応用数学（水１）・中間試験問題 (解答例)

学籍番号　　　　　　　　　　氏　名

（時間内に出来る）問題全てに解答して下さい。解答の作成にあたっては、途中の計算を省略しないで書くようにして下さい。

1　関数 f は、$(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x) = e^x$ を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$f(x) \;=\; e^{x-2m\pi} \qquad ((2m-1)\pi < x \leq (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とする。次の各問に答えよ。

(1)　$k \in \mathbf{N}$ とする。関数 $e^x \cos kx$, $e^x \sin kx$ の原始関数は、それぞれ

$$\int e^x \cos kx \; dx \;=\; \boxed{ア}\, e^x \cos kx + \boxed{イ}\, e^x \sin kx + \text{定数}$$
$$\int e^x \sin kx \; dx \;=\; \boxed{ウ}\, e^x \cos kx + \boxed{エ}\, e^x \sin kx + \text{定数}$$

の形で表せる。$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまる係数を求めよ。

$$\begin{aligned}(\text{第 1 式右辺})' &= \boxed{ア}(e^x \cos kx - ke^x \sin kx) + \boxed{イ}(e^x \sin kx + ke^x \cos kx)\\ &= (\boxed{ア} + k\boxed{イ})e^x \cos kx + (-k\boxed{ア} + \boxed{イ})e^x \sin kx \;=\; e^x \cos kx\end{aligned}$$

より

$$\boxed{ア} + k\boxed{イ} = 1, \qquad -k\boxed{ア} + \boxed{イ} = 0$$

これを解いて

$$\boxed{ア} = \frac{1}{k^2+1}, \qquad \boxed{イ} = \frac{k}{k^2+1}$$

$$\begin{aligned}(\text{第 2 式右辺})' &= \boxed{ウ}(e^x \cos kx - ke^x \sin kx) + \boxed{エ}(e^x \sin kx + ke^x \cos kx)\\ &= (\boxed{ウ} + k\boxed{エ})e^x \cos kx + (-k\boxed{ウ} + \boxed{エ})e^x \sin kx \;=\; e^x \sin kx\end{aligned}$$

より

$$\boxed{ウ} + k\boxed{エ} = 0, \qquad -k\boxed{ウ} + \boxed{エ} = 1$$

これを解いて

$$\boxed{ウ} = -\frac{k}{k^2+1}, \qquad \boxed{エ} = \frac{1}{k^2+1}$$

(2) f のフーリエ正弦係数 a_k $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, 余弦係数 b_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx \;=\; \frac{1}{\pi}\left[e^x\right]_{-\pi}^{\pi} \;=\; \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2+1}e^x \cos kx + \frac{k}{k^2+1}e^x \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{k}{k^2+1}e^x \cos kx + \frac{1}{k^2+1}e^x \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{(-1)^k k(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi}
\end{aligned}$$

(3) f のフーリエ級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

が (不連続点を除き) $f(x)$ に収束することは認め、$x = 0$ における値に着目することにより、$\dfrac{\pi}{\sinh \pi}$ を無限級数で表す公式を求めよ。**(注：** $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **)**

f のフーリエ級数は $x = 0$ においても収束するので、

$$\begin{aligned}
1 \;=\; e^0 &= f(0) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos(k \cdot 0) + b_k \sin(k \cdot 0)\} \\
&= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} \cdot 1 - \frac{(-1)^k k(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} \cdot 0\right\} \\
&= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}\right\}
\end{aligned}$$

より

$$\frac{\pi}{\sinh \pi} = \frac{2\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{k^2+1}$$

2　関数 f は問１の f とする。関数 g は、$(-\pi,\pi]$ 上の関数 $g(x)=e^{-x}$ を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$g(x) \ = \ e^{-(x-2m\pi)} \qquad ((2m-1)\pi < x \leq (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とし、関数 h を $h=f+g$ により定義する。次の各問に答えよ。

(1)　g のフーリエ正弦係数 a'_k $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, 余弦係数 b'_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

$$g(x) \ = \ f(-x) \qquad ((2m-1)\pi < x < (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

より

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \\ a'_k &= a_k = \frac{(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} \\ b'_k &= -b_k = \frac{(-1)^k k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} \end{aligned}$$

(2)　h のフーリエ正弦係数 α_k $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, 余弦係数 β_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_0 + \alpha'_0 = 2\alpha_0 = \frac{2(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi} \\ \alpha_k &= a_k + a'_k = 2a_k = \frac{2(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} \\ \beta_k &= b_k + b'_k = 0 \end{aligned}$$

(3)　h のフーリエ級数

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\}$$

は一様収束することを示せ。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha_0}{2}\right| &= \frac{|\alpha_0|}{2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\\ |\alpha_k\cos kx| &= |\alpha_k| = \frac{2(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi}\\ |\beta_k\sin kx| &= 0\end{aligned}$$

より、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\}\right| &\le \frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{|\alpha_k|+|\beta_k|\}\\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2+1}\right)\\ &\le \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}\right)\end{aligned}$$

ここで、右辺が収束するので、優級数判定法より主張が成り立つ。

(4)　h のフーリエ級数が $h(x)$ に収束することは認め、$x=\pi$ における値に着目することにより、$\dfrac{\pi}{\tanh\pi}$ を無限級数で表す公式を求めよ。(注：$\tanh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$)

(3) より h のフーリエ級数は $x=\pi$ においても収束するので、

$$\begin{aligned}e^{\pi}+e^{-\pi} &= h(\pi) = \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos k\pi\\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(k^2+1)\pi}(-1)^k\\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2+1}\right)\end{aligned}$$

より

$$\frac{\pi}{\tanh\pi} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2+1}$$