曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第７回}}$

(2025年11月11日(火)配信分)

§2. 空間曲線(続き)

問2.1　曲率は 0 ではないが、捩率は 0 であるような空間曲線は、実はある平面上の平面曲線であることを示せ。

(解)　$\tau = 0$ より $B'(t) = 0$ だから、$B(t)$ は一定。よって、

$$(\langle X(t), B\rangle)' = \langle X'(t), B\rangle = \langle X'(t), X'(t) \times N(t)\rangle = 0$$

より $\langle X(t), B\rangle$ も一定。よって、$\langle X(t) - X(0), B\rangle = 0$

問2.4　問 2.3 の空間曲線の捩率が 0 となるような関数 f を全て求めよ。またこの曲線はどのような曲線か答えよ。

問2.16　空間曲線 $X(t)$ は C^3 級で、t は弧長パラメーターではなく、$||X'(t)|| \neq 0,\ ||X''(t)|| \neq 0,\ ||X'''(t)|| = 0\ (\forall t \in \mathbf{R})$ をみたすものとする。このとき、$X(t)$ はある平面上の曲線であることを示せ。

定曲率定振率の空間曲線を常螺旋(ordinary helix)と呼ぶ。これは、ある直円柱上にあり、切り開くと直線となる曲線である。

問2.2　確かめよ。

(解)　$\sigma = 0$ のとき、$X''(t) = 0$ より $X'(t)$ は一定である。よって $X(t)$ は直線となる。

以下 $\sigma \neq 0$ と仮定する。$V(t) = \tau X'(t) + \sigma B(t)$ とおく。$\sigma \neq 0$ より $V(t) \neq 0$ である。σ, τ は定数より

$$V'(t) = \tau X''(t) + \sigma B'(t) = \tau\sigma N(t) - \sigma\tau N(t) = 0$$

よって $V(t)$ は t によらない定数で

$V(t) = V(0) = \tau X'(0) + \sigma B(0)$ となる。

一方 $X''(t)=\sigma N(t)$ は $X'(t)$, $B(t)$ の両方と直交するので、

$$\begin{aligned}(\langle X'(t),V(0)\rangle)' &= \langle X''(t),V(0)\rangle \ = \ \langle X''(t),V(t)\rangle \\ &= \langle X''(t),\tau X'(t)+\sigma B(t)\rangle \ = \ 0\end{aligned}$$

より

$$\langle X'(t),V(0)\rangle = \langle X'(0),V(0)\rangle = \langle X'(0),\tau X'(0)+\sigma B(0)\rangle = \tau$$

ここで $\tilde{V}=V(0)/\|V(0)\|$ とおくと、

$$\langle X'(t),\tilde{V}\rangle = \frac{1}{\|V(0)\|}\langle X'(t),V(0)\rangle = \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$$

が成り立つ。すなわち、曲線 $X(t)$ の $\tilde{V}$ 方向の速さは一定であるとわかる。

ここで、原点を通り $\tilde{V}$ と直交する平面 Π への $X(t)$ の射影

$$Y(t) = X(t) - \langle X(t), \tilde{V} \rangle \tilde{V}$$

を考える。ここで

$$Y'(t) = X'(t) - \langle X'(t), \tilde{V} \rangle \tilde{V} = X'(t) - \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \tilde{V}$$

より

$$\begin{aligned}
\|Y'(t)\|^2 &= \|X'(t) - \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \tilde{V}\|^2 \\
&= \|X'(t)\|^2 - \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \langle X'(t), \tilde{V} \rangle + \frac{\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \|\tilde{V}\|^2 \\
&= 1 - \frac{2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} + \frac{\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \cdot 1 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \ \neq \ 0
\end{aligned}$$

従って$a = \|Y'(t)\| = \sigma/\sqrt{\sigma^2+\tau^2}$ とおけば、$s = at$ が弧長媒介変数となる。$\tilde{Y}(s) = Y(s/a)$ とおくと、

$$\tilde{Y}'(s) = \frac{1}{a}Y'(\frac{s}{a}) \ = \ \frac{1}{a}\left(X'(\frac{s}{a}) - \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\tilde{V}\right)$$

$$\tilde{Y}''(s) = \frac{1}{a^2}X''(\frac{s}{a}) \ = \ \frac{1}{a^2}\sigma N(\frac{s}{a}) \ = \ \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma}N(\frac{s}{a})$$

より、$\tilde{Y}(s)$ の（従って $Y(t)$ の）曲率は、0 でない定数 $(\sigma^2+\tau^2)/\sigma$ である。

従って $Y(t)$ は、平面 Π 上の半径 $\sigma/(\sigma^2+\tau^2)$ の円周であり、$X(t)$ は、この円周を、Π と直交する方向に一定の速さでずらしていった曲線であるとわかった。

よって、上の主張も示された。

（別解）　図形的な意味は考えずに、常微分方程式として機械的に解くと次の通り。

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ \sigma & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば、Frenet-Serret 枠 $X'(t), N(t), B(t)$ が満たす線形常微分方程式(Frenet-Serret の公式) は

$$(X', N, B)' = (X', N, B)A$$

と表せる。ここで、σ, τ 共に一定と言う仮定より、この常微分方程式は定数係数なので、行列の指数関数 e^{tA} を用いて、一般解が

$$(X', N, B) = (X'(0), N(0), B(0))e^{tA}$$

と表せる。後は A の対角化を用いて、e^{tA} を具体的に計算すればよい。A の固有多項式は $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda^2 + \sigma^2 + \tau^2)$ より、固有値は $\lambda = 0, \pm\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} i$ なので、$\mu = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ とおけば、A を対角化する行列(各固有値の固有ベクトルを並べた行列) として

$$P := \begin{pmatrix} \tau & \sigma & \sigma \\ 0 & -i\mu & i\mu \\ \sigma & -\tau & -\tau \end{pmatrix}$$

