を省略しないで書くようにして下さい。

1　曲線 $x^2+2bxy+y^2=1$ が、短径と長径の比が $3:5$ であるような楕円となる b の値を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$x^2+2bxy+y^2=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書ける。

ここで A は実対称行列なので、A の固有方程式

$$0=|\lambda E-A|=\lambda^2-2\lambda+1-b^2$$

は実数解 α,β ($\alpha\le\beta$) を持ち、A は、ある $P\in SO(2)$ により

$${}^tPAP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化できて、この P を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により、曲線の方程式 $x^2+2bxy+y^2=1$ を $\alpha X^2+\beta Y^2=1$ と書き換えることができる。

従って、この曲線が題意を満たすためには

$$\alpha>0 \quad \text{かつ} \quad \beta=\frac{25}{9}\alpha$$

が成り立てばよい。このとき二次方程式の解と係数の関係より

$$\frac{34}{9}\alpha=2, \qquad \frac{25}{9}\alpha^2=1-b^2$$

なので、求める答は

$$b=\frac{8}{17} \text{ または } -\frac{8}{17}$$

である。

2　弧長媒介変数で表示された曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ \sqrt{2}\cosh h(t) \end{pmatrix} \qquad (\, t \in \mathbf{R}\,)$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　$h'(t) > 0$ のとき、$h(t)$ が満たす条件 (微分方程式) を求めよ。

$$X'(t) = \begin{pmatrix} h'(t) \\ \sqrt{2}\sinh h(t) \cdot h'(t) \end{pmatrix}$$

より

$$||X'(t)||^2 = h'(t)^2 \left(1 + 2\sinh^2 h(t)\right) = h'(t)^2 \cosh 2h(t)$$

であるが、今 t は弧長パラメーターなので、

$$h'(t)^2 \cosh 2h(t) = 1$$

でなければならない。仮定より $h'(t) > 0$ なので、求める条件は

$$h'(t) = \frac{1}{\sqrt{\cosh 2h(t)}}$$

である。

(2)　曲率を $h(t)$ を用いて表せ。

$$X''(t) = \begin{pmatrix} h''(t) \\ \sqrt{2}\cosh h(t) \cdot h'(t)^2 + \sqrt{2}\sinh h(t) \cdot h''(t) \end{pmatrix}$$

従って、曲率は

$$|X'(t)\ X''(t)| \quad = \quad \sqrt{2}\cosh h(t) \cdot h'(t)^3$$

(1) より

$$|X'(t)\ X''(t)| \quad = \quad \frac{\sqrt{2}\cosh h(t)}{(\cosh 2h(t))^{3/2}}$$

3　ベクトル V_1, V_2, V_3 は、

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ 0 \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ 0 \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。いずれも単位ベクトルであること、それぞれ直交することを認めて、次の各問に答えよ。

(1)　外積 $V_1 \times V_2, V_2 \times V_3$ を求めよ。

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 &= \begin{vmatrix} \frac{15}{17} & 0 & \boldsymbol{e}_1 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{e}_2 \\ \frac{8}{17} & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ 0 \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix} = V_3 \\ V_2 \times V_3 &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{8}{17} & \boldsymbol{e}_1 \\ 1 & 0 & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & \frac{15}{17} & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ 0 \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix} = V_1 \end{aligned}$$

(2)　$PV_1 = V_2, PV_2 = V_3, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

$$PV_3 = P(V_1 \times V_2) = PV_1 \times PV_2 = V_2 \times V_3 = V_1$$

より

$$P(V_1\ V_2\ V_3) = (PV_1\ PV_2\ PV_3) = (V_2\ V_3\ V_1)$$

なので

$$\begin{aligned} P &= (V_2\ V_3\ V_1)(V_1\ V_2\ V_3)^{-1} = (V_2\ V_3\ V_1)\,{}^t(V_1\ V_2\ V_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{120}{289} & -\frac{8}{17} & \frac{225}{289} \\ \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \\ -\frac{64}{289} & \frac{15}{17} & \frac{120}{289} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4　$X(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ は弧長媒介変数表示された C^5 級空間曲線とし、その Frenet-Serret 枠を $X'(t), N(t), B(t)$ で表す。曲率は $\sigma(t) \neq 0$ で、また捩率は $\tau(t)$ で、それぞれ表す。次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|X'''(t)\ N''(t)\ B''(t)|$ を、$\sigma(t), \tau(t), \sigma'(t), \tau'(t)$ (の内、必要なもの) のみを用いて表せ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ \sigma & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば、Frenet-Serret の公式

$$(X''(t)\ N'(t)\ B'(t)) = (X'(t)\ N(t)\ B(t))\, A$$

より、

$$\begin{aligned} (X'''(t)\ N''(t)\ B''(t)) &= (X''(t)\ N'(t)\ B'(t))\, A + (X'(t)\ N(t)\ B(t))\, A' \\ &= (X'(t)\ N(t)\ B(t))\, (A^2 + A') \\ &= (X'(t)\ N(t)\ B(t)) \begin{pmatrix} -\sigma^2 & -\sigma' & \sigma\tau \\ \sigma' & -\sigma^2 - \tau^2 & -\tau' \\ \sigma\tau & \tau' & -\tau^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} |X'''(t)\ N''(t)\ B''(t)| &= |X'(t)\ N(t)\ B(t)| \cdot \begin{vmatrix} -\sigma^2 & -\sigma' & \sigma\tau \\ \sigma' & -\sigma^2 - \tau^2 & -\tau' \\ \sigma\tau & \tau' & -\tau^2 \end{vmatrix} \\ &= -\sigma^2\tau'^2 + 2\sigma\sigma'\tau\tau' - \sigma'^2\tau^2 \\ &= -(\sigma\tau' - \sigma'\tau)^2 \end{aligned}$$

を得る。

(2)　$|X'''(t)\ N''(t)\ B''(t)| = 0$ $(t \in \mathbf{R})$ のとき、$\sigma(t)$ と $\tau(t)$ が満たす関係を簡潔に述べよ。

$$\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)' = \frac{\sigma\tau' - \sigma'\tau}{\sigma^2}$$

より、$|X'''(t)\ N''(t)\ B''(t)| = 0$ のとき、τ/σ は定数、すなわち捩率は曲率に比例する。