応用数学・演習問題—No.2—

フーリエ変換

5　$f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(x < -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} < x\right) \end{cases}$$

で与えられる関数とする。次の各問に答えよ。

(1)　$f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ。

(注：小問 (3) のためには、一つの項にまとまるまで整理することが望ましい。)

(2)　$\hat{f}(\xi)$ は $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上連続であることを確かめよ。

(注：非自明な箇所のみ確かめるだけでよい。)

(3)　$\hat{f}(\xi)$ は $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上絶対可積分であることを示せ。

(4)　$\hat{f}(\xi)$ の２乗積分 (L^2 ノルムの２乗)

$$||\hat{f}(\xi)||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

の値を求めよ。**(ヒント：直接計算するのではなく、パーセヴァルの等式を用いるとよい。)**

6　$f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (-\pi \leq x \leq \pi) \\ 0 & (x < -\pi, \pi < x) \end{cases}$$

で与えられる関数とする。次の各問に答えよ。

(1)　$f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ を求めよ。

(注：小問 (3) のためには、一つの項にまとまるまで整理することが望ましい。)

(2)　$\hat{f}(\xi)$ は $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上連続であることを確かめよ。

(注：非自明な箇所のみ確かめるだけでよい。)

(3)　$\hat{f}(\xi)$ は $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上絶対可積分であることを示せ。

(4)　$\hat{f}(\xi)$ の２乗積分 (L^2 ノルムの２乗)

$$||\hat{f}(\xi)||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

の値を求めよ。**(ヒント：直接計算するのではなく、パーセヴァルの等式を用いるとよい。)**

7　k は正の定数、$f(x)$ は $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上連続な偶関数で、

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^M) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を満たす $C > 0,\ M > 0$ が存在するものとする。このとき、熱方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) & \\ u(0, x) = f(x) & \text{(初期条件)} \end{cases}$$

の解 $u(t, x)$ について、次の各問に答えよ。

(1)　$u(t, x)$ を $(0, \infty)$ 上の積分を用いて表せ。

(注：教科書または講義資料の定理の主張は、証明無しで用いてよい。)

(2)　$u(t, x)$ は $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0$ を満たすことを示せ。

8　a は正の定数、$f(x)$ は $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上 C^2 級とする。このとき、波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) & \\ u(0, x) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \pm a f'(x) & \text{(初期条件)} \end{cases}$$

の解を求めよ。

(注：教科書または講義資料の定理の主張は、証明無しで用いてよい。)