がとれる。ここで、

$$P^{-1} = \frac{1}{2\mu^2} \begin{pmatrix} 2\tau & 0 & 2\sigma \\ \sigma & i\mu & -\tau \\ \sigma & -i\mu & -\tau \end{pmatrix}$$

より

$$
\begin{aligned}
AP &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mu & 0 \\ 0 & 0 & -i\mu \end{pmatrix} \\
A &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mu & 0 \\ 0 & 0 & -i\mu \end{pmatrix} P^{-1} \\
e^{tA} &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\mu t} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{1}{\mu^2}\begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 \cos \mu t & -\mu\sigma \sin \mu t & \sigma\tau - \sigma\tau \cos \mu t \\ \mu\sigma \sin \mu t & \mu^2 \cos \mu t & -\mu\tau \sin \mu t \\ \sigma\tau - \sigma\tau \cos \mu t & \mu\tau \sin \mu t & \sigma^2 + \tau^2 \cos \mu t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る。これを一般解の公式に代入し、第１列のみ取り出せば、

$$X'(t) = \frac{1}{\mu^2}(X'(0), N(0), B(0)) \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 \cos \mu t \\ \mu\sigma \sin \mu t \\ \sigma\tau - \sigma\tau \cos \mu t \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、解の形が見やすくなるよう、初期条件として

$$(X'(0), N(0), B(0)) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sigma/\mu & 0 & -\tau/\mu \\ \tau/\mu & 0 & \sigma/\mu \end{pmatrix}$$

を選べば、

$$X'(t) = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} -\sigma \sin \mu t \\ \sigma \cos \mu t \\ \tau \end{pmatrix}$$

より、これを積分して

$$X(t) = \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} \sigma \cos \mu t \\ \sigma \sin \mu t \\ \tau \mu t \end{pmatrix} + C$$

を得る。

第６回の問の解答

(準備)　s を $X(t)$ の弧長パラメーターとする。このとき $\dfrac{ds}{dt} = ||X'(t)||$ より

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||X'(t(s))||}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{-\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{-\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

$$= \frac{-\frac{d}{dt}(\langle X'(t), X'(t)\rangle^{1/2})}{||X'(t)||^3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\langle X'(t), X'(t)\rangle^{-1/2} \cdot 2\langle X'(t), X''(t)\rangle}{||X'(t)||^3}$$

$$= \frac{-\langle X'(t(s)), X''(t(s))\rangle}{||X'(t(s))||^4}$$

が成り立つ。

ここで

$$
\begin{aligned}
X_s &= \frac{dt}{ds} X'(t(s)) \ = \ \frac{X'(t(s))}{||X'(t(s))||} \\
X_{ss} &= \frac{d^2t}{ds^2} X'(t(s)) + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 X''(t(s)) \\
&= \frac{||X'(t(s))||^2 X''(t(s)) - \langle X'(t(s)), X''(t(s))\rangle X'(t(s))}{||X'(t(s))||^4} \\
X_{sss} &= \frac{d^3t}{ds^3} X'(t(s)) + 3\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} X''(t(s)) + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 X'''(t(s))
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\sigma(t)^2\tau(t) &= \sigma(t(s))^2\tau(t(s)) \;=\; |X_s, X_{ss}, X_{sss}| \\
&= \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 |X'(t(s)), X''(t(s)), X'''(t(s))| \\
&= \frac{|X'(t), X''(t), X'''(t)|}{||X'(t)||^6} \\
\sigma(t)^2 &= \sigma(t(s))^2 \;=\; ||X_{ss}||^2 \;=\; \langle X_{ss}, X_{ss}\rangle \\
&= \frac{||X'(t)||^2||X''(t)||^2 - \langle X'(t), X''(t)\rangle^2}{||X'(t)||^6} \\
\tau(t) &= \frac{|X'(t), X''(t), X'''(t)|}{||X'(t)||^2||X''(t)||^2 - \langle X'(t), X''(t)\rangle^2}
\end{aligned}
$$

を得る。

問2.3

$X(t) = {}^t(\cos t, \sin t, f(t))$ を、上で求めた公式に代入すれば

$$
\begin{aligned}
||X'(t)||^2 &= 1 + f'(t)^2 \\
||X''(t)||^2 &= 1 + f''(t)^2 \\
\langle X'(t), X''(t) \rangle &= f'(t) f''(t) \\
||X'(t(s))||^2 ||X''(t(s))||^2 - \langle X'(t(s)), X''(t(s)) \rangle^2 \ &= \ 1 + f'(t)^2 + f''(t)^2 \\
|X'(t), X''(t), X'''(t)| &= f'(t) + f'''(t)
\end{aligned}
$$

より

$$
\sigma(t) = \frac{\sqrt{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}
$$

$$
\tau(t) = \frac{f'(t) + f'''(t)}{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}
$$

を得る。