応用数学・演習問題—No.1—

フーリエ級数

1　関数 f は、$(-\pi, \pi]$ 上の関数

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}$$

を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$f(x) \;=\; \cos\frac{x-2m\pi}{2} \qquad ((2m-1)\pi < x \leq (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とする。f は偶関数なので、そのフーリエ正弦係数は全て 0 である。次の各問に答えよ。

(1)　f のフーリエ余弦係数 a_k $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ を全て求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} |k^2 a_k|$ を求めよ。

(3)　f のフーリエ正弦級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

が $f(x)$ に収束することは認め、$x = 0$ における値に着目することにより、円周率 π を無限級数で表す公式を求めよ。

2　関数 g は、$(-\pi, \pi]$ 上の関数

$$g(x) = \sin\frac{x}{2}$$

を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$g(x) \;=\; \sin\frac{x-2m\pi}{2} \qquad ((2m-1)\pi < x \leq (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とする。g は (不連続点を除き) 奇関数なので、そのフーリエ余弦係数は全て 0 である。次の各問に答えよ。

(1)　g のフーリエ正弦係数 b_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} |k^2 b_k|$ は存在するか否か判定せよ。

関数 h は、$(-\pi, \pi]$ 上の関数

$$h(x) = \sin\frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}$$

を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$h(x) \;=\; \sin\frac{x-2m\pi}{2} - \frac{x-2m\pi}{\pi} \qquad ((2m-1)\pi < x \leq (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とする。h は奇関数なので、そのフーリエ余弦係数は全て 0 である。次の各問に答えよ。

(3)　h のフーリエ正弦係数 β_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} |k^2 \beta_k|$ を求めよ。

3　関数 f は、$(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x) = x$ を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$f(x) \ = \ x - 2m\pi \qquad ((2m-1)\pi < x \leq (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とする。f は (不連続点を除き) 奇関数なので、そのフーリエ余弦係数は全て 0 である。次の各問に答えよ。

(1)　$k \in \mathbf{N}$ とする。関数 $x \sin kx$ の原始関数は

$$\boxed{\text{ア}}\, x \cos kx + \boxed{\text{イ}}\, \sin kx + \text{定数}$$

の形で表せる。$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる係数を求めよ。

(2)　f のフーリエ正弦係数 b_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

(3)　$\ell \in \mathbf{N}$ とする。$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる値を求めよ。

$$\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \boxed{\text{ウ}} & (k = 2\ell - 1) \\ \boxed{\text{エ}} & (k = 2\ell) \end{cases}$$

(4)　f のフーリエ正弦級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ が (不連続点を除き) $f(x)$ に収束することは認め、$x = \dfrac{\pi}{2}$ における値に着目することにより、円周率 π を無限級数で表す公式を求めよ。

4　関数 f は問 3 の f とする。関数 g, h をそれぞれ、

$$g(x) \ = \ f(x)^3, \qquad h(x) \ = \ f(x)^3 - \pi^2 f(x)$$

で定義する。g は (不連続点を除き) 奇関数、h は (連続な) 奇関数なので、それらのフーリエ余弦係数はいずれも全て 0 である。次の各問に答えよ。

(1)　$k \in \mathbf{N}$ とする。関数 $x^3 \sin kx$ の原始関数は

$$\boxed{\text{オ}}\, x^3 \cos kx + \boxed{\text{カ}}\, x^2 \sin kx + \boxed{\text{キ}}\, x \cos kx + \boxed{\text{ク}}\, \sin kx + \text{定数}$$

の形で表せる。$\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる係数を求めよ。

(2)　g のフーリエ正弦係数 b'_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

(3)　h のフーリエ正弦係数 β_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

(4)　h のフーリエ正弦級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$ が $h(x)$ に収束することは認め、$x = \dfrac{\pi}{2}$ における値に着目することにより、π^3 を無限級数で表す公式を求めよ。