

線形代数1・講義資料

演習第1回

(2023年5月12日(金)講義分)

問題 1 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

2 次正方行列 A, B は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられるものとします。

(1) このとき、行列の積 tABA について、次が成り立ちます。

$${}^tABA = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

(2) ${}^tABA = B$ が成り立つような A について、 $a \neq 0$ のとき、

$$\left[d = \boxed{\text{オ}}_a \text{ かつ } b = \boxed{\text{カ}}_c \right]$$

または

$$\left[d = \boxed{\text{キ}}_a \text{ かつ } b = \boxed{\text{ク}}_c \right]$$

が成り立ちます。(実は $a \neq 0$ は自動的に成り立ちます。)

問題 2 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

何乗かすれば零行列になってしまうような正方行列を**べき零行列**と言います(教科書18頁参照)。2 次の正方行列 A が $A^3 = O$ を満たすならば、実は $A^2 = O$ であることを、 A が上三角行列である場合について示してみましょう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

とします。このとき、

$$A^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケ}} & \boxed{\text{コ}} \\ 0 & \boxed{\text{サ}} \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \\ 0 & \boxed{\text{セ}} \end{pmatrix}$$

より、もし $A^3 = O$ ならば、

$$\boxed{\text{シ}} = 0, \quad \boxed{\text{ス}} = 0, \quad \boxed{\text{セ}} = 0$$

が成り立ちます。このとき、

$$\boxed{\text{ソ}} = 0, \quad \boxed{\text{タ}} = 0$$

なので、 $\boxed{\text{チ}}$ の値にかかわらず、

$$\boxed{\text{ケ}} = 0, \quad \boxed{\text{コ}} = 0, \quad \boxed{\text{サ}} = 0$$

が成り立ち、 $A^2 = O$ となります。

問題 3 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

3 次正方行列 A を行ベクトルに分割したものを

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$$

とします。また k は実数とし、3 次の正方行列 B は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられるものとします。

このとき、行列の積 BA について、次が成り立ちます。

$$BA = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}}a_1 + \boxed{\text{テ}}a_2 + \boxed{\text{ト}}a_3 \\ \boxed{\text{ナ}}a_1 + \boxed{\text{ニ}}a_2 + \boxed{\text{ヌ}}a_3 \\ \boxed{\text{ネ}}a_1 + \boxed{\text{ノ}}a_2 + \boxed{\text{ハ}}a_3 \end{pmatrix}$$